
ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ
АНРИ ПУАНКАРЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ



АНРИ ПУАНКАРЕ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

В ТРЕХ ТОМАХ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

академика Н. Н. БОГОЛЮБОВА
(главный редактор),
доктора физ.-матем. наук В. И. АРНОЛЬДА,
доктора физ.-матем. наук И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1971

АНРИ ПУАНКАРЕ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

I

НОВЫЕ МЕТОДЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1971

УДК 521.1

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

Серия основана академиком *С. И. Вавиловым*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Академик *И. Г. Петровский* (председатель),
академик *А. А. Имшенецкий*, академик *Б. А. Казанский*,
академик *Б. М. Кедров*, член-корреспондент АН СССР *Б. Н. Делоне*,
профессор *Ф. Л. Петровский*, профессор *Л. С. Полак*,
профессор *Н. А. Фигуровский*, профессор *И. И. Шафрановский*

Анри Пуанкаре. Избранные труды в трех томах. Том I. Новые методы небесной механики. Изд-во «Наука», 1971 г.

В настоящую книгу включены два первых тома «Новых методов небесной механики». Третий том войдет во вторую книгу настоящего издания. Этот капитальный труд замечательного французского математика и физика публикуется на русском языке впервые.

В «Новых методах небесной механики» А. Пуанкаре разработал теорию интегральных инвариантов, построил теорию асимптотических разложений, исследовал периодические орбиты, внес значительный вклад в решение ряда других задач прикладной математики, механики, астрономии. Это произведение, ставшее классическим, оказало большое влияние на развитие точных наук и не потеряло своего значения и в наши дни.

Редактор первого тома *В. И. Арнольд*

Составитель *И. Б. Погребысский*

2-6-2

Подписное издание

ОТ РЕДАКЦИИ

Анри Пуанкаре (1854—1912) вошел в науку как математик и в течение тридцати с небольшим лет своей творческой деятельности сумел обогатить почти все области математики результатами первостепенного значения. Вместе с тем, оставаясь математиком и применяя математику, он в серии курсов и мемуаров охватил всю теоретическую и математическую физику своего времени, открыл своими работами новую эпоху в истории небесной механики, участвовал в создании зародившихся при нем теории относительности и квантовой теории, выступал по общим вопросам науки и был ее блестящим популяризатором. Его можно с полным правом назвать не только выдающимся математиком, но и первоклассным механиком, физиком, астрономом.

Очень многое в наследии Анри Пуанкаре остается живой составной частью современной науки, и огромный объем этого наследия делал задачу отбора работ для нашего собрания в достаточной мере затруднительной. Два решения представлялись все же бесспорными: свести к минимуму повторение в нашем издании работ Пуанкаре, имеющихся в русском переводе, и включить в него поразительные по богатству идеями и результатами три тома знаменитых «Новых методов небесной механики». Они занимают первый том и первую часть второго тома нашего издания. В остальную часть второго тома входят классические работы Анри Пуанкаре по топологии и некоторые другие мемуары, примыкающие к «Новым методам небесной механики». В третий том входят как математические работы, в частности, работы по теории функций, так и работы по физике и некоторые статьи по общим проблемам науки.

Первый и второй том «Новых методов небесной механики» переведены: первый — А. А. Бряндинской и И. В. Иословичем под редакцией В. И. Арнольда, второй — Ю. А. Даниловым под редакцией В. М. Алексеева. Редакторы переводов снабдили эти тома своими комментариями. Общая редакция «Новых методов» проведена В. И. Арнольдом.

Следует указать, что при подготовке настоящего тома к печати выполнена значительная работа текстологического характера, исправлены многочисленные опечатки в формулах французского оригинала.

Числами в квадратных скобках обозначены примечания редакторов, приведенные в конце книги.





НОВЫЕ МЕТОДЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

I

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ.
НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ ОДНОЗНАЧНЫХ ИНТЕГРАЛОВ.
АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

LES MÉTHODES NOUVELLES DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE

I

SOLUTIONS PÉRIODIQUES.
NON EXISTENCE DES INTÉGRALES UNIFORMES.
SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES

ВВЕДЕНИЕ

Задача трех тел настолько важна для астрономии и в то же время настолько трудна, что все усилия геометров уже давно устремлены в этом направлении. Полное и точное интегрирование является, очевидно, невозможным и потому пришлось прибегнуть к приближенным методам. Сначала были использованы методы, состоящие в разложении в ряды по степеням масс. В начале нашего века достижения Лагранжа и Лапласа, а позднее вычисления Леверрье довели эти методы до такой степени совершенства, что до настоящего времени они были достаточны для всех практических нужд. Я мог бы добавить, что они будут достаточны, несмотря на некоторые расхождения в деталях, еще в течение долгого времени, однако не вечно, как это легко себе уяснить.

Конечная цель небесной механики состоит в разрешении великого вопроса, может ли закон Ньютона, и только он один, объяснить все астрономические явления; единственным способом разрешения этого вопроса является проведение насколько возможно точных наблюдений и сравнение их с результатами вычислений. Эти вычисления могут быть лишь приближенными и, кроме того, нет никакого смысла вычислять большее количество десятичных знаков, чем могут дать наблюдения. Поэтому бесполезно требовать от вычислений большей точности, чем от наблюдений, но нельзя от вычислений требовать и меньшей точности. Поэтому приближение, которое мы можем считать удовлетворительным сегодня, окажется недостаточным через несколько веков. Действительно, даже если сделать весьма маловероятное предположение, что измерительные приборы не будут более совершенствоваться, уже одно накопление наблюдений в течение нескольких веков позволит определить с большей точностью коэффициенты различных неравенств. Эта эпоха, когда придется отказаться от старых методов, конечно, еще очень далека, но теоретик должен ее предвидеть, так как труды теоретика должны опережать, и часто на много лет, труды вычислителей.

Не нужно думать, что для получения эфемерид с большой точностью в течение длинного ряда лет достаточно вычислить большее число членов в рядах, к которым приводят старые методы. Действительно, методы, состоящие в разложении координат небесных тел по степеням масс, носят общие черты, которые мешают их применению для вычисления эфе-

мерид на долгий срок. Полученные ряды содержат члены, называемые *вековыми*, в которые время входит вне знака синуса или косинуса. Отсюда следует, что сходимость этих рядов может стать сомнительной для больших значений времени t.

Наличие этих вековых членов связано не с природой задачи, а только с применяемым методом. Действительно, легко видеть, что если истинное выражение координаты содержит член с $\sin \alpha mt$, где α — константа, а m — одна из масс, то при разложении по степеням m появятся вековые члены

$$\alpha mt - \frac{\alpha^3 m^3 t^3}{6} + \cdots$$

и присутствие этих членов дает весьма ложное представление о настоящем виде изучаемой функции.

Все астрономы уже давно ощущают это. Сами создатели небесной механики во всех случаях, когда требовалось получить формулы, пригодные на длительный срок, как, например, для вычисления вековых неравенств, должны были действовать иначе и отказаться от разложений просто по степеням масс. Таким образом, изучение вековых неравенств при помощи системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно считать относящимся скорее к новым, чем к старым методам.

Точно так же все усилия геометров во второй половине века имеют своей главной целью устранение вековых членов. Первый серьезный шаг в этом направлении был сделан Делоне, чей метод, безусловно, принесет еще много пользы.

Мы упомянем далее исследования Хилла по теории Луны («American Journal of Mathematics», v. I, «Acta mathematica», t. VIII). В этой работе, к сожалению неоконченной, можно увидеть зачатки большей части достижений науки, сделанных с того времени.

Но ученым, который оказал этой ветви астрономии самые важные услуги, является, несомненно, Гильден. Его работы касаются всех сторон небесной механики, он умело использует все возможности современного анализа. Гильден добился того, что из его разложений совершенно исчезли все вековые члены, которые так затрудняли его предшественников.

С другой стороны, Линдштедт предложил иной метод, значительно более простой, чем метод Гильдена, но менее общий, поскольку его невозможно применить при наличии членов, которые Гильден назвал *критическими*.

Благодаря усилиям этих ученых, трудности, происходящие от вековых членов, могут считаться полностью преодоленными, и новые методы, вероятно, будут еще долго удовлетворять требованиям практики.

Однако не все еще сделано. Большая часть этих разложений не сходится в том смысле, в котором геометры понимают это слово. Конечно,

в настоящее время это не имеет большого значения, поскольку мы уверены, что вычисление первых членов дает весьма удовлетворительное приближение. Но не менее верно и то, что эти разложения не могут давать сколь угодно точное приближение. Поэтому наступит момент, когда они станут неудовлетворительными. Кроме того, некоторые теоретические выводы, которые можно было бы сделать на основании вида этих рядов, не будут законными вследствие их расходимости. Так, например, они не могут служить для разрешения вопроса об устойчивости солнечной системы. Исследование сходимости этих разложений должно привлечь внимание геометров по причинам, которые я изложил и, кроме того, по следующей причине: цель небесной механики не будет достигнута, если мы вычислим эфемериды более или менее приближенно, не отдавая себе отчета в степени полученной точности. Действительно, если мы обнаружим расхождение между этими эфемеридами и наблюдениями, необходимо, чтобы можно было установить, виноват ли в этом закон Ньютона или все можно объяснить несовершенством теории. Поэтому важно определить верхний предел допущенной ошибки, на что, может быть, недостаточно обращали внимания до последнего времени.

Оказывается, методы, которые позволяют исследовать сходимость, дают нам в то же время этот верхний предел, что повышает их значение и практическую ценность.

Поэтому не следует удивляться, что я отвожу этим методам такое большое место в этой книге, хотя, быть может, я извлек из них не все, что они могут дать.

Я сам занимался этими вопросами и посвятил им мемуар, который появился в XIII томе «Acta mathematica»; в особенности я старался осветить те немногочисленные результаты, относящиеся к задаче трех тел, которые могут быть установлены с абсолютной строгостью, требуемой математикой. Только эта строгость придает некоторую ценность моим теоремам о периодических, асимптотических и двоякоасимптотических решениях. Действительно, здесь можно будет найти твердую основу, на которую можно спокойно опереться, а это представляет ценность для всех исследований, даже для тех, где не требуется такой строгости.

С другой стороны, мне казалось, что мои результаты позволили мне объединить в некий синтез большинство новых, недавно предложенных методов, и это побудило меня предпринять настоящий труд.

В предлагаемом первом томе я должен был ограничиться изучением периодических решений первого рода, доказательством несуществования однозначных интегралов, а также изложением и обсуждением методов Линдштедта.

Следующие тома я посвящу обсуждению методов Гильдена, теории интегральных инвариантов, вопросам устойчивости, изучению периодических решений второго рода, асимптотических и двоякоасимптотических решений и, наконец, новым результатам, которые я смогу получить к моменту опубликования этих томов.

Кроме того, я буду принужден, без сомнения, вернуться в последующих томах к вопросам, рассмотренным в I томе. Правда, логика при этом немного пострадает, но нельзя поступать иначе в отрасли науки, которая находится в стадии становления и в которой новые достижения следуют непрерывно одно за другим. Поэтому я заранее прошу извинить меня.

Последнее замечание: обычно результаты представляют в форме, наиболее удобной для вычисления эфемерид, выражая координаты в виде явных функций времени. Этот путь представляет, очевидно, значительные преимущества и большею частью я по возможности ему следовал; однако я так поступал не всегда и часто представлял результаты в форме интегралов, т. е. в виде неявных соотношений между координатами или между координатами и временем. Прежде всего, эти соотношения можно использовать для проверки формул, дающих координаты в явном виде. Но это не все; истинная цель небесной механики состоит не в вычислении эфемерид, так как в этом случае можно было бы удовлетвориться предвидением на короткий срок, а в том, чтобы убедиться, достаточно ли закона Ньютона для объяснения всех явлений. С этой точки зрения неявные соотношения, о которых я говорил выше, могут оказаться столь же полезными, как и явные формулы. Действительно, достаточно в них подставить наблюденные значения координат и проверить, удовлетворяются ли они.

Глава I

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И МЕТОД ЯКОБИ

Общие положения

1. Прежде чем приступить к основной теме моего исследования, я должен изложить некоторые предварительные сведения и вкратце напомнить основные принципы «Лекций по динамике» Якоби и теорию Коши, связанную с интегрированием дифференциальных уравнений с помощью рядов. Я намерен посвятить первую главу изложению метода Якоби, ограничиваясь чаще всего формулировкой результатов, доказательства которых хорошо известны.

Сначала дадим несколько пояснений по поводу обозначений и названий, которые будут использоваться во всей этой работе.

Мы будем иметь дело с дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n, \tag{1}$$

где X_1, X_2, ..., X_n — аналитические и однозначные функции n переменных x_1, x_2, ..., x_n. Что касается независимой переменной t, которую мы будем рассматривать как обозначающую время, то чаще всего будем предполагать, что она не входит явно в функции X.

Можно рассматривать систему (1) как систему порядка n, так как она эквивалентна одному дифференциальному уравнению порядка n. Однако, если функции X не зависят от t, порядок системы может быть уменьшен на единицу. Для этого достаточно исключить время и записать уравнения (1) в виде

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Чтобы избежать путаницы, мы определим следующим образом смысл слов *решение* и *интеграл*.

Если уравнения (1) удовлетворяются при

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t), \tag{2}$$

то мы будем говорить, что уравнения (2) определяют частное *решение* уравнений (1).

Если некоторая функция переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

остается постоянной в силу уравнений (1), мы будем говорить, что эта функция F является частным *интегралом* системы (1).

Ясно, что знание интеграла позволяет понизить на единицу порядок системы.

В задачах динамики уравнения (1) встречаются в более частной форме, известной под названием *гамильтоновой*, или *канонической формы* [1].

Переменные распадаются на два ряда; обычно мы обозначаем через

$$x_1, x_2, \ldots, x_p$$

переменные первого ряда и через

$$y_1, y_2, \ldots, y_p$$

переменные второго ряда и записываем дифференциальные уравнения в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p), \tag{3}$$

где F — однозначная функция $2p$ переменных x и y.

Эти уравнения допускают частный интеграл, которым является сама функция F, известный под названием *интеграла живых сил*.

Говорят, что $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_p, y_p$ образуют p пар сопряженных переменных.

По примеру англичан мы скажем, что система (3) допускает p степеней свободы.

Эта система имеет порядок $2p$, но знание интеграла живых сил позволяет понизить этот порядок на единицу. Так как время не входит явно в правые части уравнений (3), мы можем, как мы уже раньше указывали, посредством исключения времени понизить порядок еще на единицу, так что в конечном счете система, допускающая p степеней свободы, всегда может быть сведена к системе порядка $2p - 2$.

Известно, например, что если система имеет только одну степень свободы, она может быть сведена к системе нулевого порядка, т. е. полностью проинтегрирована.

Примеры канонических уравнений

2. Наиболее простой случай уравнений динамики — это тот, когда изучается движение q свободных материальных точек в пространстве. Пусть m_1 — масса первой из этих точек, x_1, x_2, x_3 — ее декартовы коорди-

наты; m_2 — масса второй из этих точек, x_4, x_5, x_6 — ее координаты и т. д.; пусть, наконец, m_q — масса q-й точки, x_{3q-2}, x_{3q-1} и x_{3q} — ее координаты.

Спроектируем количество движения точки m_1 на три оси; пусть y_1, y_2, y_3 — три проекции. Пусть также y_4, y_5, y_6 — проекции количества движения точки m_2 и т. д.; y_{3q-2}, y_{3q-1}, y_{3q} — проекции количества движения точки m_q.

Пусть F_1, F_2, F_3 — составляющие силы, действующей на m_1; F_4, F_5, F_6 — составляющие силы, действующей на m_2, и т. д.; F_{3q-2}, F_{3q-1}, F_{3q} — составляющие силы, действующей на m_q.

Мы предположим, что составляющие F зависят лишь от $3q$ координат x. Если энергия сохраняется, то существует функция V от координат x, называемая *силовой функцией*, такая, что

$$F_i = \frac{dV}{dx_i}.$$

Половина живой силы T будет иметь вид

$$T = \frac{y_1^2+y_2^2+y_3^2}{2m_1} + \frac{y_4^2+y_5^2+y_6^2}{2m_2} + \cdots + \frac{y_{3q-2}^2+y_{3q-1}^2+y_{3q}^2}{2m_q},$$

и мы сможем записать уравнение живых сил в виде

$$T - V = \text{const}.$$

Если положить

$$T - V = F(x_1, x_2, \ldots, x_{3q}; y_1, y_2, \ldots, y_{3q}),$$

то уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 3q). \tag{1}$$

Таким образом, уравнения движения q свободных материальных точек соответствуют $3q$ степеням свободы во всех случаях, когда силы зависят только от положения этих точек в пространстве и энергия сохраняется. В частности, задача трех тел соответствует девяти степеням свободы. Впоследствии мы увидим, что это число можно значительно уменьшить.

Если наши q материальных точек движутся все в одной плоскости, положение каждой из них будет определяться не тремя координатами, а лишь двумя. Число степеней свободы будет, следовательно, сведено к $2q$.

Таким образом, если орбиты трех тел плоские и расположены в одной плоскости, задача трех тел (которую мы будем тогда называть *плоской задачей трех тел*) имеет лишь шесть степеней свободы.

В случае одной степени свободы уравнения немедленно интегрируются; поэтому мы будем заниматься в основном непосредственно следующим за

ним случаем, т. е. случаем, когда имеются лишь две степени свободы. Большая часть последующих результатов будет применяться лишь к этому относительно простому случаю.

Действительно, во многих задачах механики число степеней свободы может быть сведено к двум. Это, например, имеет место при изучении движения свободной материальной точки в плоскости или, более общим образом, для движения материальной точки, вынужденной оставаться на некоторой поверхности, во всех случаях, когда сила зависит лишь от положения этой точки. Мы приведем в числе других задач знаменитую задачу о движении тела, притягиваемого двумя неподвижными центрами, когда его начальная скорость находится в плоскости этих трех тел [2].

Но есть случай несколько более сложный и более важный для дальнейшего.

Пусть на плоскости даны $O\xi$ и $O\eta$ — две ортогональные подвижные оси, совершающие равномерное вращательное движение вокруг начала координат O. Пусть n — угловая скорость этого вращательного движения, p — подвижная точка, движущаяся в той же плоскости, координаты которой по отношению к этим осям будут обозначаться через ξ и η, а масса будет принята за единицу.

Пусть V — силовая функция, зависящая только от ξ и η так, что проекции силы, приложенной в точке P, на оси $O\xi$ и $O\eta$ равны соответственно $dV/d\xi$ и $dV/d\eta$.

Уравнения движения точки P по отношению к подвижным осям $O\xi$ и $O\eta$ запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\frac{d\eta}{dt} &= \frac{dV}{d\xi} + n^2\xi, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2n\frac{d\xi}{dt} &= \frac{dV}{d\eta} + n^2\eta. \end{aligned} \tag{2}$$

Отсюда можно вывести следующий интеграл, называемый *интегралом Якоби*,

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right] - V - \frac{n^2}{2}(\xi^2 + \eta^2) = \text{const},$$

который является не чем иным, как интегралом живых сил в относительном движении.

Я утверждаю, что эти уравнения можно привести к каноническому виду, причем число степеней свободы будет равно двум.

Действительно, положим

$$\xi = x_1, \qquad \eta = x_2,$$

$$\frac{d\xi}{dt} - n\eta = y_1, \qquad \frac{d\eta}{dt} + n\xi = y_2,$$

$$F = \frac{1}{2}(y_1 + nx_2)^2 + \frac{1}{2}(y_2 - nx_1)^2 - V - \frac{n^2}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Уравнения (2) примут вид

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2},$$

что и требовалось доказать.

Один из частных случаев задачи трех тел сводится к вопросу, который мы только что рассмотрели.

Предположим, что одна из трех масс бесконечно мала, так что движение двух других масс не возмущено и остается кеплеровским. Таким будет, например, случай движения малой планеты под действием Юпитера и Солнца [3]. Представим себе, что эксцентриситет орбит двух больших масс равен нулю, так что эти две массы равномерно движутся по двум концентрическим окружностям вокруг общего центра тяжести, полагаемого неподвижным. Предположим, наконец, что наклонение орбит равно нулю и малая масса движется постоянно в плоскости этих двух окружностей.

Можно всегда предположить, что центр тяжести системы, являющийся общим центром обеих окружностей, неподвижен. Возьмем его за начало координат, проведем через это начало две подвижные оси $O\xi$ и $O\eta$, причем ось $O\xi$ направим по прямой, соединяющей две большие массы, а ось $O\eta$ — по перпендикуляру к $O\xi$. Тогда:

1) эти две оси совершают равномерное вращательное движение;

2) две большие массы неподвижны относительно подвижных осей.

Таким образом, нам надо изучить относительное движение подвижной точки по отношению к подвижным осям под действием притяжения к двум центрам, неподвижным по отношению к этим осям, и мы снова вернулись к вопросу, который только что рассматривали.

Итак, в этом частном случае уравнения задачи трех тел можно привести к каноническому виду лишь с двумя степенями свободы.

Перейдем теперь к уравнению, которое часто встречается в теории возмущений и которым часто пользуется Гильден.

Пусть

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, t). \tag{3}$$

Это уравнение также можно привести к каноническому виду.

Действительно, $f(x, t)$ можно всегда рассматривать как производную по x от некоторой функции $\varphi(x, t)$, так что

$$f = \frac{d\varphi}{dx}.$$

Если теперь мы положим

$$x = x_1, \quad \frac{dx}{dt} = y_1, \quad t = y_2,$$

$$F = \frac{y_1^2}{2} - \varphi(x_1, y_2) - x_2,$$

то уравнение (3) может быть заменено каноническими уравнениями (3) из предыдущего пункта и лишь с двумя степенями свободы, что и требовалось доказать.

Я приведу еще последний пример.

Рассмотрим тяжелое твердое тело, подвешенное в неподвижной точке, и изучим колебания этого тела. Чтобы полностью определить положение этого тела, надо задать три условия. Действительно, надо знать три угла Эйлера, которые дают положение системы осей, неизменно связанных с телом, относительно системы неподвижных осей. Итак, задача допускает три степени свободы, но мы увидим далее, что это число может быть уменьшено до двух.

Сказанного мной достаточно, чтобы показать, сколько задач механики сводится к интегрированию канонических систем с двумя степенями свободы, и дать понять важность этих систем. Было бы бесполезно увеличивать число примеров.

Первая теорема Якоби

3. Якоби показал, что интегрирование канонических уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \tag{1}$$

сводится к интегрированию уравнения в частных производных

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p; y_1, y_2, \ldots, y_p) = h_1, \tag{2}$$

где h_1 — произвольная константа, а относительно $y_1, y_2, \ldots, y_p$ предполагается, что они представляют собой частные производные неизвестной функции.

Пусть в самом деле

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_p; \quad h_1, h_2, \ldots, h_p)$$

— решение уравнения (2), содержащее кроме константы h_1 еще $p-1$ констант интегрирования

$$h_2, h_3, \ldots, h_p,$$

так что каковы бы ни были h,

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \quad \frac{dS}{dx_1}, \frac{dS}{dx_2}, \ldots, \frac{dS}{dx_p}\right) = h_1.$$

Якоби доказал, что общий интеграл уравнений (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dx_i} &= y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p), \\ \frac{dS}{dh_i} &= h_i' \quad (i = 2, 3, \ldots, p), \\ \frac{dS}{dh_1} &= t + h_1'. \end{aligned} \tag{3}$$

Таким образом, $2p$ констант интегрирования будут следующие:

$$h_1, h_2, h_3, \ldots, h_p,$$
$$h_1', h_2', h_3', \ldots, h_p'.$$

Другая теорема, которой мы также будем пользоваться, это теорема Пуассона.

Пусть U и V — некоторые функции от x и y. Условимся обозначать

$$[U, V] = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{dU}{dx_i} \frac{dV}{dy_i} - \frac{dU}{dy_i} \frac{dV}{dx_i} \right).$$

Пусть теперь F_1 и F_2 — два интеграла уравнений (1). То, что F_1 — интеграл уравнения (1), можно записать как

$$[F, F_1] = 0;$$

если F_2 — тоже интеграл, то мы получим точно так же

$$[F, F_2] = 0.$$

Пуассон показал, что выражение $[F_1, F_2]$ также является интегралом уравнений (1). Например, если в задаче n тел обозначить через F_1 и F_2 левые части первого и второго интегралов площадей, то $[F_1, F_2]$ будет левой частью третьего интеграла площадей.

Вторая теорема Якоби; замена переменных

4. Обычно мы не будем использовать прямоугольные координаты и составляющие количеств движений как независимые переменные. Мы выберем переменные, лучше приспособленные для нашей цели, стараясь все же сохранить каноническую форму уравнений.

Посмотрим, как можно заменить переменные, не нарушая канонической формы уравнений (1) п. 3.

Пусть

$$S(y_1, y_2, \ldots, y_p; \quad h_1, h_2, \ldots, h_p)$$

— некоторая функция p переменных y и новых p переменных h. Положим теперь

$$x_i = \frac{dS}{dy_i}, \qquad h_i' = \frac{dS}{dh_i}. \tag{4}$$

Будем считать, что уравнения (4) определяют соотношения, связывающие старые переменные

$$x_1, x_2, \ldots, x_p,$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_p$$

с новыми переменными

$$h_1, h_2, \ldots, h_p,$$
$$h_1', h_2', \ldots, h_p'.$$

Якоби показал, что если сделать такую замену переменных, то уравнения останутся каноническими, и это верно при любой функции S.

Замечательные замены переменных

5. За исключением одного особого случая, все замены переменных, которые не нарушают канонической формы, могут быть выведены по методу п. 4. Бывают, однако, случаи, когда проще действовать иным способом. Мы дадим два таких примера.

Предположим, что имеются канонические уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \tag{1}$$

и сделана следующая замена переменных:

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_{1,i} x_1' + \alpha_{2,i} x_2' + \ldots + \alpha_{n,i} x_n', \\ y_i &= \beta_{1,i} y_1' + \beta_{2,i} y_2' + \ldots + \beta_{n,i} y_n'. \end{aligned} \tag{2}$$

Как нужно выбрать константы α и β, чтобы уравнения оставались каноническими, когда за новые переменные берутся x_i' и y_i'?

Если мы обозначим через

$$\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n; \ \delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_n$$

виртуальные приращения переменных x и y, умножим уравнения (1) соответственно на δy_i и $-\delta x_i$ и затем просуммируем, то получим

$$\sum\left(\frac{dx_i}{dt}\,\delta y_i - \frac{dy_i}{dt}\,\delta x_i\right) = \delta F.$$

Чтобы уравнения оставались каноническими после подстановки (2), необходимо и достаточно, чтобы тождественно выполнялось равенство

$$\sum\left(\frac{dx_i}{dt}\,\delta y_i - \frac{dy_i}{dt}\,\delta x_i\right) = \sum\left(\frac{dx_i'}{dt}\,\delta y_i' - \frac{dy_i'}{dt}\,\delta x_i'\right). \tag{3}$$

Так как dx_i зависят лишь от dx_i', δy_i от $\delta y_i'$, dy_i от dy_i', а δx_i от $\delta x_i'$, то должны тождественно выполняться равенства

$$\sum dx_i \delta y_i = \sum dx_i' \delta y_i', \quad \sum dy_i \delta x_i = \sum dy_i' \delta x_i'. \tag{4}$$

Так как соотношения (2) линейные, то dx_i связаны с dx_i' и δx_i с $\delta x_i'$ теми же соотношениями, которые связывают x_i с x_i'. То же самое справедливо для dy_i, δy_i, y_i, dy_i', $\delta y_i'$, y_i'.

Соотношения (4) сохранятся, следовательно, когда в них dx_i и δx_i будут заменены на x_i, а dy_i и δy_i на y_i, dx_i' и $\delta x_i'$ на x_i' и т. д. Итак, получим

$$\sum x_i y_i = \sum x_i' y_i'. \tag{5}$$

Обратное тоже верно: из соотношения (5) следуют соотношения (3) и (4).

Итак, необходимым и достаточным условием того, чтобы уравнения оставались каноническими, является тождество

$$\sum x_i y_i = \sum x_i' y_i'.$$

Каково теперь условие того, чтобы эти уравнения оставались каноническими и в то же время имело место соотношение

$$\alpha_{k,i} = \beta_{k,i}\,?$$

Я назову линейную замену переменных, такую, как (2), *ортогональной*, если справедливо тождество

$$\sum x_i^2 = \sum x_i'^2,$$

т. е. если

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{k,i}^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_{k,i}\alpha_{h,i} = 0.$$

Это название оправдано само по себе, так как в случае, когда число переменных равно двум или трем и когда x или x' можно рассматривать как

координаты точки в плоскости или в пространстве, подобная подстановка является не чем иным, как прямоугольной заменой координат.

Итак, *если мы применим к переменным x и y одну и ту же ортогональную подстановку*, то получим

$$\sum x_i^2 = \sum x_i'^2 \qquad \sum y_i^2 = \sum y_i'^2,$$
$$\sum (x_i + y_i)^2 = \sum (x_i' + y_i')^2,$$

откуда

$$\sum x_i y_i = \sum x_i' y_i'.$$

Уравнения останутся каноническими.

6. Уравнения также останутся каноническими, если произвести, например, только замену переменных x_1 и y_1 и положить при этом

$$x_1 = \varphi(x_1', y_1'), \qquad y_1 = \psi(x_1', y_1'),$$

взяв за новые переменные x_1' и y_1' вместо x_1 и y_1. Я утверждаю, что уравнения останутся каноническими, если только функциональный определитель, или якобиан, x_1 и y_1 по x_1' и y_1' равен 1. Так, если положить

$$x_1 = \sqrt{2\rho}\cos\omega, \qquad y_1 = \sqrt{2\rho}\sin\omega,$$

то каноническая форма уравнений не будет нарушена и переменные ρ и ω будут сопряженными, как и x_1 и y_1.

7. Выше мы определили замену переменных

$$\frac{dS}{dy_i} = x_i, \qquad \frac{dS}{dh_i} = h_i',$$

которая не нарушает канонической формы уравнений, когда S — какая угодно функция от y_i и h_i. Эта форма также не нарушается, если переставить x_i с y_i и в то же время заменить F на $-F$.

Следовательно, если S — некоторая функция переменных

$$x_1, x_2, \ldots, x_p; \qquad h_1, h_2, \ldots, h_p$$

и если положить

$$y_i = \frac{dS}{dx_i}, \qquad h_i' = \frac{dS}{dh_i},$$

то каноническая форма уравнений не будет нарушена, когда за новые переменные мы возьмем h_i и h_i' и в то же время заменим F на $-F$.

Она также не будет нарушена, если заменить

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \text{ и } F$$

на

$$\lambda y_1, \lambda y_2, \ldots, \lambda y_n \text{ и } \lambda F,$$

где λ — некоторая константа.

Итак, рассмотрим опять функцию S переменных x_i и h_i и положим

$$\lambda y_i = \frac{dS}{dx_i}, \qquad h_i' = \frac{dS}{dh_i},$$

каноническая форма уравнений сохранится, если за новые переменные взять h_i и h_i' и заменить в то же время F на $-\lambda F$.

Кеплеровское движение

8. Применим изложенные выше принципы к кеплеровскому движению.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать единицы выбранными так, что сила притяжения двух единиц массы, удаленных друг от друга на единицу расстояния, равна единице силы, другими словами, что постоянная Гаусса равна единице.

Итак, рассмотрим движение подвижной массы под действием неподвижной массы, расположенной в начале координат и равной M. Пусть x_1, x_2, x_3 — координаты подвижной массы, а y_1, y_2, y_3 — составляющие скорости; если мы положим

$$F = \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{2} - \frac{M}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

то уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{1}$$

В силу п. 3, интегрирование этих уравнений сводится к интегрированию уравнения в частных производных

$$\left(\frac{dS}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dx_2}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dx_3}\right)^2 - \frac{2M}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = 2h, \tag{2}$$

где h — произвольная постоянная. Положим

$$x_1 = r \sin\omega\cos\varphi, \quad x_2 = r \sin\omega\sin\varphi, \quad x_3 = r\cos\omega.$$

Уравнение примет вид

$$\left(\frac{dS}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dS}{d\omega}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\omega}\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2M}{r} + 2h.$$

Можно удовлетворить этому уравнению, введя две произвольные постоянные G и Θ и положив [4]

$$\frac{dS}{d\varphi} = \Theta \sqrt{M}, \qquad \left(\frac{dS}{d\omega}\right)^2 + \frac{\Theta^2 M}{\sin^2\omega} = G^2 M, \qquad \left(\frac{dS}{dr}\right)^2 + \frac{G^2 M}{r^2} = \frac{2M}{r} + 2h. \tag{3}$$

Функция S, определенная таким образом, будет зависеть от r, ω, φ, G, Θ, h или, что то же самое, от x_1, x_2, x_3, G, Θ, h, а общее решение уравнений (1) запишется в виде

$$y_i = \frac{dS}{dx_i}, \qquad h' + t = \frac{dS}{dh}, \qquad g = \frac{dS}{dG}, \qquad \theta = \frac{dS}{d\Theta},$$

где h', g и θ — три новые произвольные постоянные. Если мы положим

$$L = \sqrt{\frac{-M}{2h}}, \qquad h = -\frac{M}{2L^2}, \qquad n = \frac{M}{L^3}, \qquad l = n(t + h'),$$

то сможем записать

$$\frac{dS}{dL} = \frac{dS}{dh}\frac{dh}{dL} = (h' + t)\frac{M}{L^3} = n(h' + t) = l.$$

Тогда будет шесть постоянных интегрирования, а именно:

$$L, G, \Theta, h', g, \theta.$$

Легко установить значение этих постоянных и выразить их в виде функций тех постоянных, которые обычно используются. Если a, e и i обозначают большую полуось, эксцентриситет и наклонение, то

$$L = \sqrt{a}, \qquad G = \sqrt{a(1 - e^2)}, \qquad \Theta = G\cos i.$$

С другой стороны, θ — долгота восходящего узла, $g + \theta$ — долгота перигелия, n — среднее движение, а l — не что иное, как средняя аномалия.

Если на движущуюся массу действует не притяжение массы M, а какие-нибудь другие силы, мы можем построить функцию S и определить шесть новых переменных

$$\begin{matrix} L, G, \Theta \\ l, g, \theta, \end{matrix} \tag{4}$$

являющихся функциями x_i и y_i с помощью следующих уравнений:

$$y_i = \frac{dS}{dx_i}, \qquad \frac{dS}{dL} = l, \quad \frac{dS}{dG} = g, \qquad \frac{dS}{d\Theta} = \theta, \tag{5}$$

причем L, G, Θ, g и θ не будут больше постоянными. Мы можем воспользоваться теперь шестью переменными (4) для определения положения и скорости подвижной массы. Назовем эти переменные (4) *кеплеровскими переменными*. Важно заметить, что определение кеплеровских переменных зависит от начала отсчета координат движущейся массы и от величины M.

Если движущаяся масса является планетой, на которую преимущественно действует масса M, а также различные возмущающие силы, то можно видеть, что кеплеровские переменные являются тем, что астрономы называют *оскулирующими элементами* данной планеты.

В частном случае, когда орбита тела m_1 является плоской, можно принять за новые переменные

$$L = \sqrt{a}, \qquad G = \sqrt{a(1 - e^2)}$$

со средней аномалией l и долготой перигелия g. Число кеплеровских переменных равно тогда четырем.

По поводу использования кеплеровских переменных следует сделать несколько замечаний. Отметим сначала, что старые переменные

$$x_1,\ x_2,\ x_3;\quad y_1,\ y_2,\ y_3$$

и положение тела m_1 не изменяются, когда l, g или θ возрастают на 2π, а остальные переменные не меняются. Таким образом, эти старые переменные являются периодическими функциями переменных l, g и θ.

Затем, всегда должно выполняться соотношение

$$L^2 \geqslant G^2 \geqslant \Theta^2.$$

Наконец, если $G = \pm\,\Theta$, то старые переменные и положение тела m, не зависят больше от θ, а если $L = \pm\,G$, то они не зависят больше от g.

Частный случай задачи трех тел

9. Возвратимся к тому частному случаю задачи трех тел, о котором мы говорили выше.

Две массы, одна равная $1 - \mu$, а вторая μ, описывают две концентрические окружности вокруг их общего центра тяжести, предполагаемого неподвижным. Постоянное расстояние между этими массами взято за единицу длины, так что радиусы двух окружностей соответственно равны μ и $1 - \mu$, а среднее движение равно единице.

Предположим теперь, что в плоскости этих двух окружностей движется третья масса, бесконечно малая и притягиваемая двумя первыми.

Мы возьмем за начало координат O общий центр окружностей и отнесем положение третьей массы к прямоугольной системе двух неподвижных осей Ox_1 и Ox_2 или же к системе двух подвижных осей $O\xi$ и $O\eta$, определенной как в п. 2. Так как среднее движение двух первых масс равно 1, мы

можем предположить, что угол между $O\xi$ и Ox_1 (т. е. долгота массы μ) равен t.

Так как мы предположили, что постоянная Гаусса равна 1, силовая функция сводится к

$$V = \frac{m_1\mu}{r_1} + \frac{m_1(1-\mu)}{r_2},$$

где m_1 — бесконечно малая масса третьего тела, r_1 — расстояние между телами m_1 и μ и r_2 — расстояние между телом m_1 и телом массы $1-\mu$, так что

$$r_1^2 = \eta^2 + (\xi + \mu - 1)^2 = [x_2 - (1-\mu)\sin t]^2 + [x_1 - (1-\mu)\cos t]^2,$$
$$r_2^2 = \eta^2 + (\xi + \mu)^2 = [x_2 + \mu \sin t]^2 + [x_1 + \mu \cos t]^2.$$

Уравнение живых сил запишется тогда в виде

$$\frac{y_1^2}{2m_1} + \frac{y_2^2}{2m_1} - V = \text{const}.$$

Условимся обозначать через $-m_1R$ левую часть этого уравнения, где R — функция от x_1, x_2, y_1, y_2 и t; тогда уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{d(m_1R)}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{d(m_1R)}{dy_2},$$
$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{d(m_1R)}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = \frac{d(m_1R)}{dx_2}.$$

Заменим переменные x_1, y_1, x_2, y_2 их значениями в виде функций от кеплеровских переменных L, G, l, g так, как это было описано в предыдущем пункте. Тогда R станет функцией L, G, l, g и t и уравнения движения примут вид

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dR}{dl}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{dR}{dL},$$
$$\frac{dG}{dt} = \frac{dR}{dg}, \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{dR}{dG}.$$

Эти уравнения уже имели бы канонический вид, если бы R зависело лишь от четырех кеплеровских переменных, но R также является функцией t, следовательно, надо преобразовать эти уравнения таким образом, чтобы время не входило в них в явном виде. Для этого посмотрим, как R зависит от t.

Легко видеть, что R можно рассматривать как функцию L, G, l и $g - t$. Действительно, если увеличить g и t на одну и ту же величину, не изменяя остальных переменных, то ни ξ, ни η, ни r_1, ни r_2, ни $y_1^2 + y_2^2$, ни, следовательно, R не изменятся.

Из этого вытекает, что

$$\frac{dR}{dt} + \frac{dR}{dg} = 0.$$

Тогда, если мы положим

$$x_1' = L, \qquad x_2' = G,$$
$$y_1' = l, \qquad y_2' = g - t,$$
$$F' = R + G,$$

то F' будет зависеть лишь от x_1', x_2', y_1' и y_2', и уравнения движения, которые запишутся в виде

$$\frac{dx_i'}{dt} = \frac{dF'}{dy_i'}, \qquad \frac{dy_i'}{dt} = -\frac{dF'}{dx_i'}, \tag{1}$$

будут каноническими.

Именно в такой форме мы обычно будем записывать уравнения этой задачи.

Если предположить, что масса μ равна нулю, то масса $1 - \mu$ станет равной единице и переместится в начало координат; r_2 сведется к $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, силовая функция V сведется к m_1/r_2. Тогда мы найдем, что

$$R = \frac{1}{2a} = \frac{1}{2L^2} = \frac{1}{2x_1'^2}$$

и

$$F' = \frac{1}{2x_1'^2} + x_2'.$$

Когда масса μ не равна нулю, сразу видно, что F' можно разложить в ряд по возрастающим степеням μ, что позволит нам написать

$$F' = F_0 + \mu F_1 + \ldots.$$

Мы видим также, что

$$F_0 = \frac{1}{2x_1'^2} + x_2'$$

и не зависит от y_1' и y_2'.

Более того, F_1 будет зависеть от всех четырех переменных, но эта функция будет периодической по y_1' и y_2' и не изменится, когда любая из этих переменных возрастет на 2π.

Заметим, наконец, что если $x_1' = +x_2'$, эксцентриситет равен нулю, движение прямое и F_1 зависит только от x_1', x_2' и $y_1' + y_2'$.

Если же $x_1' = -x_2'$, то эксцентриситет равен нулю, но движение тогда обратное и F_1 зависит теперь лишь от x_1', x_2' и $y_1' - y_2'$.

Использование кеплеровских переменных

10. Пусть x_1, x_2, x_3 — прямоугольные координаты точки; y_1, y_2, y_3 — составляющие ее скорости; m — ее масса.

Пусть Vm — силовая функция, так что составляющие силы, приложенной к рассматриваемой точке, равны

$$m\frac{dV}{dx_1}, \quad m\frac{dV}{dx_2}, \quad m\frac{dV}{dx_3}.$$

Если мы положим

$$F = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - V,$$

то уравнения движения точки примут канонический вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

В п. 8. мы определили некоторую функцию

$$S(x_1, x_2, x_3, G, \Theta, L).$$

Мы видели, что если сделать замену переменных, определенную уравнениями

$$\frac{dS}{dx_i} = y_i, \quad \frac{dS}{dG} = g, \quad \frac{dS}{d\Theta} = \theta, \quad \frac{dS}{dL} = l,$$

новые переменные являются не чем иным, как кеплеровскими переменными, которые мы только что определили.

В силу теоремы п. 7 уравнения сохранят канонический вид и запишутся как

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{dF}{dl}, \quad \frac{dG}{dt} = -\frac{dF}{dg}, \quad \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{dF}{d\theta},$$
$$\frac{dl}{dt} = \frac{dF}{dL}, \quad \frac{dg}{dt} = \frac{dF}{dG}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{dF}{d\Theta}.$$

Может случиться, что сила постоянно остается в плоскости x_1x_2, и подвижная точка тоже остается в этой плоскости.

В этом случае постоянно будет

$$G = \Theta$$

и функция F будет зависеть только от G, L, l и от долготы перигелия $g + \theta = \varpi$; мы будем иметь

$$\frac{dF}{dg} = \frac{dF}{d\theta} = \frac{dF}{d\varpi}.$$

Для сохранения симметрии мы положим

$$G = \Theta = \Pi;$$

число кеплеровских переменных сократится от шести до четырех, а именно, Π, L, $\tilde{\omega}$ и l и уравнения примут вид

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{dF}{dl}, \qquad \frac{d\Pi}{dt} = -\frac{dF}{d\tilde{\omega}},$$
$$\frac{dl}{dt} = \frac{dF}{dL}, \qquad \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{dF}{d\Pi}.$$

Общий случай задачи трех тел

11. Перейдем к общему случаю задачи трех тел. Пусть ABC — треугольник, образованный тремя телами; a, b, c — стороны этого треугольника; m_1, m_2, m_3 — массы трех тел.

Силовая функция запишется в виде

$$\frac{m_2m_3}{a} + \frac{m_3m_1}{b} + \frac{m_1m_2}{c}.$$

Будем обозначать силовую функцию через $V\mu$, где μ — некоторая постоянная, которую мы более полно определим позднее.

Я буду предполагать, что центр тяжести системы трех тел неподвижен и обозначу через D центр тяжести системы двух тел A и B.

Я буду рассматривать две системы подвижных осей.

Первая система, оси которой всегда параллельны неподвижным осям, имеет своим началом точку A.

Вторая система, также с осями, параллельными неподвижным осям, имеет своим началом точку D.

Я обозначу через x_1, x_2, x_3 координаты точки B относительно первых подвижных осей и через x_4, x_5 и x_6 — координаты точки C относительно второй системы подвижных осей. Полная живая сила системы будет тогда иметь вид

$$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{dx_1^2}{dt^2} + \frac{dx_2^2}{dt^2} + \frac{dx_3^2}{dt^2}\right) + \frac{(m_1+m_2)m_3}{m_1+m_2+m_3}\left(\frac{dx_4^2}{dt^2} + \frac{dx_5^2}{dt^2} + \frac{dx_6^2}{dt^2}\right)$$

(см. Tisserand. Mécanique céleste, chap. IV) [5]; если мы положим

$$\beta\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}, \qquad \beta'\mu = \frac{(m_1+m_2)m_3}{m_1+m_2+m_3},$$
$$F = \frac{T}{\mu} - V = \frac{y_1^2+y_2^2+y_3^2}{2\beta} + \frac{y_4^2+y_5^2+y_6^2}{2\beta'} - V,$$

$$y_1 = \beta \frac{dx_1}{dt}, \quad y_2 = \beta \frac{dx_2}{dt}, \quad y_3 = \beta \frac{dx_3}{dt},$$
$$y_4 = \beta' \frac{dx_4}{dt}, \quad y_5 = \beta' \frac{dx_5}{dt}, \quad y_6 = \beta' \frac{dx_6}{dt},$$

то уравнения примут канонический вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

Снова рассмотрим функцию

$$S(x_1\, x_2,\, x_3;\, L,\, G,\, \Theta),$$

определенную уравнениями (5) из п. 8.

Сначала построим ее, взяв

$$M = m_1 + m_2.$$

Положим затем

$$\frac{dS}{dL} = l, \quad \frac{dS}{dG} = g, \quad \frac{dS}{d\Theta} = \theta. \tag{1}$$

Построим затем эту же функцию S, приняв

$$M = m_1 + m_2 + m_3;$$

обозначим таким образом построенную функцию

$$S'(x_4,\, x_5,\, x_6;\, L',\, G',\, \Theta')$$

и положим

$$\frac{dS'}{dL'} = l', \quad \frac{dS'}{dG'} = g', \quad \frac{dS'}{d\Theta'} = \theta'. \tag{2}$$

Пусть затем

$$\Sigma = \beta S + \beta' S'.$$

Производными Σ по L, G, Θ, L', G', Θ' будут соответственно βl, βg, $\beta\theta$, $\beta' l'$, $\beta' g'$, $\beta'\theta'$.

Если, кроме того, положим

$$y_i = \frac{d\Sigma}{dx_i}, \tag{3}$$

то уравнения (1), (2) и (3) будут определять двенадцать старых переменных x и y как функции двенадцати новых переменных, которые я разделю на два ряда следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc} \beta L, & \beta G, & \beta\Theta, & \beta' L', & \beta' G', & \beta'\Theta', \\ l, & g, & \theta, & l', & g', & \theta'. \end{array} \tag{4}$$

Тогда из теорем пунктов 4 и 7 следует, что канонический вид уравнений не изменится.

Легко дать себе отчет в значении этих новых переменных.

Все происходит так, как будто две массы, равные соответственно $\beta\mu$ и $\beta'\mu$, имеют по отношению к *неподвижным* осям координаты: первая — x_1, x_2, x_3, вторая — x_4, x_5, x_6, и как будто эти фиктивные массы подвержены действию сил, допускающих силовую функцию $V\mu$.

Тогда если бы в некоторый момент силы, приложенные к первой фиктивной массе, исчезли и были заменены притяжением массы $m_1 + m_2$, помещенной в начале координат, эта масса двигалась бы по закону Кеплера и элементами этого кеплеровского движения были L, G, Θ, l, g и 0.

Точно так же, если бы вторая фиктивная масса была подвержена лишь притяжению неподвижной массы $m_1 + m_2 + m_3$, расположенной в начале координат, элементами кеплеровского движения были бы L', G', Θ', l', g' и θ'.

Заметим, что F зависит не только от переменных (4), но и от m_1, m_2, m_3 и μ.

Вообще, m_2 и m_3 будут очень малы, так что можно положить

$$m_2 = \alpha_2\mu, \quad m_3 = \alpha_3\mu,$$

где μ мало и α_2, α_3, β и β' — чаще всего конечные величины. Тогда функцию F, которую можно рассматривать как функцию переменных (4) и m_1, α_2, α_3 и μ, можно будет с пользой для дела разложить в ряд по возрастающим степеням μ

$$F = F_0 + F_1\mu + \ldots.$$

Если положить $\mu = 0$, получим

$$V = \frac{\alpha_3 m_1}{b} + \frac{\alpha_2 m_1}{c}, \quad \beta = \alpha_2, \quad \beta' = \alpha_3$$

и

$$F = F_0 = \frac{\beta^3}{2(\beta L)^2} + \frac{\beta'^3}{2(\beta' L')^2} = \frac{\alpha_2^3}{2(\beta L)^2} + \frac{\alpha_3^3}{2(\beta' L')^2},$$

причем F больше не зависит ни от одной переменной второго ряда l, g, θ, l', g', θ'. Добавим еще, что каково бы ни было μ, F является периодической функцией периода 2π по отношению к этим переменным второго ряда.

Остановимся вкратце на некоторых частных случаях. Если три тела остаются постоянно в плоскости x_1, x_2, то мы имеем $G = \Theta$, $G' = \Theta'$ и F зависит лишь от $g + \theta$ и $g' + \theta'$, так что мы будем иметь только четыре пары сопряженных переменных

$$\begin{array}{llll} \beta L, & \beta G = \beta\Theta = \beta\Pi, & \beta' L', & \beta' G' = \beta'\Theta' = \beta'\Pi', \\ l, & g + \theta = \varpi, & l', & g' + \theta' = \varpi', \end{array}$$

как было сказано в п. 10.

12. Вернемся к обозначениям п. 11 и уравнениям этого пункта. Я представляю эти уравнения в новой форме, которая будет нам полезна в дальнейшем.

Рассмотрим сначала частный случай, когда наклонения равны нулю и три тела движутся в одной плоскости.

Полагаем

$$\begin{aligned} \beta L &= \Lambda, & \beta\Pi &= \Lambda - H, & l + \varpi &= \lambda, & \varpi &= -h, \\ \beta' L' &= \Lambda', & \beta'\Pi' &= \Lambda' - H', & l' + \varpi' &= \lambda', & \varpi' &= -h'. \end{aligned} \tag{1}$$

Получаем

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{dF}{d(\beta L)} - \frac{dF}{d(\beta\Pi)} = -\frac{dF}{d\Lambda}\frac{dh}{dt} = \frac{dF}{d(\beta\Pi)} = -\frac{dF}{dH},$$

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{dF}{dl} = \frac{dF}{d\lambda}, \qquad \frac{dH}{dt} = \frac{dF}{dl} - \frac{dF}{d\varpi} = \frac{dF}{dh}.$$

Таким образом, мы видим, что новые переменные Λ, H, Λ', H', λ, h, λ', h' также сопряжены и, следовательно, замена переменных (1) не изменяет канонического вида уравнений.

Перейдем теперь к общему случаю и вернемся снова к обозначениям п. 11.

Положим

$$\begin{aligned} \beta L &= \Lambda, & \beta G &= \Lambda - H, & \beta\Theta &= \Lambda - H - Z, \\ \beta' L' &= \Lambda', & \beta' G' &= \Lambda' - H', & \beta'\Theta' &= \Lambda' - H' - Z', \\ \lambda &= l + g + \theta, & h &= -g - \theta, & \zeta &= -\theta, \\ \lambda' &= l' + g' + \theta', & h' &= -g' - \theta', & \zeta' &= -\theta'. \end{aligned} \tag{2}$$

Можно убедиться, как это делалось выше, что эта замена переменных (2) не нарушает канонической формы уравнений.

Эта каноническая форма не изменится также, в силу замечания п. 6, если мы произведем замену

$$\begin{aligned} \sqrt{2H}\cos h &= \xi, & \sqrt{2H}\sin h &= \eta, \\ \sqrt{2H'}\cos h' &= \xi', & \sqrt{2H'}\sin h' &= \eta', \\ \sqrt{2Z}\cos\zeta &= p, & \sqrt{2Z}\sin\zeta &= q, \\ \sqrt{2Z'}\cos\zeta' &= p', & \sqrt{2Z'}\sin\zeta' &= q'. \end{aligned} \tag{3}$$

Уравнения остаются каноническими, а два ряда сопряженных переменных будут следующие:

$$\begin{aligned} &\Lambda, \ \Lambda', \ \xi, \ \xi', \ p, \ p', \\ &\lambda, \ \lambda', \ \eta, \ \eta', \ q, \ q'. \end{aligned} \tag{4}$$

Вот какое преимущество может дать выбор переменных (4).

Функция F, выраженная через эти переменные, разложима как по степеням переменных ξ, ξ', η, η', p, p', q, q', так и по синусам и косинусам углов, кратных λ и λ', причем коэффициенты зависят некоторым образом от Λ и Λ'.

Действительно, по определению предыдущих переменных имеем

$$H = \Lambda(1 - \sqrt{1 - e^2}), \qquad Z = \beta G(1 - \cos i).$$

Отсюда вытекает:

1. H разложимо по степеням e^2, причем первый член разложения содержит e^2;
2. e^2 разложимо по степеням H, причем первый член содержит H;
3. $e/\sqrt{H}$ разложимо по степеням H;
4. i^2 разложимо по степеням $Z/\beta G = Z/(\Lambda - H)$;
5. $i/\sqrt{Z}$ разложимо по степеням $Z/(\Lambda - H)$ и, следовательно, по степеням Z и H.

Но мы имеем

$$\frac{e}{\sqrt{H}} = \frac{e\cos h\sqrt{2}}{\xi} = \frac{e\sin h\sqrt{2}}{\eta}, \qquad \frac{i}{\sqrt{Z}} = \frac{i\cos\zeta\sqrt{2}}{p} = \frac{i\sin\zeta\sqrt{2}}{q}.$$

Значит $e\cos h$, $e\sin h$, $i\cos\zeta$, $i\sin\zeta$ разложимы по степеням ξ, η, p и q; также $e'\cos h'$, $e'\sin h'$, $i'\cos\zeta'$, $i'\sin\xi'$ разложимы по степеням ξ', η', p' и q'.

Но вид разложения возмущающей функции хорошо известен. Она разложима по возрастающим степеням эксцентриситетов и наклонений и по косинусам углов, кратных λ, λ', h, h', ζ, ζ'; при этом каждый член разложения имеет следующий вид (T i s s e r a n d. Mécanique céleste, t. 1, p. 307) [6]:

$$Ne^{\mu_3}e'^{\mu_4}i^{\mu_5}i'^{\mu_6}\cos(m_1\lambda + m_2\lambda' + m_3h + m_4h' + m_5\zeta + m_6\zeta'),$$

где μ_i — целые положительные или равные нулю числа и m_i — некоторые целые числа. Кроме того, имеем

$$\mu_i = |m_i| + \text{четное число}$$

и, с другой стороны,

$$m_1 + m_2 = m_3 + m_4 + m_5 + m_6.$$

Из этого можно заключить, что возмущающая функция разложима по степеням

$$e\cos h, \quad e\sin h, \quad i\cos\zeta, \quad i\sin\zeta,$$
$$e'\cos h', \quad e'\sin h', \quad i'\cos\zeta', \quad i'\sin\zeta',$$

и, следовательно, по степеням

$$\xi,\ \xi',\ \eta,\ \eta',\ p,\ p',\ q,\ q'. \tag{5}$$

Кроме того, можно заметить, что разложения

$$\frac{e\cos h}{\xi},\quad \frac{e\sin h}{\eta},\quad \frac{i\cos\zeta}{p},\quad \frac{i'\sin\zeta}{q},\ \ldots$$

содержат лишь четные степени переменных (5); отсюда заключаем, что разложение функции F будет иметь следующий вид:

$$\sum N\xi^{\mu_3}\eta^{\nu_3}\xi'^{\mu_4}\eta'^{\nu_4}p^{\mu_5}q^{\nu_5}p'^{\mu_6}q'^{\nu_6}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(m_1\lambda + m_2\lambda'), \tag{6}$$

где N — коэффициент, зависящий лишь от Λ и Λ'.

Числа μ_i, ν_i — целые, положительные или нули, сумма которых

$$\mu_3 + \nu_3 + \mu_4 + \nu_4 + \mu_5 + \nu_5 + \mu_6 + \nu_6$$

равна $|m_1 + m_2| +$ четное положительное число или нуль.

Я оставил в выражении (6) двойной символ cos или sin; косинус надо брать, когда сумма

$$\nu_3 + \nu_4 + \nu_5 + \nu_6$$

четная и синус — в противном случае.

Отсюда следует, что функция F не изменяется, когда изменяют одновременно знак λ, η и q, она не изменяется также, когда заменяют λ и λ' на $\lambda + \pi$ и $\lambda' + \pi$ и в то же время изменяют знак ξ, η, p и q.

Функция F обладает другим свойством, на которое необходимо обратить внимание: она не изменяется, когда меняют одновременно знак p, p', q и q'.

Основная задача динамики

13. Мы пришли к следующей задаче:
изучить канонические уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i},\qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \tag{1}$$

в предположении, что функция F может быть разложена по степеням малого параметра μ следующим образом:

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \cdots.$$

Кроме того, предполагается, что F_0 зависит лишь от x и не зависит от y и что F_1, F_2, ... являются периодическими функциями периода 2π по y.

Приведение канонических уравнений

14. Мы видели, что интегрирование уравнений (1) предыдущего пункта может быть сведено к интегрированию уравнения в частных производных

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \frac{dS}{dx_1}, \frac{dS}{dx_2}, \ldots, \frac{dS}{dx_p}\right) = \text{const}. \tag{2}$$

Представим себе, что известен интеграл уравнений (1) предыдущего пункта и что этот интеграл записывается в виде

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_p; y_1, y_2, \ldots, y_p) = \text{const};$$

это означает, что справедливо тождество

$$[F, F_1] = 0. \tag{3}$$

Я намерен показать, что знание этого интеграла позволяет понизить на единицу число степеней свободы.

Действительно, уравнение (3) означает, что существует бесконечное число функций S, удовлетворяющих одновременно уравнению (1) и уравнению

$$F_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \frac{dS}{dx_1}; \frac{dS}{dx_2}, \ldots, \frac{dS}{dx_p}\right) = \text{const}. \tag{4}$$

Установив это, исключим из уравнений (1) и (4) dS/dx_1; получим

$$\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \frac{dS}{dx_2}, \frac{dS}{dx_3}, \ldots, \frac{dS}{dx_p}\right) = 0. \tag{5}$$

Производная dS/dx_1 не входит в уравнение (5); ничто теперь не мешает нам рассматривать x_1 не как переменную, а как произвольный параметр; уравнение (5) тогда становится уравнением в частных производных всего с $p - 1$ независимыми переменными.

Таким образом, задача сводится к интегрированию уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{d\Phi}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx_i} \qquad (i = 2, 3, \ldots, p),$$

которые являются каноническими уравнениями всего с $p - 1$ степенями свободы.

Таким образом, если знание интеграла системы дифференциальных уравнений позволяет понизить порядок системы на единицу, то если эта система каноническая, можно понизить ее порядок на две единицы.

Возьмем в качестве примера задачу о движении тяжелого тела, подвешенного в неподвижной точке. Мы видели, что эта задача обладает тре-

мя степенями свободы, но нам известен один интеграл (интеграл площадей), следовательно, число степеней свободы может быть уменьшено до двух.

Что произойдет теперь, когда будет известен не один, а q интегралов уравнений (1) предыдущего пункта? Пусть

$$F_1, F_2, \ldots, F_q$$

— эти q интегралов, так что

$$[F, F_1] = [F, F_2] = \ldots = [F, F_q] = 0.$$

Можно ли при помощи этих интегралов понизить число степеней свободы на q единиц? В общем случае это не так; для этого надо, чтобы $q + 1$ уравнений в частных производных

$$F = \text{const}, \quad F_1 = \text{const}, \quad F_2 = \text{const}, \ \ldots, \ F_q = \text{const} \tag{6}$$

были совместными, что требует выполнения условий

$$[F_i, F_k] = 0 \quad (i, k = 1, 2, \ \ldots, \ q). \tag{7}$$

Если условия (7) выполнены, то можно исключить из уравнений (6) производные

$$\frac{dS}{dx_1}, \frac{dS}{dx_2}, \ldots, \frac{dS}{dx_q}$$

и мы придем к одному уравнению в частных производных

$$\Phi = 0,$$

не содержащему этих q производных. В этом уравнении независимыми можно будет считать только $p - q$ переменных $x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots, x_p$, рассматривая q первых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_q$ как произвольные параметры.

Таким образом, мы получим приведенную систему канонических уравнений, обладающую не более чем $p - q$ степенями свободы.

Например, возьмем опять задачу трех тел, сохраняя обозначения начала п. 2. Мы видели, что число степеней свободы равно девяти.

Но мы имеем три первых интеграла движения центра тяжести, которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} F_1 &= y_1 + y_4 + y_7 = \text{const}, \\ F_2 &= y_2 + y_5 + y_8 = \text{const}, \\ F_3 &= y_3 + y_6 + y_9 = \text{const}. \end{aligned} \tag{8}$$

Легко проверяется, что

$$[F_2, F_3] = [F_3, F_1] = [F_1, F_2] = 0.$$

Следовательно, число степеней свободы может быть уменьшено до шести.

Если ограничиться плоским случаем задачи трех тел, первоначальное число степеней свободы равно лишь шести. Но имеется только два интеграла, подобных (8). Поэтому после приведения останутся только четыре степени свободы.

Представим себе теперь, что кроме q интегралов $F_1, F_2, \ldots, F_q$ нам известен еще один интеграл F_{q+1}. Можно ли вывести отсюда интеграл приведенной системы? Этот вопрос можно сформулировать иначе.

Известно уравнение в частных производных

$$F_{q+1} = \text{const},$$

совместное с уравнением

$$F = \text{const}.$$

Будет ли оно совместно с системой (6)?

Сразу видно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$[F, F_{q+1}] = [F_1, F_{q+1}] = \ldots = [F_q, F_{q+1}] = 0.$$

Вернемся, например, к задаче трех тел и рассмотрим три интеграла площадей

$$\begin{aligned} F_4 &= x_2y_3 - x_3y_2 + x_5y_6 - x_6y_5 + x_8y_9 - x_9y_8 = \text{const}, \\ F_5 &= x_3y_1 - x_1y_3 + x_6y_4 - x_4y_6 + x_9y_7 - x_7y_9 = \text{const}, \\ F_6 &= x_1y_2 - x_2y_1 + x_4y_5 - x_5y_4 + x_7y_8 - x_8y_7 = \text{const}. \end{aligned} \tag{9}$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} &[F_1, F_4] = 0, \quad [F_2, F_4] = +F_3, \quad [F_3, F_4] = -F_2, \\ &[F_1, F_5] = -F_3, \quad [F_2, F_5] = 0, \quad [F_3, F_5] = +F_1, \\ &[F_1, F_6] = +F_2, \quad [F_2, F_6] = -F_1, \quad [F_3, F_6] = 0. \end{aligned}$$

Не нарушая общности, можно предположить, что центр тяжести неподвижен, т. е. что входящие в правые части уравнений (8) константы все равны нулю. Тогда

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0$$

и, следовательно,

$$[F_i, F_k] = 0 \quad (i = 1, 2, 3; \ k = 4, 5, 6),$$

откуда видно, что интегралы площадей являются также интегралами приведенной системы.

В заключение я попытаюсь понизить насколько возможно число степеней свободы в задаче трех тел, учитывая одновременно интегралы центра тяжести и интегралы площадей.

В частном случае, когда три тела движутся в плоскости, мы видели, что число степеней свободы может быть сведено к четырем, если учитывать уравнения (8). Таким образом, приведенная задача допускает еще один интеграл (интеграл площадей), что позволяет понизить число степеней свободы до трех.

В общем случае легко видеть, что

$$[F_4, F_5] = F_6, \quad [F_5, F_6] = F_4, \quad [F_6, F_4] = F_5.$$

Поскольку эти три скобки не равны нулю, знание трех интегралов площадей не позволяет понизить до трех число степеней свободы. Однако легко видеть, что всякий раз, когда каноническая система будет допускать три интеграла F_4, F_5, F_6, то всегда можно будет найти две комбинации этих интегралов

$$\varphi(F_4, F_5, F_6),$$
$$\psi(F_4, F_5, F_6),$$

такие, что

$$[\varphi, \psi] = 0,$$

а это позволит понизить число степеней свободы на две единицы.

В рассматриваемом нами случае эти комбинации можно найти немедленно; достаточно взять F_4 и

$$\varphi = F_4^2 + F_5^2 + F_6^2.$$

Тогда будет тождественно выполняться условие

$$[\varphi, F_4] = 0.$$

Таким образом, после всех приведений останется лишь четыре степени свободы.

Если вспомнить, что каноническая система с p степенями свободы может быть приведена к системе порядка $2p - 2$, то можно заключить, что задача трех тел, которой в общем случае соответствуют четыре степени свободы, может быть приведена к системе шестого порядка.

В случае плоского движения она имеет три степени свободы и может быть приведена к системе четвертого порядка.

В частном случае п. 9 она имеет две степени свободы и может быть приведена к системе второго порядка.

Приведение задачи трех тел

15. Речь идет о том, как это приведение проделать эффективно.

Рассмотрим сначала случай, когда три тела движутся в одной плоскости. Мы видели, что число степеней свободы может быть тогда понижено до трех. Попытаемся фактически выполнить это приведение.

Мы видели, что уравнения движения можно записать в виде:

$$\frac{dL}{dt}=\frac{dF}{\beta dl},\qquad \frac{d\Pi}{dt}=\frac{dF}{\beta d\varpi},\qquad \frac{dL'}{dt}=\frac{dF}{\beta' dl'},\qquad \frac{d\Pi'}{dt}=\frac{dF}{\beta' d\varpi'},$$
$$\frac{dl}{dt}=-\frac{dF}{\beta dL},\qquad \frac{d\varpi}{dt}=-\frac{dF}{\beta d\Pi},\qquad \frac{dl'}{dt}=-\frac{dF}{\beta' dL'},\qquad \frac{d\varpi'}{dt}=-\frac{dF}{\beta' d\Pi'}.$$

Кроме того,

$$\frac{dF}{d\varpi}+\frac{dF}{d\varpi'}=0,$$

откуда получаем интеграл площадей

$$\beta\Pi+\beta'\Pi'=C,$$

где C — постоянная. Положим

$$\beta\Pi=H,\qquad \beta'\Pi'=C-H,\qquad \varpi-\varpi'=h,$$

откуда (если заменить Π и Π' их значениями в виде функций от C и H) получим

$$\frac{dF}{dH}=\frac{dF}{\beta d\Pi}-\frac{dF}{\beta' d\Pi'},\qquad \frac{dF}{dh}=\frac{dF}{d\varpi}=-\frac{dF}{d\varpi'} \tag{1}$$

и уравнения движения примут вид

$$\frac{d(\beta L)}{dt}=\frac{dF}{dl},\qquad \frac{d(\beta' L')}{dt}=\frac{dF}{dl'},\qquad \frac{dH}{dt}=\frac{dF}{dh},$$
$$\frac{dl}{dt}=-\frac{dF}{d(\beta L)},\qquad \frac{dl'}{dt}=-\frac{dF}{d(\beta' L')},\qquad \frac{dh}{dt}=-\frac{dF}{dH}.$$

Осталось лишь три степени свободы.

16. Перейдем к общему случаю, когда число степеней свободы должно быть понижено до четырех. Уравнения тогда имеют вид

$$\frac{dL}{dt}=\frac{dF}{\beta dl},\qquad \frac{dG}{dt}=\frac{dF}{\beta dg},\qquad \frac{d\Theta}{dt}=\frac{dF}{\beta d\theta},$$
$$\frac{dL'}{dt}=\frac{dF}{\beta' dl'},\qquad \frac{dG'}{dt}=\frac{dF}{\beta' dg'},\qquad \frac{d\Theta'}{dt}=\frac{dF}{\beta' d\theta'},$$
$$\frac{dl}{dt}=-\frac{dF}{\beta dL},\qquad \frac{dg}{dt}=-\frac{dF}{\beta dG},\qquad \frac{d\theta}{dt}=-\frac{dF}{\beta d\Theta},$$
$$\frac{dl'}{dt}=-\frac{dF}{\beta' dL'},\qquad \frac{dg'}{dt}=-\frac{dF}{\beta' dG'},\qquad \frac{d\theta'}{dt}=-\frac{dF}{\beta' d\Theta'}.$$

Кроме того, имеются три интеграла площадей, которые, если взять в качестве первой координатной плоскости плоскость максимума площа-

дей, записываются в виде

$$\beta\Theta + \beta'\Theta', = C, \qquad \theta = \theta',$$
$$\beta^2 (G^2 - \Theta^2) = \beta'^2 (G'^2 - \Theta'^2).$$

Кроме того, имеем

$$\frac{dF}{d\theta} + \frac{dF}{d\theta'} = 0,$$

откуда видно, что F зависит не от θ и θ', а лишь от их разности, но так как эта разность равна нулю в силу интегралов площадей, F можно рассматривать как функцию, не зависящую ни от θ, ни от θ'.

Так же находим

$$\theta = \theta',$$

откуда

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta'}{dt}$$

и

$$\frac{dF}{\beta d\Theta} = \frac{dF}{\beta' d\Theta'}. \tag{2}$$

Положим теперь

$$G = \Gamma, \qquad G' = \Gamma',$$

откуда

$$\beta\Theta + \beta'\Theta' = C, \qquad \beta^2\Gamma^2 - \beta'^2\Gamma'^2 = C(\beta\Theta - \beta'\Theta') \tag{3}$$

и

$$\beta\Theta = \frac{C}{2} + \frac{\beta^2\Gamma^2}{2C} - \frac{\beta'^2\Gamma'^2}{2C}, \qquad \beta'\Theta' = \frac{C}{2} + \frac{\beta'^2\Gamma'^2}{2C} - \frac{\beta^2\Gamma^2}{2C}, \tag{4}$$

откуда

$$\frac{dF}{d\Gamma} = \frac{dF}{dG}\frac{dG}{d\Gamma} + \frac{dF}{d\Theta}\frac{d\Theta}{d\Gamma} + \frac{dF}{d\Theta'}\frac{d\Theta'}{d\Gamma}$$

или

$$\frac{dF}{d\Gamma} = \frac{dF}{dG} + \frac{dF}{d\Theta}\frac{\beta\Gamma}{C} - \frac{dF}{d\Theta'}\frac{\beta^2\Gamma}{\beta' C},$$

или, наконец, в силу уравнения (2)

$$\frac{dF}{d\Gamma} = \frac{dF}{dG}$$

и также

$$\frac{dF}{d\Gamma'} = \frac{dF}{dG'}.$$

Постоянную площадей C можно считать заданной. Следовательно, если в F заменить G, G', Θ и Θ' их значениями (3) и (4), F будет зависеть лишь от L, L', l, l', g, g', Γ и Γ', и уравнения движения можно будет записать в виде

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dF}{\beta dl}, \qquad \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{dF}{\beta dg}, \qquad \frac{dL'}{dt} = \frac{dF}{\beta' dl'}, \qquad \frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{dF}{\beta' dg'};$$

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{dF}{\beta dL}, \qquad \frac{dg}{dt} = -\frac{dF}{\beta d\Gamma}, \qquad \frac{dl'}{dt} = -\frac{dF}{\beta' dL'}, \qquad \frac{dg'}{dt} = -\frac{dF}{\beta' d\Gamma'}.$$

Так что остается лишь четыре степени свободы.

Вид возмущающей функции

17. Важно установить, каков вид функции F, когда применяются переменные двух предыдущих пунктов. Предположим сначала, что берутся переменные п. 15 и что три тела движутся в одной и той же плоскости; функцию, зависящую лишь от расстояний между тремя телами, можно будет разложить по косинусам и синусам углов, кратных $l - l' + h$, коэффициенты этого разложения сами будут разложимы по возрастающим степеням

$$e\cos l, \quad e\sin l, \quad e'\cos l', \quad e'\sin l',$$

где через e и e' обозначены эксцентриситеты. Наконец, коэффициенты этих новых разложений сами будут однозначными функциями от L и L'.

Положим для краткости

$$\beta L = \Lambda, \qquad \beta' L' = \Lambda';$$

отсюда вытекает в силу определения H, что

$$e = \frac{1}{\Lambda}\sqrt{\Lambda^2 - H^2}, \qquad e' = \frac{1}{\Lambda'}\sqrt{\Lambda'^2 - (H' - C)^2}.$$

Добавим, что F не изменяется, когда l, l' и h меняют знак. Следовательно, разложение F по косинусам и синусам углов, кратных этим трем переменным, может содержать только косинусы.

Следовательно, окончательно мы имеем

$$F = \Sigma A\,(\Lambda^2 - H^2)^{\frac{p}{2}}\,[\Lambda'^2 - (H - C)^2]^{\frac{q}{2}}\cos(m_1 l + m_2 l' + m_3 h),$$

где p и q — положительные целые числа, m_1, m_2, m_3 — произвольные целые числа и A — коэффициент, зависящий лишь от Λ и Λ'. Кроме того, $|m_3 - m_1|$ не превышает p и может от него отличаться лишь на четное число; точно так же $|m_3 + m_2|$ не превышает q и может от него отличаться лишь на четное число.

Такое разложение пригодно, когда $\Lambda - H$ и $\Lambda' - (C - H)$ достаточно малы; мы видим, что для

$$\Lambda = H$$

все члены, кроме тех, для которых $m_3 = m_1$, обращаются в нуль.

Подобным образом для

$$\Lambda' = C - H$$

все члены обращаются в нуль, за исключением тех, для которых $m_3 = -m_2$.

Следовательно, если имеем одновременно

$$\Lambda = H, \quad \Lambda' = C - H,$$

то все члены обращаются в нуль, за исключением тех, для которых $m_3 = m_1 = -m_2$, так что F становится функцией от $l - l' + h$.

Если в одном из членов разложения F положить

$$\Lambda = -H, \quad \Lambda' = H - C,$$

то этот член также обратится в нуль, кроме случая $m_3 = m_1 = -m_2$. Можно было бы подумать, что при

$$\Lambda = -H, \quad \Lambda' = H - C$$

F все еще является функцией от $l - l' + h$, но это вовсе не так, потому что наше разложение пригодно лишь для малых значений $\Lambda - H$ и $\Lambda' - C + H$. Рассуждение, аналогичное только что приведенному, доказывает, напротив, что для $\Lambda = -H$, $\Lambda' = H - C$ F является функцией от $l - l' - h$, а не от $l - l' + h$.

В случае, когда величина $\Lambda - H$ крайне мала, может быть выгодно сделать специальную замену переменных.

Тождественно выполняется равенство

$$\Lambda l + Hh = \Lambda (l + h) - h (\Lambda - H),$$

поэтому в силу п. 5 канонический вид уравнений не нарушится, если заменить переменные

$$\Lambda, \Lambda', H,$$
$$l, l', h$$

переменными

$$\Lambda, \Lambda', \Lambda - H,$$
$$l + h, l', -h.$$

Положим теперь

$$l + h = \lambda^*, \qquad \sqrt{2(\Lambda - H)} \cos h = \xi^*, \qquad -\sqrt{2(\Lambda - H)} \sin h = \eta^*.$$

В силу п. 6 канонический вид уравнений продолжает сохраняться, если за переменные взять

$$\Lambda, \Lambda', \xi^*,$$
$$\lambda^*, l', \eta^*.$$

Эти переменные имеют то преимущество, что функция F, оставаясь периодической по λ^* и l', разлагается в ряд по степеням ξ^* и η^*, когда эти переменные достаточно малы.

18. Возьмем теперь переменные п. 16, т. е.

$$\begin{matrix} \beta L = \Lambda, & \beta' L' = \Lambda', & \beta\Gamma = H, & \beta'\Gamma' = H', \\ l, & l', & g, & g'. \end{matrix}$$

Переменные H и H' подчинены некоторым неравенствам. Имеем

$$H = \Lambda\sqrt{1-e^2},$$

откуда

$$\Lambda^2 > H^2, \tag{1}$$

Точно так же

$$\Lambda'^2 > H'^2. \tag{2}$$

С другой стороны, в силу интеграла площадей,

$$H\cos i + H'\cos i' = C, \qquad H\sin i + H'\sin i' = 0,$$

где C — постоянная площадей, рассматриваемая как одна из данных задачи. Отсюда выводятся неравенства

$$\begin{aligned} |H| + |H'| &> |C|, \\ |H| - |H'| &< |C|. \end{aligned} \tag{3}$$

Посмотрим теперь, как функция F зависит от наших переменных. Для значений H, близких к Λ, функция F уже не голоморфна по H; она разложима не по целым степеням $\Lambda - H$, но по степеням $\sqrt{\Lambda - H}$.

В этих условиях полезны следующие переменные. Положим

$$l + g = \lambda^*, \qquad \sqrt{2(\Lambda - H)}\cos g = \xi^*, \qquad \sqrt{2(\Lambda - H)}\sin g = \eta^*.$$

Уравнения сохраняют канонический вид, если за независимые переменные принять

$$\begin{matrix} \Lambda, & \Lambda', & \xi^*, & H' \\ \lambda^*, & l', & \eta^*, & g'; \end{matrix}$$

более того, функция F будет тогда разложима по целым степеням ξ^* и η^*.

Если надо рассмотреть значения H', очень близкие к Λ', то можно действовать аналогичным образом.

Посмотрим, что произойдет, если значения H и H' очень близки к пределам, которые определены неравенствами (3), т. е. если наклонения малы или равны нулю.

Предположим, например, что $H + H' = C$.

В п. 12 мы видели, что F разложима в ряд по возрастающим степеням переменных ξ, ξ', η, η', p, p', q, q' этих пунктов, т. е. по возрастающим степеням

$$\sqrt{\beta L - \beta G}, \quad \sqrt{\beta' L' - \beta' G'}, \quad \sqrt{\beta G - \beta \Theta}, \quad \sqrt{\beta' G' - \beta' \Theta'}.$$

Если наклонения равны нулю, то

$$G = \Theta, \quad G' = \Theta'$$

и два последних радикала обращаются в нуль, но не два первых; функция F голоморфна тогда по G, G' и

$$\sqrt{\beta G - \beta \Theta}, \quad \sqrt{\beta' G' - \beta' \Theta'}.$$

Но мы видели в п. 12, что F не изменяется, когда p, p', q, q' одновременно меняют знак или, что то же самое, когда два радикала $\sqrt{\beta G - \beta \Theta}$ и $\sqrt{\beta' G' - \beta' \Theta'}$ одновременно меняют знак.

Следовательно, для очень малых или нулевых значений наклонений функция F голоморфна по G и G', с одной стороны, и по $\sqrt{(\beta G - \beta \Theta)(\beta' G' - \beta' \Theta')}$, с другой.

Но мы имеем

$$G = \frac{H}{\beta}, \quad G' = \frac{H'}{\beta'}, \quad \Theta = \frac{1}{2\beta}\left(C + \frac{H^2 - H'^2}{C}\right), \quad \Theta' = \frac{1}{2\beta'}\left(C + \frac{H'^2 - H^2}{C}\right),$$

откуда

$$\sqrt{(\beta G - \beta \Theta)(\beta' G' - \beta' \Theta')} = \frac{1}{2C}\sqrt{[(H - C)^2 - H'^2][(H' - C)^2 - H^2]}$$

или

$$\sqrt{(\beta G - \beta \Theta)(\beta' G' - \beta' \Theta')} = \frac{H + H' - C}{2C}\sqrt{(H - C - H')(H' - C - H)}.$$

Эти равенства показывают, что величины

$$G, G', \sqrt{(\beta G - \beta \Theta)(\beta' G' - \beta' \Theta')}$$

и, *следовательно*, F остаются голоморфными функциями H и H', когда $H + H' = C$.

Инвариантные соотношения

19. Мы рассмотрели в п. 1, в связи с системой

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \tag{1}$$

с одной стороны, ее решения, с другой — ее интегралы. Но нам остается коснуться некоторых уравнений, которые связаны с этой системой и о которых можно сказать, что они занимают промежуточное положение между решениями и интегралами. Я теперь определю эти уравнения и назову их *инвариантными соотношениями* [7].

Пусть φ — произвольная функция $x_1, x_2, \ldots, x_n$; тогда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dx_1} X_1 + \frac{d\varphi}{dx_2} X_2 + \ldots + \frac{d\varphi}{dx_n} X_n.$$

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ &\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

и предположим, что эти уравнения влекут как следствие соотношения

$$\frac{d\varphi_i}{dx_1} X_1 + \frac{d\varphi_i}{dx_2} X_2 + \ldots + \frac{d\varphi_i}{dx_n} X_n = 0;$$

отсюда вытекает, что

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = 0.$$

Следовательно, *если уравнения* (2) *удовлетворяются для некоторого значения* t, *они будут удовлетворяться для всех значений* t; вот почему мы назовем систему (2) системой *инвариантных соотношений*; и легко понять, какое значение может иметь знание подобной системы.

Предположим теперь, что система каноническая и возвратимся к системе (1) п. 3 и к уравнению

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \frac{dS}{dx_1}, \frac{dS}{dx_2}, \ldots, \frac{dS}{dx_p}\right) = \text{const}, \tag{3}$$

которое с ней связано.

Знание одного частного решения этого уравнения (3) дает нам систему инвариантных соотношений.

Действительно, пусть S — решение; рассмотрим систему

$$y_1 = \frac{dS}{dx_1}, \quad y_2 = \frac{dS}{dx_2}, \ldots, \quad y_p = \frac{dS}{dx_p}. \tag{4}$$

Я утверждаю, что это система инвариантных соотношений для канонических уравнений (1).

В самом деле, дифференцируя уравнение (3), находим

$$\frac{dF}{dx_i} + \frac{dF}{dy_1}\frac{d^2S}{dx_1 dx_i} + \frac{dF}{dy_2}\frac{d^2S}{dx_2 dx_i} + \ldots + \frac{dF}{dy_p}\frac{d^2S}{dx_p dx_i} = 0. \qquad (5)$$

Чтобы привести систему (4) к виду (2)

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_p = 0,$$

положим

$$\varphi_i = y_i - \frac{dS}{dx_i}.$$

Получим

$$\frac{d\varphi_i}{dy_i} = 1, \qquad \frac{d\varphi_i}{dy_k} = 0 \quad (i \neq k), \qquad \frac{d\varphi_i}{dx_k} = -\frac{d^2S}{dx_i dx_k},$$

откуда

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_k \frac{d\varphi_i}{dy_k}\frac{dy_k}{dt} + \sum_k \frac{d\varphi_i}{dx_k}\frac{dx_k}{dt} = \sum_k \left(\frac{d\varphi_i}{dx_k}\frac{dF}{dy_k} - \frac{d\varphi_i}{dy_k}\frac{dF}{dx_k}\right).$$

это показывает, что уравнения (5) приводятся к виду

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Но как мы только что видели, это как раз и означает, что система (4) есть система инвариантных соотношений.

Я добавлю еще, что в случае, когда имеются лишь *две* степени свободы, каждая система *двух* инвариантных соотношений может быть получена этим способом.

Глава II

ИНТЕГРИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

Определения и леммы

20. Метод Коши доказательства существования интеграла дифференциальных уравнений применялся другими геометрами для доказательства большого числа теорем. Так как этот метод и эти теоремы будут нам полезны в дальнейшем, мне приходится посвятить им вводную главу. Для этого изложения я воспользуюсь одним обозначением, уже введенным мною в другом мемуаре; оно поможет мне избежать длиннот и повторений.

Пусть $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — два ряда по возрастающим степеням x и y; предположим, что каждый из коэффициентов ряда ψ действителен и положителен и превосходит по абсолютной величине соответствующий коэффициент ряда φ. Мы будем тогда писать

$$\varphi(x, y) \ll \psi(x, y),$$

или, если необходимо указать переменные, относительно которых производится разложение,

$$\varphi \ll \psi \quad (\arg x, y).$$

Нетрудно видеть, что если $\varphi(x, y)$ — ряд, сходящийся для некоторых значений x и y (представляющий, следовательно, функцию от x и y, голоморфную при $x = y = 0$), то можно всегда найти два действительных положительных числа M и α таких, что

$$\varphi(x, y) \ll \frac{M}{(1-\alpha x)(1-\alpha y)} \ll \frac{M}{1-\alpha(x+y)}.$$

В случае, когда функция φ обращается в нуль при $x = y = 0$, можно написать

$$\varphi \ll \frac{M\alpha(x+y)}{1-\alpha(x+y)} \ll \frac{M\alpha(x+y)[1+\alpha(x+y)]}{1-\alpha(x+y)}.$$

Предположим, что φ кроме аргументов x и y, по которым она предполагалась разложенной в ряд, зависит еще от другой переменной t; тогда числа M и α будут в общем случае непрерывными функциями t. Если эти два числа не обращаются в нуль ни при одном из рассматриваемых зна-

чений t, можно установить для них нижний предел; следовательно, можно M и α придать *постоянные* значения, достаточно большие, для того чтобы предыдущие неравенства выполнялись.

21. Действия с неравенствами, определенными в предыдущем пункте, основаны на принципах, которые я приведу вследствие их очевидности без доказательства.

1. Если ряд ψ сходится, то сходится и всякий ряд φ, для которого выполнено неравенство

$$\varphi \ll \psi.$$

2. Можно складывать любое число неравенств одного знака

$$\varphi_1 \ll \psi_1,\ \varphi_2 \ll \psi_2,\ \ldots,\ \varphi_n \ll \psi_n.$$

3. Если имеется бесконечное число неравенств одного знака

$$\varphi_0 \ll \psi_0,\ \varphi_1 \ll \psi_1,\ \ldots,\ \varphi_n \ll \psi_n,\ \ldots \text{ до бесконечности} \qquad (\arg x, y),$$

то можно записать, введя новую переменную, что

$$\varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \lambda^2\varphi_2 + \ldots \ll \psi_0 + \lambda\psi_1 + \lambda^2\psi_2 + \ldots \qquad (\arg x, y, \lambda).$$

4. Можно перемножить два неравенства одного и того же знака.

5. Если имеем

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ll \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (\arg x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

и, с другой стороны,

$$f_1(x, y) \ll \theta_1(x, y), \qquad f_2(x, y) \ll \theta_2(x, y),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n(x, y) \ll \theta_n(x, y) \qquad (\arg x, y),$$

то можно в неравенстве (1) вместо x_1, x_2, ..., x_n подставить в левую часть f_1, f_2, ..., f_n, а в правую часть θ_1, θ_2, ..., θ_n. Итак, можно записать

$$\varphi[f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots, f_n(x, y)] \ll \psi[\theta_1(x, y), \theta_2(x, y), \ldots \theta_n(x, y)]$$
$$(\arg x, y).$$

6. Можно дифференцировать неравенство

$$\varphi(x, y) \ll \psi(x, y) \qquad (\arg x, y) \qquad (2)$$

по одной из двух переменных x и y.

7. Можно интегрировать неравенство, понимая интегрирование любым из двух способов: во-первых, можно интегрировать неравенство (2) по одной из двух переменных x или y, *беря* 0 *за нижний предел интегрирования*.

Тогда получаем

$$\int_0^x \varphi(x, y)\, dx \ll \int_0^x \psi(x, y)\, dx.$$

Само собой разумеется, что при вычислении этих интегралов y считается постоянным.

8. Но может также случиться, что функции φ и ψ зависят не только от двух аргументов x и y, но еще и от переменной t, причем мы не считаем, что функции разложены в ряд по степеням этой переменной.

Предположим, что неравенство (2) верно для всех значений t, заключенных между t_0 и t_1; можно проинтегрировать это неравенство по t, рассматривая x и y как константы, и записать

$$\int \varphi(x, y, t)\, dt \ll \int \psi(x, y, t)\, dt \qquad (\arg x, y),$$

если, конечно, пределы интегрирования заключены между t_0 и t_1.

22. Рассмотрим функцию $\varphi(x, y)$, разложенную в ряд по степеням x и y. Нам часто будет встречаться случай, когда x и y зависят от некоторого параметра μ и их можно разложить в ряд по степеням этого параметра. Таким образом, запишем

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots, \\ y &= y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \ldots. \end{aligned} \tag{1}$$

Предположим, что в функцию φ вместо x и y подставлены их разложения (1), тогда φ станет функцией от μ, x_0, x_1, ..., x_p, ... до бесконечности и y_0, y_1, ..., y_p, ... до бесконечности; более того, она может быть разложена в ряд по степеням μ, так что

$$\varphi = \varphi_0 + \mu\varphi_1 + \mu^2\varphi_2 + \ldots.$$

Легко видеть, что φ_0 зависит только от x_0 и y_0; φ_1 от x_0, y_0, x_1 и y_1; ...; и, вообще, φ_p зависит от x_0, x_1, ..., x_p; y_0, y_1, ..., y_p.

Предположим теперь, что имеет место неравенство

$$\varphi(x, y) \ll \psi(x, y) \qquad (\arg x, y).$$

В ψ подставляем вместо x и y их разложения (1), так что получаем

$$\psi = \psi_0 + \mu\psi_1 + \mu^2\psi_2 + \ldots.$$

Легко видеть, что получается

$$\begin{aligned} &\varphi_0 \ll \psi_0 \qquad (\arg x_0, y_0), \\ &\varphi_1 \ll \psi_1 \qquad (\arg x_0, y_0; x_1, y_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_p \ll \psi_p \qquad (\arg x_0, x_1, \ldots, x_p; y_0, y_1, \ldots, y_p). \end{aligned}$$

В этом можно убедиться, применяя пятый принцип предыдущего пункта, что дает

$$\varphi \ll \psi \ (\arg \mu, x_0, x_1, \ldots \text{ до бесконечности}, y_0, y_1, \ldots \text{ до бесконечности}).$$

Мы условимся записывать для краткости функцию $\varphi_p(x_i, y_i)$ вместо $\varphi_p(x_0, x_1, \ldots, x_p; y_0, y_1, \ldots, y_p)$.

Теорема Коши

23. Теорему Коши можно найти сегодня в любом классическом трактате, и я ограничился бы ее формулировкой без доказательства, если бы не хотел ее несколько дополнить.

Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \theta(x, y, z, \mu), \\ \frac{dy}{dt} &= \varphi(x, y, z, \mu), \\ \frac{dz}{dt} &= \psi(x, y, z, \mu). \end{aligned} \tag{1}$$

Я предполагаю, что функции φ и ψ разложены в ряд по возрастающим степеням независимой переменной x, двух неизвестных функций y и z и произвольного параметра μ.

Предполагая, что независимая переменная t не входит в правые части уравнений (1), я не ограничиваю общности, так как система порядка n, содержащая независимую переменную явно, может всегда быть заменена системой порядка $n+1$, в которую эта независимая переменная не входит.

Действительно, пусть, например,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi(x, y, t), \\ \frac{dy}{dt} &= \psi(x, y, t). \end{aligned}$$

Ясно, что эти два уравнения могут быть заменены следующими тремя:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= \psi(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= 1. \end{aligned}$$

Я намерен показать, что существуют три сходящихся ряда по степеням t, μ x_0, y_0, z_0, которые удовлетворяют уравнениям (1), когда их подставляют вместо x, y и z, и которые сводятся к x_0, y_0 и z_0 соответственно при $t = 0$.

Итак, вместо того чтобы разлагать, как это делал Коши, в ряд только по степеням независимой переменной x, я разлагаю в ряд также по степеням параметра μ и по степеням начальных значений x_0, y_0, z_0. Но прежде надо доказать две новые леммы.

24. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, y, t, \mu),$$
$$\frac{dy}{dt} = \psi(x, y, t, \mu) \tag{1}$$

— дифференциальные уравнения, где φ и ψ — два ряда по степеням неизвестных функций x и y, переменной t и произвольного параметра μ.

Легко проверить, что существуют два ряда

$$f(t, \mu), \quad f_1(t, \mu) \tag{2}$$

по степеням t и μ, обращающиеся в нуль вместе с t, такие, что если подставить их по обычным правилам в уравнения (1) вместо x и y, то эти уравнения формально удовлетворяются.

Если мы попытаемся определить коэффициенты рядов f и f_1 методом неопределенных коэффициентов, то найдем, что каждый коэффициент ряда f (или f_1) является целым многочленом с положительными коэффициентами от различных коэффициентов рядов φ и ψ.

Итак, рассмотрим другие уравнения того же вида, что и (1),

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(x, y, t, \mu),$$
$$\frac{dy}{dt} = \psi'(x, y, t, \mu), \tag{1bis}$$

такие, что

$$\varphi \ll \varphi', \qquad \psi \ll \psi' \qquad (\arg x, y, t, \mu).$$

Если

$$f'(t, \mu), \quad f_1'(t, \mu) \tag{2 bis}$$

— ряды по t и μ, обращающиеся в нуль вместе с t и формально удовлетворяющие уравнениям (1 bis) при подстановке их вместо x и y, то можно заключить, что

$$f \ll f', \qquad f_1 \ll f_1' \qquad (\arg t, \mu).$$

25. Вернемся к уравнениям (1) предыдущего пункта. Предположим, что φ и ψ разлагаются в ряд по степеням x, y и μ для всех значений t, заключенных между 0 и t_1 ($t_1 > 0$) (мы условимся рассматривать лишь зна-

чения t, заключенные между этими пределами). Здесь я не предполагаю, что φ и ψ разлагаются по степеням t.

Тогда существуют ряды по степеням μ

$$f(t, \mu), \qquad f_1(t, \mu),$$

которые обращаются в нуль вместе с t и удовлетворяют формально уравнениям (1) (коэффициент при любой степени μ является функцией t, не обязательно разложимой в ряд по степеням t).

Как определить коэффициенты рядов f и f_1?

Пусть x_m — коэффициент при μ^m в f, а y_m — коэффициент при μ^m в f_1.

Тогда для определения x_m и y_m находим следующие уравнения:

$$\frac{dx_0}{dt} = \varphi(x_0, y_0, t, 0), \qquad \frac{dy_0}{dt} = \psi(x_0, y_0, t, 0),$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\varphi}{dx_0} x_1 + \frac{d\varphi}{dy_0} y_1 + X_1, \qquad \frac{dy_1}{dt} = \frac{d\psi}{dx_0} x_1 + \frac{d\psi}{dy_0} y_1 + Y_1,$$

. . . . . .

$$\frac{dx_m}{dt} = \frac{d\varphi}{dx_0} x_m + \frac{d\varphi}{dy_0} y_m + X_m, \qquad \frac{dy_m}{dt} = \frac{d\psi}{dx_0} x_m + \frac{d\psi}{dy_0} y_m + Y_m,$$

где X_m и Y_m разложены в ряд по степеням

$$x_1 \; y_1; \; x_2, \; y_2; \ldots, \; x_{m-1}, \; y_{m-1}$$

и, с другой стороны, зависят от x_0 y_0 и t.

Кроме того, в $d\varphi/dx_0$, $d\varphi/dy_0$, $d\psi/dx_0$, $d\psi/dy_0$ переменные x, y и параметр μ должны быть заменены на x_0, y_0 и 0.

Пусть теперь уравнения (1bis) предыдущего пункта

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(x, y, t, \mu),$$

$$\frac{dy}{dt} = \psi'(x, y, t, \mu)$$

таковы, что

$$\varphi \ll \varphi', \qquad \psi \ll \psi' \qquad (\arg x, y \text{ и } \mu, \text{ но не } \arg t).$$

Пусть

$$f'(t, \mu) = x_0' + \mu x_1' + \mu^2 x_2' + \ldots,$$

$$f_1'(t, \mu) = y_0' + \mu y_1' + \mu^2 y_2' + \ldots$$

— ряды по степеням μ, обращающиеся в 0 вместе с t и удовлетворяющие формально приведенным выше уравнениям (1 bis).

Получаем

$$\frac{dx_0'}{dt} = \varphi'(x_0', y_0', t, 0), \qquad \frac{dy_0'}{dt} = \psi'(x_0', y_0', t, 0),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_m'}{dt} = \frac{d\varphi'}{dx_0'} x_m' + \frac{d\varphi'}{dy_0'} y_m' + X_m', \qquad \frac{dy_m'}{dt} = \frac{d\psi'}{dx_0'} x_m' + \frac{d\psi'}{dy_0'} y_m' + Y_m'.$$

В начальный момент времени имеем

$$x_0' = x_0 = 0, \qquad y_0' = y_0 = 0$$

и, кроме того,

$$|\varphi| < \varphi', \qquad |\psi| < \psi', \tag{2}$$

откуда

$$\left|\frac{dx_0}{dt}\right| < \frac{dx_0'}{dt}, \qquad \left|\frac{dy_0}{dt}\right| < \frac{dy_0'}{dt}; \tag{3}$$

x_0' и y_0' для малых положительных значений t положительны и по абсолютной величине больше, чем x_0 и y_0.

Итак, запишем, что

$$|x_0| < x_0', \qquad |y_0| < y_0'. \tag{4}$$

Неравенства (4) не могут нарушиться до тех пор, пока не нарушены неравенства (3). Но это не может произойти, так как неравенства (4) вместе с неравенствами (2) влекут за собой неравенства (3). Следовательно, неравенства (4) будут всегда справедливы при

$$0 < t < t_1.$$

Я предполагаю доказанным, что

$$\begin{aligned} &|x_1| < x_1', \quad |x_2| < x_2', \ldots, \quad |x_{m-1}| < x_{m-1}', \\ &|y_1| < y_1', \quad |y_2| < y_2', \ldots, \quad |y_{m-1}| < y_{m-1}', \end{aligned} \tag{5}$$

и намерен доказать, что

$$|x_m| < x_m', \qquad |y_m| < y_m'.$$

Действительно, из неравенств (5) можно заключить, что

$$\left|\frac{d\varphi}{dx_0}\right| < \frac{d\varphi'}{dx_0'}, \quad \left|\frac{d\varphi}{dy_0}\right| < \frac{d\varphi'}{dy_0'}, \quad \left|\frac{d\psi}{dy_0}\right| < \frac{d\psi'}{dy_0'}, \quad \left|\frac{d\psi}{dx_0}\right| < \frac{d\psi'}{dx_0'},$$

$$|X_m| < X_m', \qquad |Y_m| < Y_m'.$$

Следовательно, мы должны заключить, что из неравенств

$$|x_m| < x'_m, \qquad |y_m| < y'_m$$

следуют неравенства

$$\left|\frac{dx_m}{dt}\right| < \frac{dx'_m}{dt}, \qquad \left|\frac{dy_m}{dt}\right| < \frac{dy'_m}{dt}.$$

С помощью аналогичного рассуждения можно показать, что

$$|x_m| < x'_m, \qquad |y_m| < y'_m \quad \text{при} \quad 0 < t < t_1.$$

Эти же неравенства можно записать в виде

$$f \ll f', \qquad f_1 \ll f'_1 \qquad (\arg \mu, \text{ но не } \arg t).$$

26. Вернемся к уравнениям (1) п. **23**

$$\frac{dx}{dt} = \theta(x, y, z, \mu), \qquad \frac{dy}{dt} = \varphi(x, y, z, \mu), \quad \frac{dz}{dt} = \psi(x, y, z, \mu). \tag{1}$$

Эти уравнения формально удовлетворяются некоторыми рядами

$$\begin{aligned} x &= f_1(t, x_0, y_0, z_0, \mu), \\ y &= f_2(t, x_0, y_0, z_0, \mu), \\ z &= f_3(t, x_0, y_0, z_0, \mu) \end{aligned} \tag{3}$$

по возрастающим степеням t, x_0, y_0, z_0, μ, приводящимися соответственно к x_0, y_0, z_0 при $t = 0$.

Чтобы доказать сходимость этих рядов, сравним их с рядами, полученными из других уравнений.

Можно всегда найти три положительных действительных числа M, α и β таких, что если положить

$$\theta' = \varphi' = \psi' = \frac{M}{(1 - \beta\mu)[1 - \alpha(x + y + z)]}, \tag{1}$$

то получим

$$\begin{aligned} &\theta \ll \theta', \\ &\varphi \ll \varphi', \qquad (\arg x, y, z, \mu). \\ &\psi \ll \psi'. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \theta', \\ \frac{dy}{dt} &= \varphi', \\ \frac{dz}{dt} &= \psi', \end{aligned} \tag{2bis}$$

которые также можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{M}{(1-\beta\mu)\,[1-\alpha\,(x+y+z)]}. \qquad (3\text{bis})$$

Этим уравнениям можно удовлетворить с помощью рядов, аналогичных рядам (3), которые также являются рядами по степеням t, x_0, y_0, z_0 и μ и сводятся к x_0, y_0 и z_0 при $t = 0$.

Положения п. 24 показывают, что ряды (3) сходятся всякий раз, когда сходятся упомянутые только что мажорантные ряды.

Уравнения (3bis) легко интегрируются и выражения, которые являются их интегралами, могут быть записаны в виде

$$x = x_0 + \frac{1}{3\alpha}\,(S - \sqrt{S^2 - ht}),$$
$$y = y_0 + \frac{1}{3\alpha}\,(S - \sqrt{S^2 - ht}),$$
$$z = z_0 + \frac{1}{3\alpha}\,(S - \sqrt{S^2 - ht}),$$

где мы положили для краткости

$$S = 1 - \alpha\,(x_0 + y_0 + z_0), \qquad h = \frac{6\alpha M}{1-\beta\mu}.$$

Эти ряды, расположенные по степеням μ, t, x_0, y_0, z_0, сходятся, если только

$$|\mu|, \quad |t|, \quad |x_0|, \quad |y_0|, \quad |z_0|$$

достаточно малы.

Следовательно, то же самое справедливо и для рядов (3), что и требовалось доказать.

Обобщение теоремы Коши

27. Из п. 26 следует, что решения дифференциального уравнения можно разложить в ряд по степеням произвольного параметра μ, *но только для достаточно малых по модулю значений независимой переменной* t. Мы попытаемся теперь освободиться от этого ограничения.

Рассмотрим следующие уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi\,(x, y, t, \mu), \qquad \frac{dy}{dt} = \psi\,(x, y, t, \mu). \qquad (1)$$

Здесь я снова предполагаю, что переменная t явно входит в уравнения. Пусть

$$x = \theta\,(t, \mu), \qquad y = \omega\,(t, \mu)$$

то из решений уравнения (1), для которого начальные значения x и y при $t = 0$ равны нулю.

Я предполагаю, что для всех значений t, заключенных между 0 и t_0, обе функции φ и ψ можно разложить в ряд по степеням μ, $x - \theta(t, 0)$, $y - \omega(t, 0)$ (причем коэффициенты разложений являются функциями t).

Это условие можно выразить иначе: если для некоторой системы значений x, y, t и μ одна из функций φ или ψ перестает быть голоморфной, то говорят, что эта система значений соответствует особой точке уравнений (1). Следовательно, мы можем сформулировать предыдущее условие несколько некорректным, но удобным способом, сказав, что частное решение

$$\mu = 0, \quad x = \theta(t, 0), \quad y = \omega(t, 0)$$

не будет проходить ни через одну особую точку.

Я утверждаю, что если это условие выполнено, то для всех значений t, заключенных между 0 и t_0, $\theta(t, \mu)$, $\omega(t, \mu)$ можно разложить в ряд по степеням μ (именно μ, а не t и μ), если только $|\mu|$ достаточно мал.

Замечу прежде всего, что, не уменьшая общности, можно предположить, что функции φ и ψ тождественно обращаются в нуль при

$$x = y = \mu = 0,$$

или, что то же самое, предположить, что тождественно выполняется равенство

$$\theta(t, 0) = \omega(t, 0) = 0.$$

Действительно, если бы это было не так, можно было бы сделать замену переменных

$$x' = x - \theta(t, 0), \qquad y' = y - \omega(t, 0)$$

и прийти к случаю, который мы только что указали, ибо преобразованные уравнения допускали бы в качестве решений при $\mu = 0$

$$x' = 0, \; y' = 0.$$

Итак, примем это предположение. Функции φ и ψ будут разлагаться в ряд по степеням x, y и μ, но я не предполагаю, что они разлагаются в ряд по степеням t.

Мы сможем найти ряды * (3), разложенные по степеням μ и такие, что если их подставить вместо x и y, они формально будут удовлетворять уравнениям (1). Кроме того, эти ряды обращаются в нуль при $t = 0$.

Чтобы доказать сходимость этих рядов, образуем уравнения, аналогичные уравнениям (2bis) из п. 26.

Функции φ и ψ разлагаются в ряд по степеням x, y и μ, если только

$$0 < t < t_0.$$

---

* Имеются в виду ряды, аналогичные рядам (3) предыдущего пункта. (*Прим. ред.*).

Когда t будет изменяться от 0 до t_0, радиусы сходимости этих разложений тоже будут изменяться, но можно указать для них нижнюю границу. Можно, следовательно, согласно п. 20 найти два положительных числа M и α, таких, что для всех значений t, заключенных между 0 и t_0, будут выполняться неравенства

$$\varphi \ll \varphi', \qquad \psi \ll \psi' \qquad (\arg x, y, \mu),$$

где

$$\varphi' = \psi' = \frac{M(x+y+\mu)[1+\alpha(x+y+\mu)]}{1-\alpha(x+y+\mu)}.$$

Составим тогда уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varphi', \qquad \frac{dy}{dt} = \psi'. \tag{2 bis}$$

Эти уравнения можно удовлетворить рядами (3 bis) того же вида, что и ряды (3), удовлетворяющими формально этим уравнениям *.

Согласно п. 25 ряды (3) будут сходиться, когда ряды (3 bis) сходятся.

Итак, если мы положим

$$x + y + \mu = S,$$

то наши уравнения дадут

$$x = y = \frac{S-\mu}{2}$$

и

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2MS(S+1)}{1-S}$$

или

$$2M dt = \frac{dS}{S} - \frac{2dS}{S+1},$$

откуда, поскольку $S = \mu$ при $t = 0$,

$$2Mt = L\frac{S}{(S+1)^2} - L\frac{\mu}{(\mu+1)^2}.$$

Легко проверить, что S и, следовательно, x и y разлагаются в ряд по степеням μ и что разложения сходятся для всех значений t, если только $|\mu|$ достаточно мал; из этого можно заключить, что ряды (3 bis) и ряды (3) сходятся, что и требовалось доказать.

* Имеются в виду ряды, аналогичные рядам (3) и (3 bis) в п. 26. (*Прим. ред.*).

Приложения к задаче трех тел

28. Результаты предыдущего пункта, очевидно, остаются в силе, когда вместо одного произвольного параметра μ имеется несколько. Вот как мы собираемся использовать этот результат. В п. 27 мы рассмотрели лишь частное решение, для которого начальные значения x и y равны нулю. Предположим, что мы рассматриваем частное решение, для которого эти начальные значения равны x_0 и y_0, и собираемся разложить это решение в ряд по степеням x_0, y_0 и μ.

Но мы можем идти еще дальше: вернемся к уравнению (1) предыдущего пункта и рассмотрим частное решение, такое, что

$$x = x_0, \qquad y = y_0$$

при $t = 0$; попробуем затем разложить значения x и y при $t = t_0 + \tau$ в ряд по степеням x_0, y_0, μ и τ.

Затем положим

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad t = t' \frac{t_0 + \tau}{t_0};$$

уравнения (1) примут вид

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{t_0}{t_0 + \tau} \varphi\left(x' + x_0, y' + y_0, t' \frac{t_0 + \tau}{t_0}, \mu\right),$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{t_0}{t_0 + \tau} \psi\left(x' + x_0, y' + y_0, t' \frac{t_0 + \tau}{t_0}, \mu\right).$$

Мы можем здесь рассматривать x', y' и t' как переменные, а μ, τ, x_0, y_0 как четыре произвольных параметра.

Рассматриваемое нами частное решение таково, что при $t = 0$

$$x = x_0, \qquad y = y_0$$

и, следовательно,

$$x' = y' = 0.$$

Кроме того, нам надо вычислить значения x' и y' при $t = t_0 + \tau$, т. е. при $t' = t_0$.

Таким образом, мы снова возвращаемся к случаю, изученному в предыдущем пункте, и видим, что x и y разлагаются в ряд по степеням x_0, y_0 τ и μ, если только модули этих величин достаточно малы. Все это верно при единственном условии, что частное решение, для которого начальные значения x и y равны нулю и в котором, кроме того, предполагается, что $\mu = 0$, не проходит ни через одну особую точку.

Применим это к уравнениям п. 13

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i},$$

где

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

и где F_0 не зависит от y.

F будет функцией x и y, голоморфной всюду, кроме некоторых особых точек. Может получиться так, что если придать x значения

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0, \dots, \qquad x_p = x_p^0,$$

то функция F будет голоморфной для всех значений y.

Представим себе, что поставлена следующая задача. Рассмотрим частное решение, такое, что при $t = 0$

$$x_1 = x_1^0 + \xi_1, \qquad x_2 = x_2^0 + \xi_2, \dots, \qquad x_p = x_p^0 + \xi_p,$$
$$y_1 = y_1^0 + \eta_1, \qquad y_2 = y_2^0 + \eta_2, \dots, \qquad y_p = y_p^0 + \eta_p$$

и рассмотрим, в частности, значения переменных при

$$t = t_0 + \tau;$$

необходимо разложить эти значения в ряд по степеням μ, τ, ξ и η.

Это разложение будет возможным; действительно, если положить одновременно

$$\mu = \tau = \xi_i = \eta_i = 0,$$

то частное решение сведется к

$$x_i = x_i^0, \qquad y_i = h_i t + y_i^0$$

(где h_i — значение dF_0/dx_i при $x_h = x_h^0$) и, как мы только что предположили, это решение не проходит ни через одну особую точку.

Посмотрим, что происходит в частном случае задачи трех тел. Функция F может перестать быть голоморфной лишь в случае, когда два из трех тел столкнутся. Частное решение, которое мы рассматриваем, представляет собой при $\mu = 0$ совокупность двух кеплеровых эллипсов, описываемых двумя малыми массами под действием притяжения массы, равной единице и расположенной в начале координат. Для того чтобы могло произойти столкновение, нужно, чтобы эти два эллипса пересекались, чего никогда не бывает в астрономических приложениях.

Следовательно, мы приходим к такому заключению.

В задаче трех тел положение системы задается двенадцатью переменными, определенными в п. 11. Задаются значения $x_i^0 + \xi_i$, $y_i^0 + \eta_i$ этих переменных при $t = 0$ и спрашивается, каковы будут значения этих переменных в момент $t_0 + \tau$. Мы только что видели, что эти значения разлагаются в ряды по степеням масс, ξ, η и τ.

Есть только один исключительный случай. Предположим, что при $t = 0$ начальные значения переменных равны x_i^0 и y_i^0; при нулевых массах движение продолжается по законам Кеплера; если при этих условиях столкновение происходит до момента t_0, то сказанное выше не будет верным.

Таким образом, можно было бы оценить снизу время, в течение которого пригодно разложение координат планет в ряды по степеням масс, но полученный предел будет слишком далек от точного предела, чтобы такое вычисление представляло интерес.

Использование тригонометрических рядов

29. Для интегрирования дифференциальных уравнений можно применять не только степенные ряды, пользуются также тригонометрическими рядами. Я хочу здесь сказать о них несколько слов, прежде чем приступить к уравнениям в частных производных.

Известно, что периодическая функция от x периода 2π разлагается в ряд следующего вида:

$$F(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots + A_n \cos nx + \ldots$$
$$\ldots + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots + B_n \sin nx + \ldots . \qquad (1)$$

Я показал в Астрономическом бюллетене (ноябрь 1886) [8], что если функция $f(x)$ конечна и непрерывна вместе со своими $p - 2$ производными и если ее $(p - 1)$-я производная ограничена, но имеет конечное число точек разрыва, то можно найти положительное число K, такое, что как бы велико ни было n,

$$|n^p A_n| < K, \qquad |n^p B_n| < K.$$

Если $f(x)$ — аналитическая функция, она будет конечной и непрерывной со всеми своими производными. Следовательно, можно найти число K, такое, что

$$|n^2 A_n| < K, \qquad |n^2 B_n| < K.$$

Отсюда следует, что ряд

$$|A_0| + |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| + \ldots + |B_1| + |B_2| + \ldots + |B_n| + \ldots$$

сходится и, следовательно, ряд (1) абсолютно и равномерно сходится.

Установив это, рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \varphi_{1,1} x_1 + \varphi_{1,2} x_2 + \ldots + \varphi_{1,n} x_n, \\
\frac{dx_2}{dt} &= \varphi_{2,1} x_1 + \varphi_{2,2} x_2 + \ldots + \varphi_{2,n} x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dx_n}{dt} &= \varphi_{n,1} x_1 + \varphi_{n,2} x_2 + \ldots + \varphi_{n,n} x_n.
\end{aligned} \qquad (2)$$

В этой системе n^2 коэффициентов $\varphi_{i,k}$ являются периодическими функциями с периодом 2π. Следовательно, уравнения (2) не изменяются, если заменить t на $t + 2\pi$.

Пусть теперь

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_{1,1}(t), & x_2 &= \psi_{1,2}(t), \ldots, & x_n &= \psi_{1,n}(t), \\ x_1 &= \psi_{2,1}(t), & x_2 &= \psi_{2,2}(t), \ldots, & x_n &= \psi_{2,n}(t), \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ x_1 &= \psi_{n,1}(t), & x_2 &= \psi_{n,2}(t), \ldots, & x_n &= \psi_{n,n}(t) \end{aligned} \tag{3}$$

— n линейно независимых решений уравнений (2). Уравнения не изменяются, если заменить t на $t + 2\pi$, а n решений принимают вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_{1,1}(t + 2\pi), \ldots, & x_n &= \psi_{1,n}(t + 2\pi), \\ x_1 &= \psi_{2,1}(t + 2\pi), \ldots, & x_n &= \psi_{2,n}(t + 2\pi), \\ &\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots \\ x_1 &= \psi_{n,1}(t + 2\pi), \ldots, & x_n &= \psi_{n,n}(t + 2\pi). \end{aligned}$$

Следовательно, они должны быть линейными комбинациями n решений (3), так что

$$\begin{aligned} \psi_{1,1}(t + 2\pi) &= A_{1,1}\psi_{1,1}(t) + A_{1,2}\psi_{2,1}(t) + \ldots + A_{1,n}\psi_{n,1}(t), \\ \psi_{2,1}(t + 2\pi) &= A_{2,1}\psi_{1,1}(t) + A_{2,2}\psi_{2,1}(t) + \ldots + A_{2,n}\psi_{n,1}(t), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_{n,1}(t + 2\pi) &= A_{n,1}\psi_{1,1}(t) + A_{n,2}\psi_{2,1}(t) + \ldots + A_{n,n}\psi_{n,1}(t), \end{aligned} \tag{4}$$

где A — постоянные коэффициенты.

Кроме того, получим так же (с теми же коэффициентами)

$$\begin{aligned} \psi_{1,2}(t + 2\pi) &= A_{1,1}\psi_{1,2}(t) + A_{1,2}\psi_{2,2}(t) + \ldots + A_{1,n}\psi_{n,2}(t) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Теперь образуем уравнение относительно S

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} - S & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} - S & \ldots & A_{2,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n} - S \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Пусть S_1 — один из корней этого уравнения. В силу теории линейных подстановок всегда существуют n постоянных коэффициентов

$$B_1, B_2, \ldots, B_n,$$

таких, что если положить

$$\theta_{1,1}(t) = B_1\psi_{1,1}(t) + B_2\psi_{2,1}(t) + \ldots + B_n\psi_{n,1}(t),$$

а также

$$\theta_{1,i}(t) = B_1\psi_{1,i}(t) + B_2\psi_{2,i}(t) + \ldots + B_n\psi_{n,i}(t),$$

то

$$\theta_{1,1}(t + 2\pi) = S_1\theta_{1,1}(t),$$

а также

$$\theta_{1,i}(t + 2\pi) = S_1\theta_{1,i}(t).$$

Положим

$$S_1 = e^{2\alpha_1\pi}.$$

Тогда

$$e^{-\alpha_1(t+2\pi)}\theta_{1,1}(t + 2\pi) = S_1e^{-2\alpha_1\pi}e^{-\alpha_1 t}\theta_{1,1}(t) = e^{-\alpha_1 t}\theta_{1,1}(t).$$

Это уравнение показывает, что

$$e^{-\alpha_1 t}\theta_{1,1}(t)$$

является периодической функцией, которую мы можем разложить в тригонометрический ряд

$$\lambda_{1,1}(t).$$

Если периодические функции $\varphi_{i,k}(t)$ аналитические, таковы же будут решения дифференциальных уравнений (2) и функция $\lambda_{1,1}(t)$. Ряд $\lambda_{1,1}(t)$ будет, следовательно, сходиться равномерно и абсолютно.

Также

$$e^{-\alpha_1 t}\theta_{1,i}(t)$$

— периодическая функция, которую можно представить тригонометрическим рядом

$$\lambda_{1,i}(t).$$

Итак, имеется частное решение уравнений (2), которое записывается в виде

$$x_1 = e^{\alpha_1 t}\lambda_{1,1}(t), \qquad x_2 = e^{\alpha_2 t}\lambda_{1,2}(t), \ldots, \qquad x_n = e^{\alpha_n t}\lambda_{1,n}(t). \tag{6}$$

Каждому корню уравнения (5) соответствует решение вида (6).

Если все корни уравнения (5) различны, имеются n линейно независимых решений этого вида и общее решение будет

$$\begin{aligned}
x_1 &= C_1e^{\alpha_1 t}\lambda_{1,1}(t) + C_2e^{\alpha_2 t}\lambda_{1,2}(t) + \ldots + C_ne^{\alpha_n t}\lambda_{1,n}(t),\\
x_2 &= C_1e^{\alpha_1 t}\lambda_{2,1}(t) + C_2e^{\alpha_2 t}\lambda_{2,2}(t) + \ldots + C_ne^{\alpha_n t}\lambda_{2,n}(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= C_1e^{\alpha_1 t}\lambda_{n,1}(t) + C_2e^{\alpha_2 t}\lambda_{n,2}(t) + \ldots + C_ne^{\alpha_n t}\lambda_{n,n}(t).
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь C — постоянные интегрирования, α — постоянные и λ — абсолютно и равномерно сходящиеся тригонометрические ряды.

Теперь посмотрим, что происходит, когда уравнение (5) имеет двойной корень, например, когда $\alpha_1 = \alpha_2$. Вернемся к формуле (7). Положим в ней

$$C_3 = C_4 = \ldots = C_n = 0$$

и заставим α_2 стремиться к α_1. Получим

$$x_1 = e^{\alpha_1 t}\left[C_1\lambda_{1,1}(t) + C_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}\lambda_{2,1}(t)\right]$$

или, положив

$$C_1 = C_1' - C_2, \qquad C_2 = \frac{C_2'}{\alpha_2 - \alpha_1},$$

получим

$$x_1 = e^{\alpha_1 t}\left[C_1'\lambda_{1,1}(t) + C_2'\frac{e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}\lambda_{2,1}(t) - \lambda_{1,1}(t)}{\alpha_2 - \alpha_1}\right].$$

Ясно, что разность

$$\lambda_{2,1}(t) - \lambda_{1,1}(t)$$

обратится в нуль при $\alpha_2 = \alpha_1$. Следовательно, мы можем положить

$$\lambda_{2,1}(t) = \lambda_{1,1}(t) + (\alpha_2 - \alpha_1)\lambda'(t).$$

Таким образом получим

$$x_1 = e^{\alpha_1 t}\left[C_1'\lambda_{1,1} + C_2'\lambda_{1,1}\frac{e^{(\alpha_2-\alpha_1)t} - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} + C_2'\lambda'(t)\,e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}\right]$$

и в пределе (при $\alpha_2 = \alpha_1$)

$$x_1 = C_1 e^{\alpha_1 t}\lambda_{1,1} + C_2' e^{\alpha_1 t}\left[t\lambda_{1,1} + \lim\lambda'(t)\right].$$

Можно убедиться, что предел $\lambda'(t)$ при $\alpha_2 = \alpha_1$ также является равномерно и абсолютно сходящимся тригонометрическим рядом.

Итак, следствием наличия двойного корня уравнения (5) было появление в решении членов вида

$$e^{\alpha_1 t}\lambda(t),$$

где $\lambda(t)$ — тригонометрический ряд.

Легко видеть, что тройной корень приведет к появлению членов вида

$$e^{\alpha_1 t}t^2\lambda(t)$$

и т. д.

Я не останавливаюсь на всех этих деталях. Эти результаты хорошо известны из работ Флоке, Калландро, Брунса, Стилтьеса, и если я и привел здесь доказательство in extenso для общего случая, то только потому, что его крайняя простота позволила это сделать в нескольких словах.

Неявные функции

30. Если имеются $n + p$ величин $y_1, y_2, \ldots, y_n; x_1, x_2, \ldots, x_p$, между которыми имеется n соотношений

$$\begin{aligned} &f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n; x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \\ &f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n; x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n; x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

если f разлагаются в ряд по степеням x и y и обращаются в нуль вместе с этими $n + p$ переменными; если, наконец, функциональный определитель f по переменным y не равен нулю, когда все x и y равны нулю одновременно, то можно из уравнений (7) определить n неизвестных y в форме рядов по степеням $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Действительно, рассмотрим x_1 как единственную независимую переменную, а $x_2, x_3, \ldots, x_n$ — как произвольные параметры. Мы сможем заменить уравнения (7) n дифференциальными уравнениями

$$\frac{df_i}{dy_1}\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{df_i}{dy_2}\frac{dy_2}{dx_1} + \ldots + \frac{df_i}{dy_n}\frac{dy_n}{dx_1} + \frac{df_1}{dx_1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, мы пришли к случаю, которым только что занимались.

В частности, если $f(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция, разлагающаяся в ряд по степеням y и x, если при

$$y = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

будет

$$f = 0, \qquad \frac{df}{dy} \neq 0$$

и если y определяется из равенства

$$f = 0,$$

о y можно разложить в ряд по степеням x.

31. Этот результат можно выразить иначе. В самом деле, рассмотрим любое алгебраическое уравнение

$$f(x) = 0.$$

Если для некоторого значения x_0 переменной x функция $f(x)$ обращается в нуль, а ее производная не равна нулю, то говорят, что x_0 — простой корень уравнения; x_0 — кратный корень порядка n, если для значения $x = x_0$ f обращается в нуль вместе со своими $n - 1$ первыми производными.

Так же, если имеется произвольная система алгебраических уравнений, например, состоящая из трех уравнений, а именно:

$$f_1(x, y, z) = 0,$$
$$f_2(x, y, z) = 0,$$
$$f_3(x, y, z) = 0,$$

то говорят, что

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0$$

— простое решение этой системы, если при этих значениях f_1, f_2, f_3 обращаются в нуль, а их якобиан, или функциональный определитель, не равен нулю.

Можно сохранить те же наименования в случае, когда f_1, f_2 и f_3 являются не целыми многочленами от x, y, z, а голоморфными функциями от x, y, z.

Результат предыдущего пункта можно выразить тогда следующим образом: если имеется p уравнений (относительно неизвестных y_1, y_2..., y_p)

$$f_1(y_1, y_2, \ldots, y_p; x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$f_2(y_1, y_2, \ldots, y_p; x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_p(y_1, y_2, \ldots, y_p; x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

левые части которых голоморфны, и если при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

система значений

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_p = 0$$

является простым решением уравнений, то y разлагаются в ряд по возрастающим степеням x. Следовательно, если дать переменным x достаточно малые значения, то наши уравнения будут допускать действительное решение.

Алгебраические особые точки

32. Рассмотрим уравнение

$$f(y, x) = 0 \qquad (1)$$

и предположим, что при

$$x = y = 0$$

f обращается в нуль вместе со своими $m - 1$ первыми производными по y. Тогда при $x = 0$ значение 0 переменной y является решением порядка m этого уравнения.

Можно показать, что существует m сходящихся разложений y по дробным положительным степеням x, обращающихся в нуль вместе с x и удовлетворяющих этому уравнению (см. классические работы Пюизе об алгебраических уравнениях).

Эти m сходящихся разложений распределяются по группам следующим образом.

Пусть

$$y = \alpha_1 x^{\frac{1}{p}} + \alpha_2 x^{\frac{2}{p}} + \ldots + \alpha_n x^{\frac{n}{p}} + \ldots \tag{2}$$

— одно из этих разложений и λ — корень p-й степени из единицы.

Разложение

$$y = \alpha_1 \lambda x^{\frac{1}{p}} + \alpha_2 \lambda^2 x^{\frac{2}{p}} + \ldots + \alpha_n \lambda^n x^{\frac{n}{p}} + \ldots$$

будет также удовлетворять уравнению (1). Можно, следовательно, получить из разложения (2) $p - 1$ других разложений, которые вместе с ним образуют группу; я назову ее группой порядка p.

Сумма порядков всех групп, очевидно, равна m. Предположим, что имеются q_p групп порядка p; сумма их порядков будет равна $q_p p$, и мы получим

$$q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \ldots + pq_p = m.$$

Коэффициенты pq_p разложений, принадлежащих к группам порядка p, будут заданы алгебраическими уравнениями порядка pq_p.

Если pq_p нечетно, эти уравнения будут иметь по меньшей мере один действительный корень и по меньшей мере одно разложение будет иметь действительные коэффициенты. Поскольку, кроме того, p нечетно, если pq_p нечетно, то соответствующее значение y также будет действительным.

Но если m нечетно, по крайней мере одна из величин pq_p будет нечетна, следовательно, тогда по меньшей мере одно из значений y будет действительным.

Итак, если m нечетно, уравнение (1) допускает по меньшей мере одно действительное решение при малых значениях x.

Можно еще добавить, что числа действительных решений при малых положительных и отрицательных значениях x будут оба той же четности, что и m. Речь идет о тех действительных решениях, которые обращаются в нуль вместе с x.

Исключение

33. Рассмотрим теперь уравнение

$$f(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{1}$$

и представим себе, что если y и x обращаются в нуль, то f обращается в нуль вместе со своими $m - 1$ первыми производными по y, а m-я производная не обращается в нуль.

В начале моей диссертации о функциях, определяемых с помощью уравнений в частных производных (Paris, Gautier-Villars, 1879) [9] я доказал, что подобное уравнение можно преобразовать в другое, имеющее следующий вид:

$$\varphi(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

где φ — многочлен степени m от y, коэффициент при y^m равен единице, а остальные коэффициенты голоморфны по x.

Если предположить, что $m = 1$, то это уравнение сведется к виду:

$$y - (\text{голоморфная функция от } x) = 0,$$

и мы снова вернемся к теореме п. 30.

В этой же диссертации я доказал (лемма IV, стр. 14), что если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ — p голоморфных функций от $z_1, z_2, \ldots, z_p$; $x_1, x_2, \ldots, x_p$, если эти функции обращаются в нуль, когда все z и x равны нулю, если уравнения

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_p = 0 \tag{2}$$

остаются различными, когда все x равны нулю; если, наконец, z определяются как функции от x уравнениями (2), то p таким образом определенных функций являются алгеброидными. Это означает, в терминах цитированной диссертации, что уравнения (2) можно заменить p уравнениями

$$\psi_1 = 0, \ \psi_2 = 0, \ \ldots, \ \psi_p = 0$$

того же вида, но левые части которых являются целыми многочленами относительно z.

Пусть теперь имеем два совместных уравнения

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= 0, \\ \psi(x, y, z) &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

определяющих y и z как функции от x. Я предполагаю, что левые части голоморфны по x, y и z и обращаются в нуль одновременно с этими тремя переменными.

Одно из двух: либо, когда x равно нулю, оба уравнения остаются различными, тогда, как мы только что показали, можно заменить эти два урав-

нения двумя другими, им эквивалентными

$$\varphi_1(x, y, z) = 0,$$
$$\psi_1(x, y, z) = 0,$$

левые части которых будут целыми многочленами от y и z; можно из этих двух уравнений, ставших алгебраическими по неизвестным y и z, исключить, например, z и прийти к единственному уравнению

$$F(x, y) = 0.$$

Либо, когда x равно нулю, два уравнения (3) совпадают. Но тогда могут представиться два случая.

Либо можно найти такое число α, что уравнения (3) остаются различными, если положить $x = \alpha y$. Тогда, если мы положим $x' = x - \alpha y$, уравнения остаются различными при $x' = 0$, и мы приходим к предыдущему случаю. Можно исключить z из обоих уравнений (3) и свести их к единственному уравнению между x' и y' или, что то же самое, между x и y.

Либо нельзя найти такого числа α; но это может случиться, лишь если уравнения (3) не являются различными; таким образом исключение возможно во всех случаях, кроме последнего.

Вообще, пусть

$$\begin{aligned} &\varphi_1(z_1, z_2, \ldots, z_p;\ x) = 0,\\ &\varphi_2(z_1, z_2, \ldots, z_p;\ x) = 0,\\ &\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi_p(z_1, z_2, \ldots, z_p;\ x) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

— p уравнений, левые части которых голоморфны и которые определяют z как функции от x; если эти уравнения различны, то можно всегда исключить $z_2, z_3, \ldots, z_p$ из этих p уравнений и свести их к единственному уравнению вида

$$F(x, z_1) = 0. \tag{5}$$

Я предполагаю, что уравнения (4) все еще различны при $x = 0$ и, следовательно, F не делится на x.

Я предполагаю, что $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ обращаются в нуль вместе с z и x, так что

$$z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_p = 0 \tag{6}$$

— решение системы (4) при $x = 0$ и $z_1 = 0$ — решение уравнения (5).

Если $z_1 = 0$ — решение порядка m уравнения (5), я буду называть решение (6) решением порядка m системы (4).

Если решение нечетного порядка, мы можем утверждать, что уравнение (5) и, следовательно, система (4) допускают действительные решения и при малых значениях x.

Теорема о максимумах

34. Пусть $F(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ — произвольная голоморфная функция от z. Известно, что можно найти все максимумы этой функции, если решить систему

$$\frac{dF}{dz_1} = \frac{dF}{dz_2} = \ldots = \frac{dF}{dz_p} = 0; \tag{1}$$

но известно также, что не все решения этой системы соответствуют максимумам.

Я утверждаю, что, для того чтобы некоторое решение могло соответствовать максимуму F, необходимо, но разумеется не достаточно, чтобы порядок решения был нечетным.

Это очевидно, когда имеются единственная переменная и единственное уравнение

$$\frac{dF}{dz_1} = 0.$$

В самом деле, известно, что максимума не может быть, если первая производная F, не обращающаяся в нуль, не является производной четного порядка.

Распространим подобный результат на общий случай и для определенности рассмотрим случай лишь двух переменных z_1 и z_2. Будем считать z_1 и z_2 координатами точки на плоскости; мы всегда можем предположить, что за начало координат взята точка, соответствующая максимуму, так что максимум имеет место при

$$z_1 = z_2 = 0.$$

Можно тогда описать вокруг начала координат замкнутую кривую C, очень маленькую и такую, что во всех ее точках выполняется неравенство

$$F(z_1, z_2) < F(0, 0).$$

Более того: можно предположить, что эта кривая имеет уравнение вида

$$F(z_1, z_2) = F(0, 0) - \lambda^2,$$

где λ — очень малая постоянная, и что внутри этой замкнутой кривой C имеет место неравенство

$$F(z_1, z_2) > F(0, 0) - \lambda^2;$$

следовательно, при пересечении кривой C снаружи внутрь F растет. Мы хотим установить, что

$$z_1 = z_2 = 0$$

— решение нечетного порядка системы

$$\frac{dF}{dz_1} = \frac{dF}{dz_2} = 0.$$

Это сводится к следующему: пусть $F(z_1, z_2, \mu)$ — функция от z_1 и z_2, обращающаяся в $F(z_1, z_2)$ при $\mu = 0$. Тогда система

$$\frac{dF}{dz_1} = \frac{dF}{dz_2} = 0$$

при $\mu = 0$ имеет кратное решение

$$z_1 = z_2 = 0.$$

Можно всегда выбрать функцию $F(z_1, z_2, \mu)$ (которая нам задана лишь при $\mu = 0$ и остается произвольной при других значениях μ) таким образом, что при отличных от нуля значениях μ эта же самая система имеет лишь простые решения. Итак, необходимо установить следующий факт: если μ достаточно мало, то внутри кривой C имеется нечетное число этих простых решений.

В моем мемуаре «Sur les courbes définies par les équations différentielles» [pt. IV, chap. XVIII. (Journal de Liouville, série 4, t. II, p. 177)] [10] я имел случай изучать распределение особых точек системы дифференциальных уравнений и определить для этой цели индекс Кронекера замкнутой кривой или замкнутой поверхности по отношению к этой системе дифференциальных уравнений. Здесь нам надо рассмотреть следующую систему:

$$\frac{dz_1}{\left(\frac{dF}{dz_1}\right)} = \frac{dz_2}{\left(\frac{dF}{dz_2}\right)} \tag{2}$$

и в более общем случае

$$\frac{dz_1}{\left(\frac{dF}{dz_1}\right)} = \frac{dz_2}{\left(\frac{dF}{dz_2}\right)} = \ldots = \frac{dz_n}{\left(\frac{dF}{dz_n}\right)}.$$

Особые точки системы (2) будут решениями системы (1).

Нам надо вычислить индекс Кронекера [11] замкнутой кривой C по отношению к системе (2). Можно проверить, что он равен единице при $\mu = 0$ и отсюда заключить, что он остается равным единице для малых значений μ, так как может изменяться лишь в том случае, если одно из решений системы (1) пересекло кривую C.

Следовательно, число положительных особых точек системы (2), расположенных внутри C, равно числу отрицательных особых точек плюс единица.

Итак, общее число особых точек, т. е. общее число решений системы (1), простых по предположению и расположенных внутри C, нечетно, что и требовалось доказать.

Эти рассуждения без изменений применимы в случае более чем двух переменных.

Новые определения

35. Чтобы не слишком удлинять изложение этих предварительных сведений, я не буду говорить в данный момент о применении методов Коши к уравнениям в частных производных, хотя и намерен позднее вернуться к этому вопросу.

Я закончу эту главу новым обобщением обозначения $\ll$ из п. 20.

Пусть $\varphi(x, y, t)$, $\psi(x, y, t)$ — два ряда, расположенных по возрастающим степеням x и y, так что коэффициенты являются периодическими функциями от t, разложенными по синусам и косинусам кратных t или, что то же самое, по положительным и отрицательным степеням e^{it}.

Итак, рассмотрим разложение φ и ψ по степеням x, y, и e^{it}. Если каждый из коэффициентов ψ веществен, положителен и больше по абсолютной величине, чем соответствующий коэффициент φ, мы будем писать

$$\varphi \ll \psi \qquad (\arg x, y, e^{\pm it}).$$

Если ряд ψ сходящийся при

$$x = |x_0|, \quad y = |y_0|, \quad t = 0,$$

ряд φ будет сходиться при

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad t \text{ — любая действительная величина.}$$

Я добавлю, что достаточно, чтобы ряд ψ сходился при $t = 0$ для того, чтобы он сходился при любом t.

Если ряд $\varphi(x, y, t)$ сходится и представляет собой аналитическую функцию, то из рассмотрений предыдущего пункта следует, что сходимость абсолютная и равномерная.

Можно, следовательно, найти такую вещественную положительную постоянную α и такую периодическую с периодом 2π функцию M от t, что:

1) все коэффициенты разложения M по положительным и отрицательным степеням e^{it} положительны и вещественны;

2) имеет место неравенство

$$\varphi \ll \frac{M}{1 - \alpha(x + y)} \qquad (\arg x, y, e^{\pm it}).$$

Следовательно, мы имеем a fortiori, что для любого t

$$\varphi \ll \frac{M_0}{1-\alpha(x+y)} \qquad (\arg x,\ y),$$

где M_0 — значение M при $t = 0$.

Действительно, пусть

$$\varphi = \Sigma A x^m y^n e^{pit},$$

тогда

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\Sigma A p^2 x^m y^n e^{pit}.$$

Этот ряд должен сходиться, по предположению, для всех вещественных значений t и всех значений x и y внутри круга сходимости. Предположим, например, что сходимость имеет место при

$$x = y = \frac{1}{\alpha}$$

Члены ряда должны быть ограничены по абсолютной величине, так что можно записать, обозначив через K некоторую положительную постоянную,

$$|A| < \frac{\alpha^{m+n}}{p^2} K.$$

Если положить

$$M = \sum \frac{Ke^{pit}}{p^2},$$

то получим

$$\varphi \ll \frac{M}{(1-\alpha x)(1-\alpha y)} \ll \frac{M}{1-\alpha(x+y)}.$$

Глава III

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

36. Пусть

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

— система дифференциальных уравнений, где X — данные однозначные функции переменных x_1, x_2, ..., x_n.

Пусть теперь

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(t) \tag{2}$$

— частное решение этой системы. Представим себе, что в момент T n переменных x_i принимают свои начальные значения, так что

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(T).$$

Ясно, что в этот момент T мы будем находиться в тех же условиях, что и в момент 0 и, следовательно, для любого t

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(t + T).$$

Другими словами, функции φ_i будут периодическими функциями t.

Тогда говорят, что решение (2) является *периодическим решением* уравнений (1).

Предположим теперь, что функции X_i зависят не только от x_i, но и от времени t. Более того, я предполагаю, что X_i — периодические функции и период равен T. Тогда, если функции φ_i таковы, что

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(T),$$

то из этого по-прежнему можно заключить, что

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(t + T)$$

и решение (2) по-прежнему будет периодическим.

Вот другой, немного более сложный случай. Предположим снова, что функции X_i зависят только от x, но являются периодическими функциями

первых p переменных x, а именно, x_1, x_2, ..., x_p, так что X_i не изменяются, когда x_1 заменяют на $x_1 + 2\pi$ или же x_2 на $x_2 + 2\pi$, ..., или же x_p на $x_p + 2\pi$.

Представим себе теперь, что

$$\varphi_1(T) = \varphi_1(0) + 2k_1\pi, \quad \varphi_2(T) = \varphi_2(0) + 2k_2\pi, \ldots, \quad \varphi_p(T) = \varphi_p(0) + 2k_p\pi,$$
$$\varphi_{p+1}(T) = \varphi_{p+1}(0), \quad \varphi_{p+2}(T) = \varphi_{p+2}(0), \ldots, \quad \varphi_n(T) = \varphi_n(0),$$

где k_1, k_2, ..., k_p — целые числа.

В момент T первые p переменных x возрастут на некоторое кратное 2π, а $n - p$ оставшихся переменных не изменятся; следовательно, X_i не изменятся, и мы будем находиться в тех же условиях, что и в момент 0.

Следовательно, будем иметь

$$\varphi_i(t + T) = \varphi_i(t) + 2k_i\pi \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$
$$\varphi_i(t + T) = \varphi_i(t) \qquad (i = p + 1, p + 2, \ldots, n).$$

Мы условимся по-прежнему говорить, что решение (2) — периодическое решение.

Наконец, может случиться, что при подходящей замене переменных появятся периодические решения, которых не было при старых переменных.

Вернемся, например, к уравнениям (2) из п. 2

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\frac{d\eta}{dt} = \frac{dV}{d\xi} + n^2\xi,$$
$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2n\frac{d\xi}{dt} = \frac{dV}{d\eta} + n^2\eta.$$

Напомним, что речь идет о движении точки, отнесенном к двум подвижным осям $O\xi$ и $O\eta$ под действием силы, составляющие которой по этим осям суть $dV/d\xi$ и $dV/d\eta$.

Во многих приложениях V зависит лишь от ξ и η, и уравнения допускают такие частные решения, что ξ и η являются периодическими функциями t, причем период равен T.

Если бы точку отнесли к неподвижным осям Ox и Oy, имели бы место равенства

$$x = \xi\cos nt - \eta\sin nt,$$
$$y = \xi\sin nt + \eta\cos nt$$

и x и y не были бы периодическими функциями t, если только T не соизмеримо с $2\pi/n$.

Таким образом, при переходе от неподвижных осей к подвижным появляется периодическое решение.

Задача, о которой здесь будет идти речь, следующая.

Предположим, что в уравнениях (1) функции X_i зависят от некоторого параметра μ и что в случае $\mu = 0$ удалось проинтегрировать уравнения и установить таким образом существование некоторого числа периодических решений. При каких условиях мы будем иметь право заключить, что уравнения имеют периодические решения и для малых значений μ?

Возьмем, например, задачу трех тел. Выше мы условились (п. 11) обозначать через $\alpha_2\mu$ и $\alpha_3\mu$ массы двух самых малых тел, причем μ очень мало, а α_2 и α_3 конечны. При $\mu = 0$ задача разрешима, причем каждое из двух малых тел описывает вокруг третьего кеплеров эллипс; легко видеть тогда, что существует бесконечное число периодических решений. Далее мы увидим, что можно заключить отсюда, что задача трех тел имеет бесконечное число периодических решений, если μ достаточно мало.

На первый взгляд кажется, что этот факт не может представлять никакого интереса для практики. В самом деле, лишь с нулевой вероятностью начальные условия движения будут в точности соответствовать начальным условиям периодического решения. Но может случиться, что они отличаются от этих условий лишь очень мало, и это имеет место как раз в случаях, когда старые методы неприменимы. Тогда можно с успехом брать периодическое решение за первое приближение, за *промежуточную орбиту* по терминологии Гильдена.

Более того, вот факт, который я не смог строго доказать, но который тем не менее кажется очень правдоподобным.

Если даны уравнения вида, указанного в п. 13, и некоторое частное решение этих уравнений, то можно всегда найти такое периодическое решение (период которого, правда, может быть очень большим), что разность между обоими решениями будет сколь угодно мала на протяжении любого сколь угодно большого промежутка времени. Кроме того, особая ценность этих периодических решений заключается в том, что они являются единственной брешью, через которую мы могли бы попытаться проникнуть в область, считавшуюся недоступной [12].

37. Вернемся к уравнениям (1) п. 36

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

и предположим, что X_i — функции n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, времени t и произвольного параметра μ. Предположим, кроме того, что эти функции периодические по t с периодом 2π.

Представим себе, что при $\mu = 0$ уравнения имеют периодическое решение с периодом 2π

$$x_i = \varphi_i(t),$$

так что

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(2\pi).$$

Выясним, будут ли уравнения (1) допускать периодическое решение с периодом 2π, если μ не равно нулю, но очень мало.

Рассмотрим сначала любое решение.

Пусть $\varphi_i(0) + \beta_i$ — значение x_i при $t = 0$; $\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i$ — значение x_i при $t = 2\pi$. По теореме п. 27 ψ_i будут голоморфными функциями μ и β_i и эти функции обратятся в нуль при

$$\mu = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0.$$

Чтобы решение было периодическим, должны выполняться уравнения

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0. \tag{1}$$

Если функциональный определитель, или якобиан, ψ по β не равен нулю при $\mu = \beta_i = 0$, то, как мы знаем из теоремы п. 30, можно решить эти n уравнений относительно β и найти

$$\beta_i = \theta_i(\mu),$$

где $\theta_i(\mu)$ разлагаются в ряды по степеням μ и обращаются в 0 вместе с μ.

Из этого следует, что для достаточно малых значений μ дифференциальные уравнения допускают периодические решения. Все это верно, если якобиан ψ не равен нулю или, другими словами, если при $\mu = 0$ уравнения (1) допускают *простое* решение

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0.$$

Что произойдет, если решение кратное?

Предположим, что оно кратное порядка m. Пусть m_1 — число решений системы (1) при малых положительных значениях μ и m_2 — число решений той же системы при малых отрицательных значениях μ; речь идет о таких решениях, что $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ стремятся к 0 вместе с μ.

В силу того, что мы видели в п. 32 и 33, все три числа m, m_1 и m_2 одной и той же четности. Следовательно, если m нечетно, то при малых значениях μ как положительных, так и отрицательных заведомо существуют периодические решения.

Если m_1 не равно m_2, разность может быть лишь четным числом; следовательно, может случиться, что когда μ непрерывно увеличивают, некоторое число решений исчезает в момент, когда μ меняет знак (или в более общем случае в момент, когда μ проходит через некоторое значение μ_0, так как значение $\mu = 0$ ничем не отличается от других значений μ), но число исчезающих решений всегда должно быть четным.

Итак, периодическое решение может исчезнуть лишь слившись с другим периодическим решением [13].

Другими словами, *периодические решения исчезают парами подобно действительным корням алгебраических уравнений.*

В силу п. 33 можно исключить из уравнений (1) $n - 1$ переменных β_1, β_2, β_3, ..., β_{n-1} и получить единственное уравнение

$$\Phi(\beta_n, \mu) = 0, \tag{2}$$

левая часть которого голоморфна по β_n и μ и обращается в нуль вместе с этими переменными.

Если рассматривать теперь β_n и μ как координаты точки на плоскости, то это уравнение будет представлять кривую, проходящую через начало координат; каждой из точек этой кривой соответствует периодическое решение.

Таким образом можно составить представление обо всех возможных случаях, изучая форму этой кривой в окрестности начала координат.

Интересен частный случай, когда при $\mu = 0$ дифференциальные уравнения допускают бесконечное число периодических решений.

Пусть

$$x_1 = \varphi_1(t, h), \quad x_2 = \varphi_2(t, h), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t, h)$$

— система периодических решений, содержащих произвольную постоянную h. Какова бы ни была эта постоянная, функции φ_i — периодические с периодом 2π по t и удовлетворяют дифференциальным уравнениям, когда их подставляют вместо x, полагая $\mu = 0$.

В этом случае при $\mu = 0$ уравнения (1) не будут независимыми и уравнение (2) должно сводиться к тождеству.

Тогда функция Φ должна содержать μ в качестве множителя и сводиться к $\mu\Phi_1$, так что кривая (2) распадается на прямую $\mu = 0$ и другую кривую $\Phi_1 = 0$.

Каждой точке этой кривой $\Phi_1 = 0$ соответствует периодическое решение, так что изучение этой кривой позволит разобраться в различных случаях, которые могут представиться.

Но эта кривая $\Phi_1 = 0$ не всегда проходит через начало координат. *Следовательно, мы должны прежде всего распорядиться произвольной постоянной h так, чтобы эта кривая проходила через начало координат.*

Вот еще один частный случай, который кажется мне достойным интереса. Предположим, что откуда-нибудь известно, что кривая $\Phi = 0$ имеет ветвь B, проходящую через начало координат. Каждой точке этой ветви будет соответствовать периодическое решение. Представим себе, кроме того, что почему-либо известно, что ветвь B не касается прямой $\mu = 0$; наконец, предположим, что функциональный определитель ψ по β равен нулю. Отсюда можно заключить, что

$$\frac{d\Phi}{d\beta_n} = 0,$$

и так как ветвь B по предположению не касается прямой $\mu = 0$, то

$$\frac{d\Phi}{d\mu} = 0.$$

Это показывает, что кривая $\Phi = 0$ в начале координат имеет кратную точку, следовательно, одна или несколько ветвей кривой, отличных от B, проходят через начало координат. *За исключением особых случаев, к которым мы вернемся позже*, по крайней мере одна из этих ветвей действительна.

Следовательно, кроме периодических решений, соответствующих ветви B, будет существовать другая система периодических решений, и решения обеих систем сольются вместе при $\mu = 0$. Вот обстоятельства, при которых представляется этот случай.

Мы обозначали выше

$$\varphi_1(0) + \beta_i$$

— значение x_i при $t = 0$ и

$$\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i$$

— значение x_i при $t = 2\pi$.

Обозначим также

$$\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i'$$

— значение x_i при $t = 2k\pi$, где k — целое число.

Я предполагаю, что при $\mu = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$ функциональный определитель ψ по β, который я обозначу через Δ, не обращается в нуль, тогда как функциональный определитель ψ' по β, который я обозначу через Δ', обращается в нуль.

Из того, что Δ не обращается в нуль, можно заключить, что существует периодическое решение с периодом 2π, которое обращается в

$$x_i = \varphi_i(t)$$

при $\mu = 0$. Если мы построим кривую

$$\Phi = 0,$$

соответствующую так определенным периодическим решениям, то эта кривая пройдет через начало координат, а прямая $\mu = 0$ не будет ее касательной, так как Δ не равен нулю.

Но решение с периодом 2π можно также рассматривать как периодическое решение с периодом $2k\pi$.

Попытаемся найти периодические решения с периодом $2k\pi$. Для этого нам надо решить уравнения

$$\psi_1' = \psi_2' = \ldots = \psi_n' = 0.$$

Исключая из этих уравнений $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$, мы получим единственное уравнение

$$\Phi'(\beta_n, \mu) = 0.$$

которое в силу наших соглашений будет представлять кривую, проходящую через начало координат. Среди решений с периодом $2k\pi$ имеются наши решения с периодом 2π; следовательно, кривая $\Phi = 0$ будет одной из ветвей кривой $\Phi' = 0$ (Φ' будет, следовательно, делиться на Φ) и эта ветвь не касается кривой $\mu = 0$.

Более того, так как Δ' равен нулю, то имеет место равенство

$$\frac{d\Phi'}{d\beta_n} = 0.$$

Следовательно, начало координат — кратная точка кривой $\Phi' = 0$. Итак, существуют решения с периодом $2k\pi$, отличные от решения с периодом 2π и сливающиеся с ним при $\mu = 0$.

Имеется несколько исключительных случаев, к которым мы вернемся в дальнейшем.

Я должен еще остановиться на случае, когда уравнения (1) п. 36 допускают интеграл

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \text{const},$$

левая часть которого (я буду для краткости обозначать ее через $F[x_i, t]$) является периодической функцией от t с периодом 2π.

Я утверждаю, что в этом случае уравнения

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0 \tag{1}$$

не будут, вообще говоря, независимыми.

Действительно, тождественно будет выполняться равенство

$$F[\varphi_i(0) + \beta_i; 0] = F[\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i; 2\pi] = F[\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i; 0]. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$F[\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i, 0] - F[\varphi_i(0) + \beta_i, 0] = 0. \tag{3}$$

Левую часть можно разложить в ряд по степеням ψ_i, β_i и μ; более того, она обращается в нуль, когда ψ_i обращаются в нуль.

Предположим, что при $x_i = \varphi_i(0)$, $\mu = 0$ нарушено равенство

$$\frac{dF}{dx_n} = 0.$$

Производная по ψ_n левой части (3) не будет обращаться в нуль при

$$\psi_i = 0, \quad \beta_i = 0, \quad \mu = 0.$$

Следовательно, в силу теоремы п. 30 мы можем получить из уравнения (3)

$$\psi_n = \theta(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \mu),$$

где θ — ряд по степеням $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ и μ, обращающийся

в нуль, когда одновременно

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_{n-1} = 0.$$

Итак, n-е из уравнений (1) является следствием $n - 1$ первых.

Если бы мы имели

$$\frac{dF}{dx_n} = 0, \qquad \frac{dF}{dx_1} \neq 0$$

при $x_i = \varphi_i(0)$, то первое из уравнений (1) было бы следствием $n - 1$ последних.

Во всех этих случаях уравнения (1) не независимы.

Исключением является лишь тот случай, когда одновременно

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \ldots = \frac{dF}{dx_n} = 0$$

при $x_i = \varphi_i(0)$, $\mu = 0$.

Итак, исключим одно из уравнений (1), например,

$$\psi_n = 0$$

(если $dF/dx_n \neq 0$) и разрешим относительно β систему

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_{n-1} = 0,$$

к которой прибавим n-е уравнение, выбранное произвольно, например, β_i=произвольная постоянная, или $F = C$ (C — заданная постоянная).

Итак, при каждом значении μ имеется бесконечное число периодических решений с периодом 2π; если же зафиксировать постоянную C (которой равна F), то в общем случае имеется только одно периодическое решение.

Если бы вместо одного однозначного интеграла мы имели два

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \text{const},$$
$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \text{const},$$

то два последних уравнения (1) были бы следствиями $n - 2$ первых, если только якобиан

$$\frac{dF}{dx_n}\frac{dF_1}{dx_{n-1}} - \frac{dF}{dx_{n-1}}\frac{dF_1}{dx_n}$$

не был бы равен нулю при $x_i = \varphi_i(0)$, $\mu = 0$.

Тогда можно было бы отбросить эти два последних уравнения

$$\psi_{n-1} = \psi_n = 0$$

и заменить их двумя другими, выбранными произвольно.

Случай, когда время не входит явно в уравнения

38. В предыдущих рассмотрениях мы предполагали, что функции X_1, X_2, ..., X_n, входящие в дифференциальные уравнения (1) п. 36, зависят от времени t.

Результаты изменились бы, если бы время t не входило в эти уравнения.

Прежде всего между этими двумя случаями имеется разница, которую невозможно не заметить. Мы предполагали прежде, что X были периодическими функциями времени и период был равен 2π; из этого вытекало, что если уравнения допускали периодические решения, то период этого решения должен был быть равным 2π или кратным 2π. Если, наоборот, X_i не зависят от t, то период решения может быть произвольным.

Затем, если уравнения (1) п. 36 допускают периодическое решение (и если X не зависят от t), то этих решений бесконечное число.

В самом деле, если

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \ \ldots, \ x_n = \varphi_n(t)$$

— периодическое решение уравнений (1), то при любой постоянной h то же самое можно сказать и о

$$x_1 = \varphi_1(t + h), \qquad x_2 = \varphi_2(t + h), \ \ldots, \ x_n = \varphi_n(t + h).$$

Итак, случай, на котором мы остановились прежде всего и когда при $\mu = 0$ уравнения (1) допускают единственное периодическое решение, не может представиться, если X не зависят от t.

Займемся теперь случаем, когда время t не входит явно в эти уравнения и предположим, что при $\mu = 0$ они допускают периодическое решение с периодом T

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \ \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(t). \tag{4}$$

Пусть $\varphi_i(0) + \beta_i$ — значение x_i при $t = 0$; если $\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i$ — значение x_i при $t = T + \tau$, то ψ_i будут голоморфными функциями μ, β_1, β_2, ..., β_n и τ и будут обращаться в нуль вместе с этими переменными.

Итак, нам надо решить n уравнений

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0 \tag{5}$$

относительно $n + 1$ неизвестной

$$\beta_1, \ \beta_2, \ \ldots, \ \beta_n, \ \tau.$$

У нас имеется одна лишняя неизвестная, поэтому мы можем распоряжаться ею произвольно, например, положить

$$\beta_n = 0.$$

Из уравнений (5) мы затем найдем $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ и τ в виде голоморфных функций от μ, обращающихся в нуль вместе с μ. Это можно сделать, если только определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_1}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_1}{d\tau} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_2}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_2}{d\tau} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_n}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_n}{d\tau} \end{vmatrix}$$

не равен нулю при $\mu = \beta_i = \tau = 0$.

Если определитель равен нулю, то вместо того, чтобы произвольно полагать $\beta_n = 0$, можно положить, например, $\beta_i = 0$. Наш метод не проходит, если все миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_1}{d\beta_n} & \frac{d\psi_1}{d\tau} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_2}{d\beta_n} & \frac{d\psi_2}{d\tau} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_n}{d\beta_n} & \frac{d\psi_n}{d\tau} \end{pmatrix}$$

равны нулю одновременно (следует заметить, что определитель, полученный вычеркиванием последнего столбца этой матрицы, всегда равен нулю при $\mu = \beta_i = \tau = 0$).

Так как в общем случае все эти миноры не равны нулю одновременно, то дифференциальные уравнения (1) п. 36 допускают при малых значениях μ периодическое решение с периодом $T + \tau$.

Обозначим через

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Delta_{n+1}$$

определители, содержащиеся в этой матрице; определитель Δ_i получается, если в матрице вычеркнуть i-й столбец.

Исходное периодическое решение дифференциальных уравнений, которое они допускают при $\mu = 0$, записывалось, как мы помним, в виде

$$x_i = \varphi_i(t).$$

Я обозначаю через $\varphi_i'(t)$ производную от функции $\varphi_i(t)$ и намерен доказать следующее: если производная $\varphi_n'(0)$ не равна нулю, то определи-

тель Δ_n не может обратиться в нуль, если только все определители

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Delta_{n+1}$$

не обращаются одновременно в нуль.

В самом деле, предположим, что не все эти определители равны нулю одновременно, а определитель Δ_n равен нулю. Я утверждаю, что $\varphi_n'(0)$ будет равна нулю.

Так как дифференциальные уравнения не содержат время в явном виде, то они допускают при $\mu = 0$ периодическое решение,

$$x_i = \varphi_i(t + h),$$

какова бы ни была константа h.

Следовательно, если положить

$$\tau = 0, \quad \mu = 0, \quad \beta_i = \varphi_i(h) - \varphi_i(0),$$

то ψ_i обратятся в нуль при любом h.

Это будет иметь место и при бесконечно малом h, что приводит к соотношениям

$$\frac{d\psi_i}{d\beta_1}\varphi_1'(0) + \frac{d\psi_i}{d\beta_2}\varphi_2'(0) + \ldots + \frac{d\psi_i}{d\beta_n}\varphi_n'(0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Эти соотношения показывают прежде всего, что определитель Δ_{n+1} равен нулю.

Кроме того, величины

$$\frac{d\psi_i}{d\beta_k}, \quad \frac{d\psi_i}{d\tau}$$

не могут быть связаны с другими линейными соотношениями того же вида, т. е. вида

$$A_1\frac{d\psi_i}{d\beta_1} + A_2\frac{d\psi_i}{d\beta_2} + \ldots + A_n\frac{d\psi_i}{d\beta_n} + A_{n+1}\frac{d\psi_i}{d\beta_{n+1}} = 0 \tag{2}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Действительно, в противном случае все определители обратились бы в нуль одновременно.

Мы предположили, что Δ_n равен нулю. Между тем этот определитель является не чем иным, как функциональным определителем $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ и β_n по $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ и τ. Сказать, что этот определитель равен нулю,— это сказать, что между производными от ψ имеются соотношения вида (2) и что, кроме того,

$$A_1\frac{d\beta_n}{d\beta_1} + A_2\frac{d\beta_n}{d\beta_2} + \ldots + A_n\frac{d\beta_n}{d\beta_n} + A_{n+1}\frac{d\beta_n}{d\tau} = 0,$$

т. е.

$$A_n = 0.$$

Но других соотношений вида (2), кроме соотношений (6), не может быть. Значит

$$A_n = \varphi_n'(0)$$

и, следовательно,

$$\varphi_n'(0) = 0.$$

Итак, если $\varphi_n'(0)$, не равно нулю (а это можно всегда предположить, так как, если бы было не так, то подходящей замены переменных было бы достаточно, чтобы прийти к этому случаю), то бесполезно рассматривать все определители Δ_i, достаточно рассмотреть Δ_n.

Если Δ_n не равен нулю, то разрешим относительно β уравнения

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = \beta_n = 0. \tag{3}$$

Сперва может показаться, что произвольное введение уравнения $\beta_n = 0$ уменьшит общность и что таким образом можно найти лишь те периодические решения, для которых β_n равно нулю при $t = 0$. Но другие решения получаются, если заменить t на $t + h$, где h — произвольная постоянная.

Если, наоборот, Δ_n равен нулю, то, исключая $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ и τ из уравнений (3), получим единственное уравнение

$$\Phi(\beta_1, \mu) = 0,$$

аналогичное уравнению того же вида из предыдущего пункта.

Это уравнение можно рассматривать как уравнение кривой, проходящей через начало координат, и изучение этой кривой позволяет исследовать все возможные случаи.

Впрочем, мы встретимся здесь в точности с теми же явлениями, что и в предыдущем пункте.

Например, когда μ непрерывно меняется, периодические решения могут исчезать лишь парами, подобно корням алгебраических уравнений.

Может также случиться, что при $\mu = 0$ и $\beta_n = 0$ существует бесконечное число периодических решений. Тогда Φ делится на μ и можно записать

$$\Phi = \mu\Phi_1,$$

так что кривая $\Phi = 0$ распадается на две — прямую $\mu = 0$ и кривую $\Phi_1 = 0$. В этом случае мы сможем заменить уравнение

$$\Phi = 0$$

уравнением

$$\Phi_1 = 0.$$

Может даже случиться, что некоторые из функций ψ_i будут делиться на μ, так что, например,

$$\psi_1 = \mu\psi_1', \qquad \psi_2 = \mu\psi_2', \qquad \psi_3 = \mu\psi_3',$$

где ψ_1', ψ_2', ψ_3' — голоморфные функции μ, β и τ.

Мы сможем тогда заменить уравнения (3) следующими:

$$\beta_n = 0, \qquad \psi_1' = \psi_2' = \psi_3' = 0, \qquad \psi_4 = \psi_5 = \ldots = \psi_n = 0.$$

Примеры этого мы увидим в дальнейшем.

Если предположить, что существует интеграл

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const},$$

то уравнения (3) не все независимы и их можно заменить следующими:

$$\beta_n = 0, \qquad F = C + \lambda\mu, \qquad \psi_2 = \psi_3 = \ldots = \psi_n = 0,$$

где

$$C = F[\varphi_1(0), \varphi_2(0), \ldots, \varphi_n(0)],$$

а λ — произвольная постоянная.

Можно также заменить уравнения (3) следующими:

$$\beta_n = 0, \quad \tau = 0, \quad \psi_2 = \psi_3, = \ldots, = \psi_n = 0,$$

откуда вытекает важное следствие: в общем случае при малых значениях μ нет периодического решения, имеющего тот же период T, что и при $\mu = 0$; наоборот, если существует интеграл $F = \text{const}$, то можно найти, при достаточно малых μ, периодическое решение, имеющее период, в точности равный T.

Действительно, если при $x_i = \varphi_i(0)$ нарушается равенство

$$\frac{dF}{dx_1} = 0,$$

то из уравнений

$$\psi_2 = \psi_3 = \ldots = \psi_n = 0$$

вытекает, что $\psi_1 = 0$.

Вот другое обстоятельство, с которым мы уже встретились в предыдущем пункте и к которому возвращаемся здесь.

Пусть β_i — значение x_i при $t = 0$, $\beta_i + \psi_i$ — значение x_i при $t = T + \tau$ и $\beta_i + \psi_i'$ — значение x_i при $t = kT + \tau$, где k — целое число.

Представим себе, что функциональный определитель ψ_i по $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, \tau$ не равен нулю, но функциональный определитель ψ_1' равен нулю.

Исключив $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ и τ из уравнений

$$\psi_i = 0, \quad \beta_n = 0,$$

мы получим единственное уравнение

$$\Phi(\beta_1, \mu) = 0;$$

мы будем рассматривать его как уравнение кривой, имеющей в начале координат простую точку.

Исключим теперь $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ и τ из уравнений

$$\psi_i' = 0, \quad \beta_n = 0,$$

получим

$$\Phi'(\beta_1, \mu) = 0.$$

Мы видим, как и в предыдущем пункте, что Φ' делится на Φ. Кривую $\Phi = 0$ можно, следовательно, рассматривать как одну из ветвей кривой $\Phi' = 0$. Так как функциональный определитель ψ_i' равен нулю, должно выполняться равенство

$$\frac{d\Phi'}{d\beta_1} = 0.$$

Следовательно, или кривая $\Phi' = 0$ имеет несколько ветвей, проходящих через начало координат, или же ее касательной должна быть прямая $\mu = 0$.

Но одна из ветвей кривой $\Phi' = 0$, а именно $\Phi = 0$, нам уже известна, и мы знаем, что касательная к этой ветви не является прямой $\mu = 0$. Следовательно, кривая $\Phi' = 0$ имеет другие ветви, проходящие через начало.

Это означает, что дифференциальные уравнения допускают периодические решения, период которых мало отличается от kT; эти решения отличны от периодических решений с периодом T при малых значениях μ, но совпадают с ними при $\mu = 0$.

Приложение к задаче трех тел

39. Допускает ли задача трех тел периодические решения? Будем снова пользоваться обозначениями п. 11 и обозначим три массы через m_1, $\alpha_2\mu$ и $\alpha_3\mu$. Если положить $\mu = 0$, т. е. если две малые массы считать равными нулю, то большая масса будет неподвижной и каждая из двух малых масс будет описывать вокруг большой кеплеров эллипс.

Тогда ясно, что если средние движения этих двух малых масс соизмеримы между собой, то вся система через некоторое время придет в начальное положение и, следовательно, решение будет периодическим.

Но это еще не все: вместо того, чтобы отнести три массы к неподвижным осям (или же подвижным, остающимся всегда параллельными неподвиж-

ным осям, как в п. 11), можно их отнести к подвижным осям, находящимся в равномерном вращательном движении.

Тогда может оказаться, что координаты трех масс относительно неподвижных осей не будут периодическими функциями времени, в то время как координаты относительно подвижных осей будут, напротив, периодическими функциями времени (ср. п. 36).

Предположим теперь, что $\mu = 0$; две малые массы будут описывать кеплеровы эллипсы. Предположим также, что оба эти эллипса будут лежать в одной плоскости, например, в плоскости x_1x_2, и что их эксцентриситеты равны нулю. Движение двух малых масс будет тогда круговым и равномерным. Пусть n и n' — средние движения этих двух масс ($n' > n$).

Предположим, что за начальный момент времени было выбрано соединение, причем начальные долготы обеих масс равны нулю.

По прошествии времени $2\pi/(n' - n)$ эти долготы станут соответственно $2\pi n/(n' - n)$ и $2\pi n'/(n' - n)$ и их разность будет равна 2π.

Так как две массы находятся в соединении, взаимное расположение всех трех тел будет то же, что и в начале. Но только вся система повернулась на угол, равный $2\pi n/(n' - n)$.

Итак, если пользоваться системой координат, равномерно вращающейся с угловой скоростью n, то координаты трех тел относительно этих подвижных осей будут периодическими функциями времени с периодом $2\pi/(n' - n)$.

С этой точки зрения и в силу того, что мы говорили в конце п. 36, это решение можно рассматривать как периодическое.

Итак, в предельном случае, когда $\mu = 0$, задача трех тел допускает периодические решения. Имеем ли мы право отсюда заключить, что периодические решения существуют и при малых значениях μ? Именно к этому заключению позволяют нам прийти принципы пунктов 37 и 38.

Первым периодическим решением, которое было обнаружено в случае $\mu > 0$, было решение, открытое Лагранжем; при этом три тела описывали подобные кеплеровы эллипсы, в то время как их взаимные расстояния сохраняли постоянное отношение (ср.: L a p l a c e. Mécanique céleste, livre X, Chap. VI). Этот случай слишком хорошо изучен, чтобы к нему возвращаться.

Хилл в своих знаменитых исследованиях о теории Луны («American Journal of Mathematics», t. I) [14] изучил другой случай, важность которого с практической точки зрения значительно больше.

Я вернулся к этому вопросу в «Bulletin astronomique» (t. I, p. 65) [15] и пришел к заключению, что надо различать три сорта периодических решений: для решений первого сорта наклонения равны нулю, а эксцентриситеты очень малы, для решений второго сорта наклонения равны нулю и эксцентриситеты конечны. Наконец, для решений третьего сорта наклонения не равны нулю.

Во всех этих случаях взаимные расстояния трех тел являются периодическими функциями времени; в конце каждого периода все три тела нахо-

дятся всегда в одном и том же относительном положении, только вся система поворачивается на некоторый угол. Для того чтобы координаты трех тел были периодическими функциями времени, их надо относить к системе подвижных осей, совершающей равномерное вращательное движение.

Скорость этого вращательного движения конечна для решений первого сорта и очень мала для решений второго и третьего сорта.

Решения первого сорта

40. Я хочу воспроизвести здесь то, что уже излагал по поводу этих трех сортов решений. Начну с решений первого сорта, которые содержат в качестве частного случая решения Хилла.

Вновь воспользуемся обозначениями п. 11. Пусть A, B, C — три массы, которые я предполагаю остающимися все время в одной плоскости. Пусть D — центр тяжести A и B; x_1 и x_2 — координаты B относительно осей, параллельных неподвижным осям, с началом в A; x_3 и x_4 — координаты C относительно осей, параллельных неподвижным, с началом в D.

Примем переменные п. 12, т. е. переменные

$$\Lambda, \Lambda', \xi, \xi', p, p',$$
$$\lambda, \lambda', \eta, \eta', q, q'.$$

В данном случае, так как движение происходит в плоскости,

$$p = p' = q = q' = 0.$$

Взаимные расстояния между тремя телами и производные по времени этих расстояний являются функциями переменных

$$\begin{gathered}\Lambda, \quad \Lambda', \quad \xi\cos\lambda - \eta\sin\lambda, \quad \xi\sin\lambda + \eta\cos\lambda, \\ \xi'\cos\lambda' - \eta'\sin\lambda', \quad \xi'\sin\lambda' + \eta'\cos\lambda'\end{gathered} \tag{1}$$

и разности $\lambda' - \lambda$.

Поэтому, чтобы решение было периодическим, надо, чтобы в конце периода переменные (1) принимали свои первоначальные значения и чтобы разность $\lambda' - \lambda$ увеличивалась на величину, кратную 2π; например, пусть $\lambda' - \lambda$ увеличится на 2π.

Если положить $\mu = 0$, движение будет кеплеровым; предположим, кроме того, что первоначальные значения λ, λ', ξ, η, ξ', η' равны нулю, тогда движение будет круговым и равномерным.

Если начальные значения Λ_0 и Λ_0' величин Λ и Λ' выбраны так, что средние движения равны n и n', решение будет периодическим с периодом $2\pi/(n' - n)$.

Не будем больше предполагать, что μ равно нулю и рассмотрим произвольное решение. Мы можем выбрать за начальный момент времени момент

соединения и за начало отсчета долгот долготу этого соединения. Начальные значения λ и λ' будут тогда равны нулю.

Пусть $\Lambda_0 + \beta_1$, $\Lambda_0' + \beta_2$ — начальные значения Λ и Λ'; ξ_0, η_0, ξ_0', η_0' — начальные значения ξ, η и ξ', η'. Это будут также и начальные значения четырех последних переменных (1).

Пусть теперь $2\pi + \psi_0$ — значение $\lambda' - \lambda$ в конце периода $2\pi/(n' - n)$.

Пусть в конце того же самого периода

$$\Lambda_0 + \beta_1 + \psi_1, \qquad \Lambda_0' + \beta_2 + \psi_2$$

— значения Λ и Λ' и

$$\xi_0 + \psi_3, \qquad \eta_0 + \psi_4, \qquad \xi_0' + \psi_5, \qquad \eta_0' + \psi_6$$

— значения четырех последних переменных (1).

Для того чтобы решение было периодическим, необходимо, чтобы

$$\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = \psi_5 = \psi_6 = 0.$$

Эти уравнения не все независимы; действительно, дифференциальные уравнения движения допускают два интеграла: интеграл живой силы и интеграл площадей. Якобиан этих двух интегралов по Λ и Λ' не равен нулю при

$$\mu = 0, \qquad \xi = \eta = \xi' = \eta' = 0.$$

Уравнения $\psi_1 = \psi_2 = 0$ являются поэтому следствием пяти остальных. Следовательно, нам надо разрешить систему

$$\psi_0 = \psi_3 = \psi_4 = \psi_5 = \psi_6 = 0, \tag{2}$$

к которой мы присоединим уравнение живых сил $F = C$, где постоянную C будем рассматривать как фиксированную.

Итак, нужно рассмотреть функциональный определитель левых частей этих шести уравнений по шести переменным

$$\beta_1, \beta_2, \xi_0, \eta_0, \xi_0', \eta_0'$$

и показать, что этот определитель не обращается в нуль при

$$\mu = \beta_1 = \beta_2 = \xi_0 = \eta_0 = \xi_0' = \eta_0' = 0.$$

Но при $\mu = 0$

$$F = F_0 = \frac{\gamma}{(\Lambda_0 + \beta_1)^2} + \frac{\gamma'}{(\Lambda_0' + \beta_2)^2},$$

где γ и γ' — постоянные, зависящие от масс,

$$\psi_0 = \frac{2\pi}{n'-n}\left[n'\left(1+\frac{\beta_2}{\Lambda_0'}\right)^{-3} - n\left(1+\frac{\beta_1}{\Lambda_0}\right)^{-3}\right],$$

$$\psi_3 = \xi_0(\cos\lambda_0 - 1) - \eta_0 \sin\lambda_0, \qquad \psi_4 = \xi_0 \sin\lambda_0 + \eta_0(\cos\lambda_0 - 1),$$

$$\psi_5 = \xi_0'(\cos\lambda_0' - 1) - \eta_0' \sin\lambda_0', \qquad \psi_6 = \xi_0' \sin\lambda_0' + \eta_0'(\cos\lambda_0' - 1),$$

где

$$\lambda_0 = \frac{2n\pi}{n'-n}\left(1+\frac{\beta_1}{\Lambda_0}\right)^{-3}, \qquad \lambda_0' = \frac{2n'\pi}{n'-n}\left(1+\frac{\beta_2}{\Lambda_0'}\right)^{-3}.$$

Итак, λ_0 и λ_0' обозначают значения двух долгот в конце периода, так что

$$2\pi + \psi_0 = \lambda_0' - \lambda_0.$$

Таким образом, при $\mu = 0$ F и ψ_0 зависят только от β_1 и β_2; ψ_3 и ψ_4 от β_1, ξ_0 и η_0; ψ_5 и ψ_6 от β_2, ξ_0' и η_0'.

Следовательно, наш функциональный определитель является произведением трех других:

1) определителя F_0 и ψ_0 по β_1 и β_2;
2) определителя ψ_3 и ψ_4 по ξ_0 и η_0;
3) определителя ψ_5 и ψ_6 по ξ_0' и η_0'.

Первый из этих трех определителей обращается в нуль лишь при $\Lambda_0 = -\Lambda_0'$, $n = -n'$; впрочем, это неважно, потому, что если он обращается в нуль, то вместо того, чтобы присоединять к системе (2) уравнение живых сил, к ней можно присоединить любое другое произвольно выбранное уравнение относительно β_1 и β_2. Как бы то ни было, поскольку случай $n = -n'$ представляет трудности различного рода и не интересен для приложений, мы не будем его касаться.

Второй определитель сводится к

$$(1 - \cos\lambda_0)^2 + \sin^2\lambda_0.$$

Следовательно, он может обращаться в нуль, лишь если λ_0 кратно 2π. При

$$\beta_1 = \beta_2 = \xi_0 = \eta_0 = \xi_0' = \eta_0' = 0$$

имеет место равенство

$$\lambda_0 = \frac{2n\pi}{n'-n}.$$

Следовательно, наш определитель обращается в нуль, только если n кратно разности $n' - n$.

Точно так же третий определитель обратится в нуль, лишь если n' и, следовательно, n кратно $n' - n$.

Из этого следует, что для любых значений постоянной живых сил C, равной

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \gamma^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{n'}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \gamma'^{\frac{1}{3}},$$

и для малых значений μ задача трех тел допускает периодическое решение первого рода с периодом $2\pi/(n' - n)$.

Исключением является лишь тот случай, когда n кратно $n' - n$ или $n = -n'$.

Имеется четырехкратно бесконечное множество периодических решений первого сорта; действительно, при достаточно малом μ мы можем произвольно выбрать:

1. Период $2\pi/(n_0' - n_0) = T$.
2. Постоянную C.
3. Момент соединения, который в предыдущих рассуждениях был нами выбран за начальный момент времени.
4. Долготу соединения, которую мы выбрали за начало отсчета долгот.

Таким образом, для каждого значения μ мы имеем ∞^4 периодических решений.

Эти решения можно найти следующим образом.

Предположим, что в начальный момент времени имеем

$$\lambda = \lambda' = \eta = \eta' = 0;$$

три тела будут в соединении, а их скорости будут перпендикулярны соединяющей их прямой; эта прямая будет, кроме того, осью Ax_1, которая в этот момент совпадает с осью Dx_3. Из этой симметрии положения трех тел в момент 0 немедленно вытекают следующие следствия: значения радиусов-векторов в моменты t и $-t$ будут одинаковыми; значения долгот в моменты t и $-t$ будут равными, но с противоположными знаками.

Мы будем говорить тогда, что в момент 0 три тела находятся в *симметричном соединении*.

Мы предположили, что в момент 0 имеет место симметричное соединение и в этот момент общая долгота трех тел равна нулю; таким образом, мы определим четыре из оскулирующих элементов: λ, λ', η и η'; остаются еще четыре, которые являются произвольными, а именно, Λ, Λ', ξ и ξ'. Мы распорядимся ими так, чтобы в момент $T/2$ снова было симметричное соединение и чтобы общая долгота трех тел была

$$\nu = \frac{n\pi}{n' - n}, \qquad \nu' = \frac{n\pi}{n' - n} + \pi,$$

где ν и ν' — истинные долготы.

Здесь, собственно говоря, речь идет не о симметричном соединении, но о *симметричном противостоянии*.

Для того чтобы имело место симметричное соединение (или противостояние), необходимы, как только что было показано, четыре условия. Следовательно, мы получим четыре уравнения для определения четырех элементов, оставшихся произвольными. Эти четыре уравнения могут быть разрешены, если соответствующий функциональный определитель не равен нулю; но в общем случае он не равен нулю, в чем можно убедиться с помощью нетрудных вычислений, подобных тем, которые были проделаны выше и приводить которые снова не имеет смысла.

Итак, радиусы-векторы имеют одинаковые значения в момент t и момент $-t$, а также в момент t и $T - t$ (поскольку в момент $T/2$ имеет место симметричное соединение). Что касается разности долгот, ее значения в моменты t и $-t$ (или же в моменты t и $T - t$) равны по величине и имеют противоположные знаки.

Следовательно, взаимные расстояния между тремя телами меняются периодически с периодом T. Итак, эти решения, которые представляют то симметричные соединения, то симметричные противостояния, являются периодическими решениями.

Можно было бы подумать, что таким образом определенные периодические решения являются менее общими, чем те, существование которых мы доказали вначале. Ничуть не бывало; таких решений также четырехкратно бесконечное множество, так как мы можем выбрать произвольным образом моменты соединения и противостояния и долготу трех тел в момент соединения и противостояния; следовательно, остаются четыре произвольные постоянные. Отсюда видно, что все решения первого сорта принадлежат одной этой категории. Если подходящим образом выбрать момент 0, то для всех решений первого сорта в начале каждого периода будет иметь место симметричное соединение, а в середине каждого периода — симметричное противостояние.

В этом можно убедиться еще и следующим образом.

Всегда можно предполагать, что начальный момент времени был выбран так, что начальные значения λ и λ' равны нулю. Для этого достаточно за начальный момент времени принять момент соединения, а за начальное значение долготы — долготу этого соединения.

С другой стороны, уравнения задачи трех тел представляют следующую симметрию: они не изменяются, если заменить t на $-t$ или же одновременно заменить λ на $-\lambda$ и λ' на $-\lambda'$.

Следовательно, если имеются периодические решения, с начальными значениями переменных $\Lambda, \Lambda', \lambda, \lambda', \xi, \eta, \xi', \eta'$, равными $\Lambda_0 + \beta_1, \Lambda_0' + \beta_2, 0, 0, \xi_0, \eta_0, \xi_0', \eta_0'$, то периодическим будет и решение с начальными значениями

$$\Lambda_0 + \beta_1, \quad \Lambda_0' + \beta_2, \quad 0, \quad 0, \quad \xi_0, \quad -\eta_0, \quad \xi_0', \quad -\eta_0'.$$

Следовательно, уравнения (3) не изменяются, когда η_0 и η_0' заменяют на $-\eta_0$ и $-\eta_0'$.

Но эти уравнения (3) имеют лишь одно решение; следовательно, должно выполняться равенство

$$\eta' = \eta_0' = 0,$$

означающее, что в начальный момент времени имеет место симметричное соединение, что и требовалось доказать.

Все ∞^4 периодических решений первого сорта связаны между собой простыми соотношениями. Можно перейти от одного решения к другому следующими способами: 1) изменяя начало отсчета времени; 2) изменяя начало отсчета долготы; 3) изменяя одновременно единицы длины и времени таким образом, чтобы единица длины увеличивалась в $k^{2/3}$ раз, когда единица времени увеличивается в k раз. Все эти изменения не меняют формы уравнений и, следовательно, могут только заменить одно периодическое решение на другое. Итак, по существу имеется только *однократная* бесконечность периодических решений, *действительно* различных; каждое из этих решений характеризуется отношением $n_0'/(n_0' - n_0)$, или, что то же самое, разностью между долготой симметричного соединения и долготой следующего за ним противостояния.

Исследования Хилла по теории Луны

41. Имеется частный случай, когда решения первого сорта упрощаются. Это тот случай, когда одна из масс, например масса m_2, бесконечно мала.

Поскольку движение C относительно A остается тогда кеплеровым, симметричное соединение может произойти, лишь когда C проходит перигелий или афелий, если только движение C не круговое. Но долгота симметричного соединения должна тогда отличаться от долготы симметричного противостояния, которое за ним немедленно следует, на угол, кратный π. Однако так может быть, только если $n_0'/(n_0' - n_0)$ целое, а это как раз тот случай, который мы исключили. Следовательно, мы должны заключить, что движение C является круговым.

Положение еще больше упрощается, если предположить, что масса C намного больше массы A и что расстояние AC очень велико (что как раз имеет место в теории Луны). Если мы предположим AC бесконечно большим и массу C бесконечно большой, так, чтобы угловая скорость C на ее орбите оставалась конечной; если в то же время отнести массу B к двум подвижным осям, а именно к оси $A\xi$, совпадающей с AC, и оси $A\eta$, перпендикулярной первой, то уравнения движения, как было показано Хиллом, примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{\mu}{r^3} - 3n^2\right)\xi = 0, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2n\frac{d\xi}{dt} + \frac{\mu}{r^3}\eta = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где n — угловая скорость C.

Периодические решения первого сорта все еще существуют в этом случае и являются теми решениями, существование которых первым установил Хилл, как я уже заметил выше.

Они допускают симметричные соединения и противостояния, которые могут иметь место лишь на оси ξ. Но они также допускают другие весьма важные конфигурации, которые можно было бы назвать симметричными квадратурами; в этих конфигурациях угол BAC прямой и скорость точки B относительно точки A перпендикулярна BA.

Действительно, уравнения столь симметричны, что они не изменяются при замене ξ на $-\xi$. Периодические решения, следовательно, не должны изменяться при замене ξ на $-\xi$. Следовательно, если рассматривать *относительную* траекторию точки B по отношению к системе подвижных осей $A\xi$ и $A\eta$, то эта траектория является замкнутой кривой (поскольку решение периодическое), которая симметрична одновременно и относительно $A\xi$ и относительно $A\eta$.

Если, наоборот, предполагая движение C круговым и беря за ось ξ прямую AC, не предполагать расстояние AC бесконечным (если, другими словами, в теории Луны учитывать параллакс Солнца, продолжая пренебрегать наклонением орбит и эксцентриситетом Солнца), то эта относительная траектория была бы замкнутой кривой, симметричной относительно оси ξ, но она не была бы симметричной относительно оси η.

Уравнения (1) имеют интеграл, который записывается в виде

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2-\frac{\mu}{r}-\frac{3}{2}n^2\xi^2=C.$$

Хилл изучил, как изменяются решения первого сорта при увеличении C; он установил, что относительная траектория является замкнутой симметричной кривой, форма которой напоминает в грубом приближении форму эллипса, большой осью которого является ось η. Когда C очень мало, эллипс подобного рода очень мало отличается от окружности и его эксцентриситет быстро растет вместе с C. Для больших значений C кривая начинает сильно отличаться от эллипса, но отношение большой оси к малой продолжает расти вместе с C; наконец, для некоторого значения C, которое я буду называть C_0, кривая будет иметь две точки возврата, расположенные на оси η. Это то, что Хилл называет орбитой «Луны наибольшей лунации» (Moon of maximum lunation). Его вычисления, основанные то на использовании рядов, то на использовании механических квадратур, слишком длинны, чтобы приводить их здесь; я замечу только, что Хилл точно построил кривую для различных значений C, в частности для случая $C = C_0$. Не может быть ни малейшей тени сомнения по поводу точности его результатов.

Нетрудно отдать себе отчет в значении этих точек возврата. Я предполагаю, что в некоторый момент скорость массы B по отношению к подвиж-

ным осям станет равной нулю, так что одновременно

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = 0;$$

ясно, что относительная траектория будет иметь точку возврата. Именно это происходит в случае «Луны наибольшей лунации» Хилла. Хилл говорит далее следующее *:

«*The moon of the last line* (т. е. «Луна наибольшей лунации») *is, of the class of satellites considered in this Chapter, that which, having the longest lunation, is still able to appear at all angles with the Sun and then undergo all possible phases.* Whether this class of satellites is properly to be prolonged beyond this Moon, can only be decided by further employment of mechanical quadratures. But it is at least certain that the orbits, if they do exist, *do not intersect the line of quadratures* and that the Moons describing them would make oscillations to and for, never departing as much as 90° from the points of conjunction or of opposition».

Со стороны автора это всего лишь простая интуиция, не основанная ни на каком рассуждении или вычислении. Простые рассмотрения аналитического продолжения позволяют мне утверждать, что эта интуиция его обманула [16].

Можно прежде всего задать вопрос, существуют ли периодические решения первого сорта при $C > C_0$ или, другими словами, может ли класс спутников, изученный Хиллом, быть продолжен за орбиту «Луны наибольшей лунации»?

Предположим с этой целью, что в начальный момент времени масса B (т. е. Луна) находится в квадратуре (на оси η) и что ее скорость относительно подвижных осей перпендикулярна к оси η.

Я обозначу через ξ_0, ξ_0', η_0, η_0' начальные значения переменных ξ, $d\xi/dt = \xi'$, η и $d\eta/dt = \eta'$. В случае хилловой «Луны наибольшей лунации» имеем

$$\xi_0 = \xi_0' = \eta_0' = 0,$$

и я обозначу через η_0^0 соответствующее значение η_0.

По истечении времени T, равного четверти периода, эта Луна будет находиться в симметричном соединении и будут выполняться равенства

$$\eta = 0, \qquad \xi' = 0.$$

---

* «*Луна последней кривой* (т. е. Луна наибольшей лунации) *является таким спутником из класса рассматриваемых в настоящей главе, который, имея наибольшую лунацию, может еще появляться под всеми углами относительно Солнца и затем проходить всевозможные фазы.* Вопрос о том, правильно ли будет продолжить рассматриваемый класс за эту Луну, может быть решен только с помощью дальнейшего применения механических квадратур.

Но во всяком случае не подлежит сомнению, что эти орбиты, если они существуют, *не пересекают линии квадратур* и что луны, описывающие эти орбиты, будут совершать колебания, никогда не отклоняясь более чем на 90° от точек соединения и противостояния».

Рассмотрим теперь другое частное решение наших дифференциальных уравнений и пусть

$$0, \xi_{0}', \eta_{0}, 0$$

— начальные значения

$$\xi, \xi', \eta, \eta',$$

так что в начальный момент времени имеет место симметричная квадратура.

Рассмотрим значения η и ξ' по истечении времени $T + \tau$ и пусть

$$\eta = f_1(T + \tau, \xi_0', \eta_0),$$
$$\xi' = f_2(T + \tau, \xi_0', \eta_0).$$

f_1 и f_2 будут разлагаться в ряд по степеням τ, ξ_0' и $\eta_0 - \eta_0^0$ и обратятся в нуль при

$$\tau = \xi_0' = 0, \qquad \eta_0 = \eta_0^0.$$

Если

$$f_1 = f_2 = 0, \tag{2}$$

то по истечении времени $T + \tau$ произойдет симметричное соединение и решение будет периодическим с периодом $4T + 4\tau$.

Из уравнений (2) можно выразить τ и η_0 в виде функций от ξ_0', и τ и η_0 будут разлагаться в ряд по степеням ξ_0'.

В силу п. 30 исключением будет лишь тот случай, когда функциональный определитель f_1 и f_2 по τ и η_0 обращается в нуль в точности при

$$\tau = \xi_0' = 0, \qquad \eta_0 = \eta_0^0.$$

Представляется крайне невероятным, чтобы дело обстояло так; однако могли бы еще оставаться некоторые сомнения, если бы механические квадратуры Хилла не доказывали обратное. В самом деле, вот как Хилл действовал, чтобы определить η_0^0. Он вычислил для различных значений T и η_0 функции

$$f_1(T, 0, \eta_0), \qquad f_2(T, 0, \eta_0),$$

а затем определил с помощью интерполяции те значения T и η_0, при которых эти функции обращаются в нуль. Если бы функциональный определитель f_1 и f_2 обращался в нуль в точности для этих значений, обычная интерполяция была бы невозможной. Следовательно, мы должны заключить, что открытый Хиллом класс спутников может быть продолжен за пределы «Луны наибольшей лунации».

Какой же становится за пределами этой Луны форма орбиты? Величины ξ и η зависят от времени t и параметра ξ_0', так как другое начальное значение η_0 задано как функция от ξ_0' в силу уравнений (2).

Если ξ_0' и t достаточно малы, ξ и η могут быть разложены в ряд по степеням этих двух переменных. Более того, из соображений симметрии ξ будет содержать лишь нечетные степени t, а η будет содержать лишь четные степени t. Следовательно,

$$\xi = \xi_0' t + \frac{\xi_0'''}{6} t^3 + \frac{\xi_0^{V}}{120} t^5 + \ldots,$$

где $\xi_0^{(n)}$ — начальное значение n-й производной ξ_0.

Если ξ_0' и t достаточно малы, я могу без ощутимой погрешности ограничить ряд ξ его двумя первыми членами; кроме того, ξ_0''' разлагается в ряд по возрастающим степеням ξ_0'; но так как ξ_0' очень мало, я могу ограничиться значением ξ_0''', которое эта величина принимает при $\xi_0' = 0$. Но при $\xi_0' = 0$ имеем

$$\xi_0''' = -\frac{2\mu n}{(\eta_0^0)^2};$$

отсюда следует

$$\xi = \xi_0' t - \frac{\mu n}{3(\eta_0^0)^2} t^3. \tag{3}$$

Для рассмотренных Хиллом Лун, у которых «лунации» меньше, чем у «Луны наибольшей лунации», величина ξ_0' отрицательна, оба члена правой части (3) одного и того же знака и ξ не может обращаться в нуль при весьма малых значениях t, за исключением значения $t = 0$.

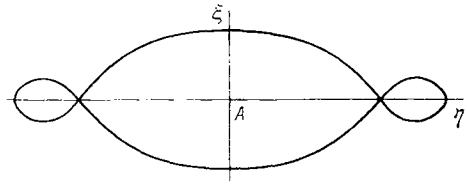


Рис. 1

Напротив, для новых спутников, о которых идет речь и которые встречаются за орбитой «Луны наибольшей лунации», ξ_0' положительно, а ξ обращается в нуль при

$$t = 0, \quad t = \pm \eta_0^0 \sqrt{\frac{3\xi_0'}{\mu n}}.$$

Следовательно, имеются три очень малых значения t, при которых ξ обращается в нуль, т. е. три квадратуры в очень близкие моменты времени.

Итак, относительная траектория при $C > C_0$ имеет форму, представленную на рис. 1.

В течение одного периода масса B находится шесть раз в квадратуре, так как ее относительная траектория пересекает ось η в двух двойных точках и двух простых.

Таким образом, Хилл ошибается, полагая, что этот род спутников никогда не находится в квадратуре; *имеются, напротив, три квадратуры между двумя последовательными сизигиями.*

Это не значит, что не существует периодических решений, при которых масса B никогда не может быть в квадратуре: мы их изучим в дальнейшем, в п. 52; но эти решения не являются аналитическим продолжением тех, основополагающее исследование которых проделал Хилл в «American Journal of Mathematics».

Те же результаты остаются справедливыми, если не пренебрегать параллаксом Солнца, за исключением того, что симметрия относительно оси η исчезает.

Приложение к основной задаче динамики

42. Прежде чем приступить к изучению периодических решений второго и третьего сорта, мы изучим сейчас более общим образом периодические решения уравнений динамики.

Вернемся к уравнениям п. 13

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}, \tag{1}$$

а также к предположениям этого пункта. Функция F разложена в ряд по степеням очень малого параметра μ, так что

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots;$$

F — периодическая функция y, F_0 — функция, зависящая только от x. Я предположу для определенности, что имеются лишь три степени свободы.

Легко проинтегрировать эти уравнения при $\mu = 0$ и $F = F_0$.

Действительно, так как F_0 не зависит от y, эти уравнения сводятся к

$$\frac{dx_i}{dt} = 0, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_i} = n_i.$$

Таким образом, x_i и, следовательно, n_i постоянны.

Итак, уравнения (1) при $\mu = 0$ допускают решения

$$\begin{aligned} &x_1 = a_1, && x_2 = a_2, && x_3 = a_3, \\ &y_1 = n_1 t + \varpi_1, && y_2 = n_2 t + \varpi_2, && y_3 = n_3 t + \varpi_3, \end{aligned}$$

где все a и ϖ — постоянные интегрирования, а n — функции от a.

Ясно, что если

$$n_1T,\ n_2T,\ n_3T$$

кратны 2π, то это решение периодическое с периодом T.

Предположим теперь, что μ не равно нулю, и представим себе, что в некотором решении значения переменных x и y при $t = 0$ равны соответственно

$$x_1 = a_1 + \beta_1, \quad x_2 = a_2 + \beta_2, \quad x_3 = a_3 + \beta_3,$$
$$y_1 = \omega_1 + \beta_4, \quad y_2 = \omega_2 + \beta_5, \quad y_3 = \omega_3 + \beta_6.$$

Предположим, что в том же решении значения x и y при $t = T$ равны

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \beta_1 + \psi_1, \\ x_2 &= a_2 + \beta_2 + \psi_2, \\ x_3 &= a_3 + \beta_3 + \psi_3, \\ y_1 &= \omega_1 + n_1T + \beta_4 + \psi_4, \\ y_2 &= \omega_2 + n_2T + \beta_5 + \psi_5, \\ y_3 &= \omega_3 + n_3T + \beta_6 + \psi_6. \end{aligned}$$

Чтобы это решение было периодическим с периодом T, должно выполняться равенство

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = \psi_5 = \psi_6 = 0. \tag{12}$$

Шесть уравнений (12) не все независимы. В самом деле, так как уравнение $F = \text{const}$ является интегралом уравнений (1) и, кроме того, F — периодическая функция относительно y, имеем

$$F(a_i + \beta_i, \omega_i + \beta_{i+3}) = F(a_i + \beta_i + \psi_i, \omega_i + n_iT + \beta_{i+3} + \psi_{i+3}) =$$
$$= F(a_i + \beta_i + \psi_i, \omega_i + \beta_{i+3} + \psi_{i+3}).$$

Поэтому достаточно будет удовлетворить пяти уравнениям (12). Кроме того, я предположу, что

$$\omega_1 = \beta_4 = 0.$$

Для этого достаточно выбрать начальный момент времени так, чтобы y_1 равнялся нулю при $t = 0$.

Легко видеть, что ψ_i и ψ_{i+3} — голоморфные функции μ и β, обращающиеся в нуль, когда все эти переменные обращаются в нуль.

Следовательно, речь идет о том, чтобы доказать, что можно из пяти последних уравнений (12) получить β_i в виде функций от μ.

Заметим, что, если μ равно нулю, тождественно выполняются равенства

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0.$$

Следовательно, ψ_1, ψ_2 и ψ_3, будучи разложенными в ряд по степеням μ и β, содержат множитель μ. Мы отбросим этот множитель μ и запишем, следовательно, пять уравнений (2), которые нам надо решить, в виде

$$\frac{\psi_2}{\mu} = \frac{\psi_3}{\mu} = \psi_4 = \psi_5 = \psi_6 = 0. \tag{13}$$

При $\mu = 0$ известно общее решение уравнений (1); следовательно, легко можно найти

$$\psi_4 = -T\frac{\partial}{\partial\beta_1}F_0(a_1+\beta_1, a_2+\beta_2, a_3+\beta_3),$$

$$\psi_5 = -T\frac{\partial}{\partial\beta_2}F_0(a_1+\beta_1, a_2+\beta_2, a_3+\beta_3),$$

$$\psi_6 = -T\frac{\partial}{\partial\beta_3}F_0(a_1+\beta_1, a_2+\beta_2, a_3+\beta_3).$$

Функциональный определитель ψ_4, ψ_5 и ψ_6 по β_1, β_2 и β_3 равен с точностью до множителя — T^3 *гессиану* F_0 по x. Я намерен теперь выразить ψ_1/μ, ψ_2/μ и ψ_3/μ в виде функций от β_4, β_5 и β_6, положив $\mu = 0$ и в то же время

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.$$

Итак, находим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_i - a_i}{\mu}\right) = \frac{dF_1}{dy_i} + \mu\frac{dF_2}{dy_i} + \mu^2\frac{dF_3}{dy_i} + \ldots$$

откуда

$$\frac{\psi_i}{\mu} = \int_0^T \frac{dF_1}{dy_i}dt + \mu\int_0^T \frac{dF_2}{dy_i}dt + \ldots \qquad (i = 1, 2, 3)$$

или при $\mu = 0$

$$\frac{\psi_i}{\mu} = \int_0^T \frac{dF_1}{dy_i}dt. \tag{3}$$

Поскольку мы предполагаем $\mu = 0$ и в то же время

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0,$$

и помним, что $\varpi_1 = \beta_4 = 0$, то мы должны в правой части уравнения (3) заменить x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 соответственно на

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ n_1t, \qquad n_2t + \varpi_2 + \beta_5, \qquad n_3t + \varpi_3 + \beta_6.$$

Тогда dF_1/dy_i становится периодической функцией t.

Мы можем записать

$$F_1 = \Sigma A \sin(m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + h),$$

где m_1, m_2, m_3 — целые положительные числа, а A и h — функции x, не зависящие от y.

Тогда получим

$$F_1 = \Sigma A \sin\omega, \qquad \frac{dF_1}{dy_i} = \Sigma A m_i \cos\omega = \frac{dF_1}{d\varpi_i},$$

где для краткости положено

$$\omega = t(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3) + h + m_2(\varpi_2 + \beta_5) + m_3(\varpi_3 + \beta_6).$$

Таким образом F_1 становится периодической функцией t с периодом T; в то же время она является периодической функцией с периодом 2π относительно $\varpi_2 + \beta_5$ и $\varpi_3 + \beta_6$.

Я буду обозначать через $[F_1]$ среднее значение периодической функции F_1, так что

$$[F_1] = \frac{1}{T}\int_0^T F_1\, dt = SA\sin\omega,$$

где символ S означает, что суммируются все те члены, для которых

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0.$$

Тогда получаем, что

$$\frac{\psi_i}{\mu} = T\frac{d[F_1]}{d\varpi_i}, \qquad \frac{d}{d\beta_{k+3}}\left(\frac{\psi_i}{\mu}\right) = T\frac{d^2[F_1]}{d\varpi_i\, d\varpi_k}.$$

Отсюда заключаем, что:

1. Всегда можно выбрать ϖ_2 и ϖ_3 таким образом, что уравнения

$$\frac{\psi_2}{\mu} = \frac{\psi_3}{\mu} = 0$$

будут удовлетворяться при $\beta_5 = \beta_6 = 0$.

Действительно, конечная функция $[F_1]$ периодична по ϖ_2 и ϖ_3; следовательно, она имеет максимум и минимум; для них будем иметь

$$\frac{d[F_1]}{d\varpi_2} = \frac{d[F_1]}{d\varpi_3} = 0 \tag{5}$$

и отсюда

$$\frac{\psi_2}{\mu} = \frac{\psi_3}{\mu} = 0,$$

что и требовалось доказать.

2. Функциональный определитель ψ_2/μ и ψ_3/μ по β_5 и β_6 равен T^2, умноженному на гессиан $[F_1]$ по ϖ_2 и ϖ_3.

Отсюда следует, что можно выбрать постоянные $\bar{\omega}_2$ и $\bar{\omega}_3$ так, чтобы удовлетворялись уравнения (13). Для того чтобы установить существование периодических решений, остается показать, что функциональный определитель этих уравнений, т. е.

$$\frac{\partial\left(\frac{\psi_2}{\mu}, \frac{\psi_3}{\mu}, \psi_4, \psi_5\, \psi_6\right)}{\partial(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6)},$$

не равен нулю.

Но при $\mu = 0$, ψ_4, ψ_5 и ψ_6 зависят только от β_1, β_2, β_3, но не от β_5 и β_6. Этот функциональный определитель, следовательно, является произведением двух других

$$\frac{\partial\left(\frac{\psi_2}{\mu}, \frac{\psi_3}{\mu}\right)}{\partial(\beta_5, \beta_6)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial(\psi_4, \psi_5, \psi_6)}{\partial(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}.$$

Но мы только что вычислили эти два функциональных определителя и увидели, что они равны, с точностью до постоянного множителя, один — гессиану $[F_1]$ по $\bar{\omega}_2$ и $\bar{\omega}_3$, другой — гессиану F_0 по x.

Итак, *если ни один из этих гессианов не равен нулю, уравнения* (1) *имеют периодические решения при малых значениях* μ.

Мы попытаемся теперь определить не только периодические решения с периодом T, но и решения с периодом, мало отличающимся от T. За отправную точку мы взяли три числа n_1, n_2, n_3; мы можем с таким же успехом выбрать три других числа n_1', n_2', n_3', лишь бы они были соизмеримы между собой, и мы придем к периодическому решению, период которого T' будет наименьшим общим кратным величин $2\pi/n_1'$, $2\pi/n_2'$, $2\pi/n_3'$.

Если мы возьмем, в частности,

$$n_1' = n_1(1+\varepsilon), \qquad n_2' = n_2(1+\varepsilon), \qquad n_3' = n_3(1+\varepsilon),$$

то три числа n_1', n_2', n_3' будут соизмеримы между собой, поскольку они пропорциональны числам n_1, n_2 и n_3.

Это приведет нас к периодическому решению с периодом

$$T + \tau = \frac{T}{1+\varepsilon},$$

так что мы получим

$$x_i = \varphi_i(t, \mu, \varepsilon), \qquad y_i = \varphi_i'(t, \mu, \varepsilon), \tag{14}$$

где φ_i и φ_i' — функции, разложимые в ряд по степеням μ и ε и периодические по t, но таким образом, что период зависит от ε.

Если в F мы заменим x_i и y_i их значениями (14), F должна стать независимой от времени постоянной [поскольку $F = \text{const}$ является одним из

интегралов уравнений (1)]. Но эта постоянная, которая называется *постоянной живых сил*, будет зависеть от μ и ε и может быть разложена в ряд по возрастающим степеням этих переменных.

Если постоянная живых сил B задана, то уравнение

$$F(\mu, \varepsilon) = B$$

можно рассматривать как соотношение, связывающее ε с μ. Следовательно, если мы произвольно зададим B, то всегда будет существовать периодическое решение, каково бы ни было значение этой постоянной, но период будет зависеть от ε и, следовательно, от μ.

Более частным случаем, чем тот, который мы только что подробно рассмотрели, является случай, когда имеются лишь две степени свободы. Тогда F зависит лишь от четырех переменных x_1, y_1, x_2, y_2 и функция $[F_1]$ зависит только от одной переменной $\bar{\omega}_2$. При этом соотношения (6) сводятся к

$$\frac{d[F_1]}{d\bar{\omega}_2} = 0, \tag{15}$$

а гессиан функции $[F_1]$ сводится к $d^2[F_1]/d\bar{\omega}_2^2$, откуда можно заключить следующее: каждому простому корню уравнения (7) соответствует периодическое решение уравнений (1), которое существует при всех достаточно малых значениях μ.

Я мог бы даже добавить, что так же будет обстоять дело и для каждого корня нечетного порядка.

После того как доказано существование периодических решений, остается показать, что эти решения можно разложить в ряды по степеням μ и записать в виде

$$x_i = \theta_{i,0}(t) + \mu\theta_{i,1}(t) + \mu^2\theta_{i,2}(t) + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\theta_{i,0}(t)$, $\theta_{i,1}(t)$, ... — периодические функции t, разложимые в ряды по синусам и косинусам углов, кратных $2\pi t/(T + \tau)$.

В силу теоремы п. 28 мы имеем

$$x_i = H_i[t - t_1, \mu, x_1^0 - \varphi_1(0), x_2^0 - \varphi_2(0), \ldots, x_n^0 - \varphi_n(0)],$$

если $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ — начальные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при $t = 0$.

H_i разлагается в ряд по степеням

$$t - t_1, \mu \quad \text{и} \quad x_i^0 - \varphi_i(0),$$

если μ достаточно мало и если t достаточно близко к t_1, а x_i^0 — к $\varphi_i(0)$.

Мы возьмем

$$t = t_1 + \frac{t_1\tau}{T}.$$

Кроме того, возьмем

$$x_i^0 - \varphi_i(0) = \beta_i.$$

Выберем β_i и τ так, чтобы получить периодическое решение, т. е. так, чтобы удовлетворялись уравнения вида (12). Мы только что видели, что если τ и β_i удовлетворяют этим уравнениям, то можно разложить τ, β_1, β_2, ..., β_n в ряды по возрастающим степеням μ, и что τ и β_i обращаются в нуль вместе с μ.

Следовательно, будем иметь

$$x_i = H_i\left(\frac{t_1\tau}{T}, \mu, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\right) = K_i(\mu),$$

где K_i — функция, разложенная в ряд по степеням μ. K_i зависит не только от μ, а еще и от t_1; поэтому мы запишем

$$x_i = K_i(t_1, \mu),$$

имея в виду, однако, что K_i разложено в ряд по степеням μ, но не по степеням t_1.

В этих предположениях, когда t_1 увеличивается до T, t увеличивается до $T + \tau$ и, так как мы условились рассматривать периодическое решение с периодом $T + \tau$, x_i не должно изменяться; следовательно, мы имеем

$$K_i(t_1 + T, \mu) = K_i(t_1, \mu). \tag{10}$$

Так как K_i разлагается по степеням μ, можно записать

$$K_i(t_1, \mu) = \theta_{i,0} + \theta_{i,1}\mu + \theta_{i,2}\mu^2 + \ldots,$$

где $\theta_{i,0}$, $\theta_{i,1}$, $\theta_{i,2}$, ... зависят только от t_1. Тождество (10) показывает тогда, что $\theta_{i,k}$ не изменяется, когда заменяют t_1 на $t_1 + T$. Следовательно, $\theta_{i,k}$ — периодическая функция и может быть разложена в ряд по синусам и косинусам углов, кратных

$$\frac{2\pi t_1}{T} = \frac{2\pi t}{T + \tau},$$

что и требовалось доказать.

Случай, когда гессиан равен нулю

43. Может возникнуть трудность в случае, когда гессиан функции F_0 равен нулю.

Вот как в довольно большом числе случаев можно избежать этой трудности.

Предположим, что гесиан F_0 по переменным x равен нулю, но можно найти функцию от F_0, которую будем называть $\varphi(F_0)$ и гессиан которой не равен нулю.

Мы преобразуем уравнения (1) следующим образом.

Эти уравнения имеют интеграл живых сил, который записывается в виде

$$F = C.$$

Пусть φ' — производная функции φ, тогда при $F = C$ будем иметь

$$\varphi'(F) = \varphi'(C)$$

и $\varphi'(C)$ будет постоянной, которую можно считать известной, если предположить, что начальные условия движения известны и позволяют, следовательно, вычислить постоянную C.

Уравнения (1) можно тогда записать как

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{d[\varphi(F)]}{\varphi'(C)\,dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{d[\varphi(F)]}{\varphi'(C)\,dx_i}.$$

Они сохраняют прежнюю форму, но функция F_0 заменена функцией $\varphi(F_0)$, гессиан которой не равен нулю.

Возьмем, например, частный случай задачи трех тел, изученный в п. 9, тот случай, когда одна из масс равна нулю, а две другие движутся по окружности.

В этом случае мы нашли

$$F_0 = \frac{1}{2x_1^2} + x_2;$$

следовательно, имеем

$$\frac{d^2F_0}{dx_2^2} = \frac{d^2F_0}{dx_2\,dx_1} = 0.$$

Наш гессиан, таким образом, тождественно равен нулю, но если мы возьмем

$$\varphi(F_0) = F_0^2 = \frac{1}{4x_1^4} + \frac{x_2}{x_1^2} + x_2^2,$$

то гессиан $\varphi(F_0)$ равен

$$\frac{6}{x_1^6}$$

и отличен от нуля.

Таким образом, все предыдущие рассуждения применимы к этому частному случаю задачи трех тел, в котором имеются периодические решения при малых значениях μ.

Рассмотрим, напротив, общий случай задачи трех тел, о котором шла речь в п. 11.

Мы нашли, что эта задача может быть приведена к канонической форме, причем два ряда переменных будут следующими:

$$\beta L,\ \beta G,\ \beta\Theta,\ \beta' L',\ \beta' G',\ \beta'\Theta',$$
$$l,\quad g,\quad \theta,\quad l',\quad g',\quad \theta'.$$

Функция F может быть разложена в ряд по степеням μ

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots,$$

и мы имеем

$$F_0 = \frac{\beta^3}{2(\beta L)^2} + \frac{\beta'^3}{2(\beta' L')^2}.$$

Если, возвращаясь к обозначениям, использованным в этой главе, мы обозначим два ряда сопряженных переменных через

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,$$
$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6,$$

так что

$$x_1 = \beta L, \qquad x_4 = \beta' L',$$

то получим

$$F_0 = \frac{\beta^3}{2x_1^2} + \frac{\beta'^3}{2x_4^2},$$

и гессиан функции F_0, очевидно, равен нулю.

Если мы рассмотрим некоторую функцию $\varphi(F_0)$, то эта функция будет зависеть только от x_1 и x_4 и ее гессиан будет снова равен нулю. Таким образом прием, который мы употребили выше, более не применим и рассуждений настоящего пункта недостаточно, чтобы установить существование периодических решений.

В этом источник трудностей, которые мы попытаемся преодолеть в пп. 46—48.

Эти трудности происходят также, как мы только что видели, от того, что F_0 зависит лишь от x_1 и x_4, т. е. от того, что мы имеем

$$\frac{dF_0}{dx_2} = \frac{dF_0}{dx_3} = \frac{dF_0}{dx_5} = \frac{dF_0}{dx_6} = 0$$

или еще при $\mu = 0$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{dy_3}{dt} = \frac{dy_5}{dt} = \frac{dy_6}{dt} = 0.$$

Эти уравнения означают, что в кеплеровском движении перигелии и узлы неподвижны.

Однако при любом другом законе притяжения, отличном от закона Ньютона, перигелии и узлы не были бы неподвижными.

Следовательно, при законе, отличном от ньютоновского, мы не встретили бы при отыскании периодических решений задачи трех тел той трудности, на которую я только что указал и которой в дальнейшем будут посвящены пп. 46—48.

Прямое вычисление рядов

44. Мы только что показали, что уравнения (1) п. 43 допускают периодические решения и что эти решения могут быть разложены в ряды по степеням μ.

Попытаемся теперь на деле построить эти разложения, существование и сходимость которых мы доказали заранее.

Для начала я замечу, что в вычислении этих разложений можно ввести важное видоизменение. Выше мы ввели три числа

$$n_1,\ n_2,\ n_3,$$

таких, что

$$n_1 T,\ n_2 T,\ n_3 T$$

кратны 2π и, следовательно, соизмеримы между собой. Эти три числа характеризуют рассматриваемое периодическое решение.

Я утверждаю, что всегда можно при изучении частного периодического решения предполагать, что

$$n_2 = n_3 = 0.$$

Действительно, предположим, что это не так. Мы заменим переменные, положив

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \alpha_3 y_3', & x_1' &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3, \\ y_2 &= \beta_1 y_1' + \beta_2 y_2' + \beta_3 y_3', & x_2' &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3, \\ y_3 &= \gamma_1 y_1' + \gamma_2 y_2' + \gamma_3 y_3', & x_3' &= \alpha_3 x_1 + \beta_3 x_2 + \gamma_3 x_3. \end{aligned}$$

Уравнения (с новыми переменными x' и y') сохранят каноническую форму.

Если, кроме того, α, β и γ — целые числа и составленный из них определитель равен 1, то функция F, периодическая по y, будет также периодической по y'.

Характеристические числа n_1, n_2, n_3 после замены переменных превратятся в три числа, которые мы обозначим через n_1', n_2', n_3' и которые определяются из уравнений

$$\begin{aligned} n_1 &= \alpha_1 n_1' + \alpha_2 n_2' + \alpha_3 n_3', \\ n_2 &= \beta_1 n_1' + \beta_2 n_2' + \beta_3 n_3', \\ n_3 &= \gamma_1 n_1' + \gamma_2 n_2' + \gamma_3 n_3'. \end{aligned}$$

Так как n_1, n_2 и n_3 соизмеримы между собой, то, очевидно, можно выбрать целые числа α, β и γ так, чтобы

$$n_2' = n_3' = 0.$$

Итак, всегда можно предполагать, что

$$n_2 = n_3 = 0,$$

что мы и будем делать впредь.

Мы попытаемся удовлетворить уравнениям (1) п. 43, положив

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1^0 + \mu x_1^1 + \mu^2 x_1^2 + \ldots,\\
x_2 &= x_2^0 + \mu x_2^1 + \mu^2 x_2^2 + \ldots,\\
x_3 &= x_3^0 + \mu x_3^1 + \mu^2 x_3^2 + \ldots,\\
y_1 &= y_1^0 + \mu y_1^1 + \mu^2 y_1^2 + \ldots,\\
y_2 &= y_2^0 + \mu y_2^1 + \mu^2 y_2^2 + \ldots,\\
y_3 &= y_3^0 + \mu y_3^1 + \mu^2 y_3^2 + \ldots,
\end{aligned} \tag{2}$$

где x_i^k и y_i^k — периодические функции времени с периодом T; x_i^0 — такие постоянные, что

$$\frac{d}{dx_i^0} F_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_i, \quad n_2 = n_3 = 0$$

и, с другой стороны,

$$y_i^0 = n_i t + \omega_i,$$

откуда

$$y_2^0 = \omega_2, \qquad y_3^0 = \omega_3,$$

где ω_2 и ω_3 — постоянные, которые мы точнее определим в дальнейшем.

Поскольку начальный момент времени остается произвольным, мы сможем выбрать его так, чтобы $y_1 = 0$ при любом μ и $t = 0$. Отсюда следует, что y_1^0, y_1^1, y_1^2, ... будут равны нулю одновременно при $t = 0$ и что $\omega_1 = 0$.

Вместо x и y подставим в F их значения (2), затем разложим F по возрастающим степеням μ, как это делалось в п. 22. Получим

$$F = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \ldots$$

и

$$\Phi_0 = F_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0).$$

Далее получим (если вспомнить, что $dF_0/dx_i^0 = -n_i$ и $n_2 = n_3 = 0$)

$$\Phi_1 = F_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0, y_3^0) - n_1 x_1^1. \tag{3}$$

Вообще

$$\Phi_k = \Theta_k - n_1 x_1^k = \Theta_k + x_1^k \frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^k \frac{dF_0}{dx_2^0} + x_3^k \frac{dF_0}{dx_3^0}$$

и функция Θ_k будет зависеть лишь от

$$x_i^0, x_i^1, \quad \ldots, x_i^{k-1},$$
$$y_i^0, y_i^1, \quad \ldots, y_i^{k-1}.$$

Относительно переменных y_i^0 она будет периодической с периодом 2π.

Теперь мы можем записать дифференциальные уравнения, приравнивая одинаковые степени μ:

$$\frac{dx_1^0}{dt} = \frac{dx_2^0}{dt} = \frac{dx_3^0}{dt} = 0, \qquad \frac{dy_1^0}{dt} = n_1, \qquad \frac{dy_2^0}{dt} = n_2, \qquad \frac{dy_3^0}{dt} = n_3.$$

Затем находим

$$\frac{dx_1^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_1^0}, \qquad \frac{dx_2^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_2^0}, \qquad \frac{dx_3^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_3^0} \tag{4}$$

и

$$\frac{dy_1^1}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx_1^0}, \qquad \frac{dy_2^1}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx_2^0}, \qquad \frac{dy_3^1}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx_3^0} \tag{5}$$

и вообще

$$\frac{dx_i^k}{dt} = \frac{d\Phi_k}{dy_i^0} \tag{4'}$$

и

$$\frac{dy_i^k}{dt} = -\frac{d\Phi_k}{dx_i^0} = -\frac{d\Theta_k}{dx_i^0} - x_1^k \frac{d^2F_0}{dx_1^0 dx_i^0} - x_2^k \frac{d^2F_0}{dx_2^0 dx_i^0} - x_3^k \frac{d^2F_0}{dx_3^0 dx_i^0}. \tag{5'}$$

Проинтегрируем сначала уравнения (4). В F_1 мы заменим y_1^0, y_2^0, y_3^0 их значениями

$$n_1 t, \ \omega_2, \ \omega_3.$$

Тогда правые части уравнений (4) будут периодическими функциями t с периодом T; эти правые части, следовательно, можно разложить в ряды по синусам и косинусам углов, кратных $2\pi t/T$. Для того чтобы значения переменных x_1^1, x_2^1 и x_3^1, полученные из уравнений (4), были периодическими функциями t, необходимо и достаточно, чтобы эти ряды не содержали постоянных членов.

Действительно, я могу записать

$$F_1 = \Sigma A \sin (m_1 y_1^0 + m_2 y_2^0 + m_3 y_3^0 + h),$$

где m_1, m_2, m_3 — положительные или отрицательные целые числа и где A и h — функции x_1^0, x_2^0, x_3^0. Я буду писать для краткости

$$F_1 = \Sigma A \sin \omega,$$

положив

$$\omega = m_1 y_1^0 + m_2 y_2^0 + m_3 y_2^0 + h.$$

Тогда я найду

$$\frac{dF_1}{dy_1^0} = \Sigma A m_1 \cos \omega, \qquad \frac{dF_1}{dy_2^0} = \Sigma A m_2 \cos \omega, \qquad \frac{dF_1}{dy_3^0} = \Sigma A m_3 \cos \omega$$

и

$$\omega = t m_1 n_1 + h + m_2 \tilde{\omega}_2 + m_3 \tilde{\omega}_3.$$

Среди членов этого ряда я выделю те, для которых

$$m_1 = 0,$$

но которые не зависят от t.

F_1 — периодическая функция t. Я буду обозначать через $[F_1]$ среднее значение этой функции и получу

$$[F_1] = \mathrm{S} A \sin \omega, \qquad (m_1 = 0, \ \omega = h + m_2 \tilde{\omega}_2 + m_3 \tilde{\omega}_3),$$

где суммирование, обозначенное значком S, распространяется на все члены F_1, для которых коэффициент при t равен нулю. Мы получим тогда

$$\frac{d[F_1]}{d\tilde{\omega}_2} = \mathrm{S} A m_2 \cos \omega, \qquad \frac{d[F_1]}{d\tilde{\omega}_3} = \mathrm{S} A m_3 \cos \omega.$$

Значит, если

$$\frac{d[F_1]}{d\tilde{\omega}_2} = \frac{d[F_1]}{d\tilde{\omega}_3} = 0, \tag{6}$$

то поскольку m_1 равно нулю, мы получим

$$\mathrm{S} A m_1 \cos \omega = 0, \qquad \mathrm{S} A m_2 \cos \omega = 0, \qquad \mathrm{S} A m_3 \cos \omega = 0. \tag{7}$$

Итак, если соотношения (6) удовлетворяются, то ряды $\Sigma A m_i \cos \omega$ не будут содержать постоянных членов и уравнения (4) нам дадут

$$x_1^1 = \Sigma \frac{A_1 \sin \omega}{n_1} + C_1^1, \qquad x_2^1 = \Sigma \frac{A m_2 \sin \omega}{m_1 n_1} + C_2^1,$$

$$x_3^1 = \Sigma \frac{A m_3 \sin \omega}{m_1 n_1} + C_3^1,$$

где C_1^1, C_2^1 и C_3^1 — новые постоянные интегрирования.

Мне остается показать, что можно выбрать постоянные $\mathfrak{w}_2$ и $\mathfrak{w}_3$ так, чтобы удовлетворялись соотношения (6). Функция $[F_1]$ — периодическая функция $\mathfrak{w}_2$ и $\mathfrak{w}_3$, не изменяющаяся, когда одна из этих переменных увеличивается на 2π. Кроме того, она конечна, следовательно, она имеет по меньшей мере один максимум и один минимум. Значит, имеются по меньшей мере два способа выбрать $\mathfrak{w}_2$ и $\mathfrak{w}_3$ так, чтобы удовлетворить соотношениям (6).

Я мог бы даже добавить, что имеются по меньшей мере четыре таких способа, хотя и не могу этого утверждать, когда число степеней свободы больше трех [17].

Я постараюсь теперь определить при помощи уравнений (5) три функции y_i' и три постоянные C_i^1.

Мы можем считать известными x_i^0 и y_0^i; x_1^i также известны с точностью до постоянных C_i^1. Следовательно, я могу записать уравнения (5) в следующем виде:

$$\frac{dy_i^1}{dt} = H_i - C_1^1 \frac{d^2F_0}{dx_1^0\,dx_i^0} - C_2^1 \frac{d^2F_0}{dx_2^0\,dx_i^0} - C_3^1 \frac{d^2F_0}{dx_3^0\,dx_i^0}, \tag{8}$$

где H_i представляют собой полностью известные функции, разложенные в ряды по синусам и косинусам углов, кратных $2\pi t/T$. Коэффициенты при C_1^1, C_2^2 и C_3^1 постоянны и их можно считать известными.

Для того чтобы значение y_i^1, полученное из этого уравнения, было периодической функцией t, необходимо и достаточно, чтобы в правой части постоянный член был равен нулю. Поэтому если H_i^0 означает постоянный член тригонометрического ряда H_i, то должны выполняться равенства

$$C_1^1 \frac{d^2F_0}{dx_1^0\,dx_i^0} + C_2^1 \frac{d^2F_0}{dx_2^0\,dx_i^0} + C_3^1 \frac{d^2F_0}{dx_3^0\,dx_i^0} = H_i^0. \tag{9}$$

Три линейных уравнения (9) определяют три постоянные C_1^1, C_2^1 и C_4^1. Исключением будет лишь тот случай, когда определитель этих трех уравнений равен нулю, т. е. когда гессиан F_0 по x_1^0, x_2^0 и x_3^0 равен нулю. Мы исключим этот случай из рассмотрения.

Уравнения (8) дадут

$$y_i^1 = \int_0^t \frac{dy_i^1}{dt}\,dt + k_i^1$$

или

$$y_1^1 = \eta_1^1 + k_1^1, \qquad y_2^1 = \eta_2^1 + k_2^1, \qquad y_3^1 = \eta_3^1 + k_3^1,$$

где η_i^1 — периодические, полностью известные функции t, а k_i^1 — три новые постоянные интегрирования. Кроме того, из только что записанных уравнений следует, что $\eta_1^1 = \eta_2^1 = \eta_3^1 = 0$ при $t = 0$.

Перейдем теперь к уравнениям (4′), полагая в них $k = 2$ и $i = 1, 2, 3$, и попытаемся определить при помощи трех таким образом полученных уравнений три функции x_i^1 и три постоянные k_i^1.

Легко видеть, что

$$\Theta_2 = \Omega_2 + y_1^1 \frac{dF_1}{dy_1^0} + y_2^1 \frac{dF_1}{dy_2^0} + y_3^1 \frac{dF_1}{dy_3^0},$$

где Ω_2 зависит только от x_i^0, y_i^0 и x_i^1 и, как выше, мы имеем

$$\frac{dF_1}{dy_i^0} = \Sigma A m_i \cos \omega.$$

Уравнения (4′) запишутся тогда в виде

$$\frac{dx_i^2}{dt} = \frac{d\Omega_2}{dy_i^0} + \sum_k y_k^1 \frac{d^2F_1}{dy_k^0\, dy_i^0}$$

или

$$\frac{dx_i^2}{dt} = H_i^1 - k_1^1 \Sigma A m_1 m_i \sin \omega - k_2^1 \Sigma A m_2 m_i \sin \omega - k_3^1 \Sigma A m_3 m_i \sin \omega, \quad (10)$$

где H_i^1 — периодическая функция t, которую можно считать полностью известной. Для того чтобы можно было получить из этого уравнения x_i^2 в виде периодической функции, необходимо и достаточно, чтобы правые части уравнений (10), разложенные в тригонометрические ряды, не содержали постоянных членов. Мы должны, следовательно, так распорядиться величинами k_i^1, чтобы уничтожить эти постоянные члены. Таким образом, мы придем к трем линейным уравнениям между тремя величинами k_i^1, но поскольку определитель этих трех уравнений равен нулю, возникает небольшая трудность, и поэтому я вынужден остановиться на некоторых деталях.

Мы раньше предполагали, что $y_{1_0}^1 = 0$ при $t = 0$, поэтому имеем

$$k_1^1 = 0;$$

у нас остается всего две неизвестные величины k_2^1 и k_3^1 и три уравнения; но не независимые, как мы это сейчас увидим.

Действительно, обозначим через E_i постоянный член ряда H_i^1, тогда эти три уравнения запишутся (если вспомнить, что знак суммирования S относится к членам, для которых $m_1 = 0$) в виде

$$\begin{aligned} E_1 &= 0, \\ E_2 &= k_2^1 \mathrm{S} A m_2^2 \sin \omega + k_3^1 \mathrm{S} A m_3 m_2 \sin \omega, \\ E_3 &= k_2^1 \mathrm{S} A m_2 m_3 \sin \omega + k_3^1 \mathrm{S} A m_3^2 \sin \omega; \end{aligned} \quad (11)$$

два последних уравнения системы (11) можно записать в виде

$$-E_2 = k_2^1 \frac{d^2[F_1]}{d\varpi_2^2} + k_3^1 \frac{d^2[F_1]}{d\varpi_2\, d\varpi_3},$$

$$-E_3 = k_2^1 \frac{d^2[F_1]}{d\varpi_2\, d\varpi_3} + k_3^1 \frac{d^2[F_1]}{d\varpi_3^2}.$$

Из этих двух уравнений можно получить k_2^1 и k_3^1, если только гессиан $[F_1]$ по ϖ_2 и ϖ_3 не равен нулю. Если придать k_i^1 полученные таким образом значения, то два последних уравнения (9) нам дадут x_2^2 и x_3^2 в следующем виде:

$$x_2^2 = \xi_2^2 + C_2^2, \qquad x_3^2 = \xi_3^2 + C_3^2,$$

где ξ_i^2 — вполне определенные периодические функции t, а C_i^2 — новые постоянные интегрирования.

Чтобы найти x_1^2, мы можем, вместо того чтобы использовать первое из уравнений (10), воспользоваться следующими соображениями: уравнения (1) п. 43 допускают интеграл

$$F = B,$$

где B — постоянная интегрирования, и я предполагаю, что она разложена в ряд по степеням μ

$$B = B_0 + \mu B_1 + \mu^2 B_2 + \ldots,$$

так что

$$\Phi_0 = B_0, \quad \Phi_1 = B_1, \quad \Phi_2 = B_2, \ldots,$$

где B_0, B_1, B_2, ... — различные постоянные.

Левая часть уравнения

$$\Phi_2 = B_2$$

зависит от переменных x_i, y_i^0, x_i^1, y_i^1, переменных x_2^2 и x_3^2, которые являются известными функциями t, и от величины x_1^2, которую мы еще не вычислили. Поэтому мы можем получить x_1^2 из этого уравнения в следующем виде:

$$x_1^2 = \xi_1^2 + C_1^2,$$

где $\xi_1{}^2$ — вполне определенная периодическая функция t, а C_1^2 — постоянная, зависящая от B_2, C_2^2 и C_2^3.

Мы можем заключить отсюда, что первое из уравнений (11) должно удовлетворяться и, следовательно, эти три уравнения (11) не независимы.

Возьмем теперь уравнения (5′) и положим в них $k = 2$. Мы получим три уравнения, которые нам позволят определить постоянные C_1^1, C_1^2 и

C_1^3 и из которых мы получим, кроме того, y_i^2 в виде

$$y_1^2 = \eta_1^2 + k_1^2, \qquad y_2^2 = \eta_2^2 + k_2^2, \qquad y_3^2 = \eta_3^2 + k_3^2.$$

где y — вполне определенные периодические функции t, а k — три новые постоянные интегрирования.

Вернемся затем снова к уравнениям (4′), положив в них $k = 3$. Если мы положим $k_1^2 = 0$, то сможем найти из полученных уравнений сначала две постоянные k_2^2 и k_3^2, а затем x_i^3 в виде

$$x_i^3 = \xi_i^3 + C_i^3,$$

где ξ_i^3 — определенные периодические функции t, а C_i^3 — три новые постоянные интегрирования. И так далее.

Вот способ нахождения рядов по степеням μ, периодических с периодом T относительно времени и удовлетворяющих уравнениям (1) п. 43. *Этот способ будет несостоятельным лишь в том случае, когда гессиан F_0 по переменным x_i^0 равен нулю или же когда гессиан $[F_1]$ по δ_2 и δ_3 равен нулю.*

Прямое доказательство сходимости

45. Может быть полезным знание прямого доказательства сходимости рядов, которые мы построили и существование и сходимость которых мы предварительно доказали в п. 28. Я дам сначала это прямое доказательство в частном случае. Пусть

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mu f(x, y) = 0 \tag{1}$$

— дифференциальное уравнение. Мы видели в п. 2, что это уравнение (изученное Гильденом и затем Линдштедтом в работах о небесной механике) может рассматриваться как частный случай уравнений динамики всего с двумя степенями свободы.

Я предположу, что $f(x, y)$ можно разложить в ряд по степеням y:

$$f = f_0 + f_1 y + f_2 y^2 + \ldots,$$

где f_0, f_1, f_2 — функции x, периодические с периодом 2π. Я предположу, что среднее значение f_0 равно нулю.

$$[f_0] = 0.$$

Попытаюсь теперь разложить y в ряд по степеням μ, так что

$$y = y_1\mu + y_2\mu^2 + \ldots + y_n\mu^n + \ldots.$$

Подставляя это значение y в f, получаем

$$f = \varphi_0 + \mu\varphi_1 + \mu^2\varphi_2 + \ldots + \mu^n\varphi_n + \ldots,$$

и дифференциальные уравнения принимают вид

$$\frac{d^2y_0}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2y_1}{dx^2} = \varphi_0, \qquad \frac{d^2y_2}{dx^2} = \varphi_1, \ldots, \qquad \frac{d^2y_n}{dx^2} = \varphi_{n-1}, \ldots.$$

Мы хотим, чтобы y_1, y_2, ... были периодическими функциями x. Это возможно, если средние значения правых частей равны нулю, т. е.

$$[\varphi_0] = 0, \qquad [\varphi_1] = 0, \ldots, \qquad [\varphi_n] = 0.$$

Первое условие выполняется само собой, так как

$$\varphi_0 = f_0, \qquad [\varphi_0] = [f_0] = 0.$$

С другой стороны, получаем

$$\varphi_n = \theta_n + f_1 y_n,$$

причем θ_n зависит лишь от y_1, y_2, ..., y_{n-1}.

Пусть $[y_n]$ — среднее значение y_n; положим

$$y_n = \eta_n + [y_n],$$

так что η_n — периодическая функция x, среднее значение которой равно нулю.

Представим себе теперь, что мы уже определили

$$\begin{gathered} \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \\ [y_1], [y_2], \ldots, [y_{n-1}] \end{gathered} \tag{2}$$

и, следовательно, также y_1, y_2, ..., y_{n-1} и что нам надо вычислить η_{n+1} и $[y_n]$.

Соотношение $[\varphi_n] = 0$ можно записать в виде

$$[\theta_n] + [f_1\eta_n] + [f_1][y_n] = 0.$$

В этом уравнении $[\theta_n]$ и $[f_1\eta_n]$ можно считать известными, поскольку величины (2) известны; постоянная $[f_1]$ известна; можно, следовательно, найти $[y_n]$.

Имеет место равенство

$$\frac{d^2y_{n+1}}{dx^2} = \frac{d^2\eta_{n+1}}{dx^2} = \varphi_n.$$

Если положить

$$\varphi_n = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos mx + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin mx,$$

то получим

$$\eta_{n+1} = -\sum \frac{A_m}{m^2} \cos mx - \sum \frac{B_m}{m^2} \sin mx.$$

Следовательно, η, $[y]$ и y могут быть вычислены рекуррентно.

Отсюда следует, что если ψ — периодическая функция x, такая, что (в обозначениях п. 20, дополненных в п. 35) имеем

$$\varphi_n \ll \psi \qquad (\arg e^{\pm ix}),$$

то a fortiori

$$\eta_{n+1} \ll \psi \qquad (\arg e^{\pm ix}).$$

В дальнейшем мы будем писать

$$\theta = f - f_0 - f_1 y = f_2 y^2 + f_3 y^3 + \ldots,$$

так что

$$\theta(\mu y_1 + \mu^2 y_2 + \mu^3 y_3 + \ldots) = \theta_2 \mu^2 + \theta_3 \mu^3 + \ldots + \theta_n \mu^n + \ldots.$$

Пусть теперь f' — функция x и y того же вида, что и f, т. е.

$$f' = f_0' + f_1' y + f_2' y^2 + \ldots,$$

где f_0', f_1', f_2', ... — периодические функции x и, кроме того, предположим, что

$$f \ll f' \qquad (\arg y, e^{\pm ix}).$$

Если затем положить

$$f'(\mu y_1 + \mu^2 y_2 + \mu^3 y_3 + \ldots) = \varphi_0' + \mu \varphi_1' + \ldots + \mu^n \varphi_n' + \ldots,$$

то получим

$$\varphi_n \ll \varphi_n' \qquad (\arg y_1, y_2, \ldots, y_n, e^{\pm ix}).$$

Положим также

$$\theta' = f' - f_0' - f_1' y,$$

$$\theta'(\mu y_1 + \mu^2 y_2 + \mu^3 y_3 + \ldots) = \theta_2' \mu^2 + \theta_3' \mu^3 + \ldots + \theta_n' \mu^n + \ldots,$$

откуда $\theta_n \ll \theta_n'$.

Запишем, наконец,

$$\left| \frac{1}{[f_1]} \right| = \lambda.$$

Пусть теперь y', η' и z — три неизвестные функции, связанные соотношением

$$y' = \eta' + z$$

и разложенные в ряд по степеням μ, так что

$$y' = \mu y_1' + \mu^2 y_2' + \dots,$$
$$\eta' = \mu \eta_1' + \mu^2 \eta_2' + \dots,$$
$$z = \mu z_1 + \mu^2 z_2 + \dots.$$

Определим эти функции следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \eta' &= \mu f'(x, \eta' + z), \\ z &= \lambda f_1' \eta' + \lambda \theta'(x, \eta' + z). \end{aligned} \tag{3}$$

Сначала найдем

$$\eta_1' = \varphi_0',$$

и так как, с другой стороны, мы имеем

$$\frac{d^2\eta_1}{dx^2} = \varphi_0,$$

то заключаем

$$\eta_1 \ll \eta_1' \qquad (\arg e^{\pm ix}).$$

Затем находим

$$z_1 = \lambda f_1' \eta_1'$$

и, с другой стороны,

$$[y_1] = \frac{-1}{[f_1]} [f_1 \eta_1],$$

откуда

$$[y_1] \ll z_1,$$
$$y_1 \ll y_1'.$$

Затем получим

$$\eta_2' = \varphi_1'(x, y_1')$$

и, с другой стороны,

$$\frac{d^2\eta_2}{dx^2} = \varphi_1(x, y_1),$$

откуда

$$\eta_2 \ll \eta_2';$$

затем

$$z_2 = \lambda f_1 \eta_2' + \lambda \theta_2'(x, y_1')$$

и, с другой стороны,

$$[y_2] = \frac{-1}{[f_1]} [f_2 \eta_2] - \frac{1}{[f_1]} [\theta_2],$$

откуда

$$[y_2] \ll z_2, \qquad y_2 \ll y_2'$$

и т. д. Закон очевиден, и мы получим

$$y_n \ll y_n' \qquad (\arg e^{\pm ix})$$

и

$$y \ll y' \qquad (\arg \mu, e^{\pm ix}).$$

Следовательно, если ряд

$$y' = \mu y_1' + \mu^2 y_2' + \mu^3 y_3' + \ldots \tag{4}$$

сходится, то ряд

$$y = \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \ldots$$

сходится a fortiori. Остается установить, что ряд y' сходится или, что то же самое, что уравнения (3) могут быть разрешены относительно η' и z.

Но функциональный определитель, соответствующий уравнениям (3), может быть записан в виде

$$\frac{\partial(\eta' - \mu f', z - \lambda l_2 \eta' - \lambda\theta')}{\partial(\eta', z)}$$

и его значение при $\eta' = z = \mu = 0$ равно 1. Следовательно, он не равен нулю, и таким образом по теореме п. 30 уравнения (3) могут быть разрешены.

Итак, ряд (4) сходится, что и требовалось доказать.

Уравнения, рассмотренные в этом пункте, являются частным случаем тех, которые были предметом обсуждения предыдущего пункта. В общем случае может быть дано аналогичное непосредственное доказательство сходимости. Мы вернемся к этому в дальнейшем.

Изучение важного исключительного случая

46. В силу только что доказанного, положения п. 42 оказываются несостоятельными в случае, когда гессиан F_0 по x_0 равен нулю.

Изучим случай, когда этот гессиан равен нулю и в частности случай, когда F_0 не зависит от некоторых из переменных x.

Я буду предполагать для определенности, что число степеней свободы равно четырем; две из переменных, x_1 и x_2, входят в F_0; две другие, x_3 и x_4, не входят в F_0 и, наконец, гессиан F_0 по x_1 и x_2 не равен нулю (гессиан по x_1, x_2, x_3 и x_4 равен нулю, поскольку $dF_0/dx_3 = dF_0/dx_4 = 0$). При $\mu = 0$

общее решение дифференциальных уравнений записывается в виде

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad x_3 = x_3^0, \quad x_4 = x_4^0, \quad y_1 = n_1^0 t + \varpi_1,$$
$$y_2 = n_2^0 t + \varpi_2, \quad y_3 = \varpi_3, \quad y_4 = \varpi_4, \tag{1}$$
$$n_1^0 = -\frac{dF_0}{dx_1^0}, \quad n_2^0 = -\frac{dF_0}{dx_2^0}, \quad n_3^0 = n_4^0 = 0,$$

где x_i^0 и ϖ_i — постоянные.

Если x_1^0 и x_2^0 выбраны так, что $n_1^0 T$ и $n_2^0 T$ являются кратными 2π, то решение будет периодическим с периодом T при любых начальных значения x_3^0, x_4^0, ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 и ϖ_4.

Рассмотрим теперь любое решение при любом значении μ и пусть

$$x_i = x_i^0 + \beta_i, \qquad y_i = \varpi_i + \beta_i' \tag{2}$$

— начальные значения x_i и y_i при $t = 0$. Пусть

$$x_i = x_i^0 + \beta_i + \psi_i, \qquad y_i = n_i^0 T + \beta_i' + \psi_i' + \varpi_i$$

— значения x_i и y_i при $t = T$.

Для того чтобы решение было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0,$$
$$\psi_1' = \psi_2' = \psi_3' = \psi_4' = 0, \tag{3}$$

Я замечу:

1. Что можно всегда выбрать начальный момент времени таким образом, что начальное значение y_1 будет равно нулю как для периодического решения (1), так и для решения, соответствующего начальным значениям (2). Следовательно,

$$\varpi_1 = \beta_1' = 0.$$

2. Что $F = C$ — интеграл наших дифференциальных уравнений и производная dF/dx_1 не равна нулю (dF/dx_1 равна n_1^0). Уравнения (3), следовательно, не независимы и я могу отбросить первое из них

$$\psi_1 = 0.$$

3. Что при $\mu = 0$ тождественно выполняются равенства

$$\psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = \psi_3' = \psi_4' = 0$$

и вследствие этого ψ_2, ψ_3, ψ_4, ψ_3', ψ_4' делятся на μ. Итак, я могу заменить систему (3) следующей:

$$\frac{\psi_2}{\mu} = \frac{\psi_3}{\mu} = \frac{\psi_4}{\mu} = \psi_1' = \psi_2' = \frac{\psi_3'}{\mu} = \frac{\psi_4'}{\mu} = 0. \tag{4}$$

Я намерен:

1. Определить

$$x_3^0, \quad x_4^0, \quad \varpi_2, \quad \varpi_3 \text{ и } \varpi_4$$

(предполагается, что x_1^0 и x_2^0 уже определены и ϖ_1 равно нулю) так, чтобы уравнения (4) удовлетворялись при

$$\mu = 0, \qquad \beta_i = 0, \qquad \beta_i' = 0.$$

2. Исследовать, равен ли функциональный определитель левых частей системы (4) нулю или, другими словами, является ли при $\mu = 0$ решение

$$\beta_i = 0, \qquad \beta_i' = 0$$

простым решением этой системы или по крайней мере решением нечетного порядка.

Для этого надо исследовать, во что превратятся уравнения (4) при $\mu = 0$.

Мы имеем

$$\psi_2 = \int_0^T dx_2 = \int_0^T \frac{dF}{dy_2}\, dt$$

или, поскольку $dF_0/dy_2 = 0$,

$$\frac{\psi_2}{\mu} = \int_0^T \frac{d}{dy_2}\left(\frac{F - F_0}{\mu}\right) dt,$$

или при $\mu = 0$

$$\frac{\psi_2}{\mu} = \int_0^T \frac{dF_1}{dy_2}\, dt; \tag{5}$$

при $\mu = 0$ имеем

$$x_i = x_i^0 + \beta_i, \qquad y_i = n_i t + \varpi_i + \beta_i',$$

$$n_i = -\frac{dF_0(x_1^0 + \beta_1, x_2^0 + \beta_2)}{d(x_i^0 + \beta_i)}, \qquad n_3 = n_4 = 0.$$

Подставим эти значения x_i и y_i в правую часть уравнения (5).

Если, кроме того, приравнять $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то n_1 и n_2 сведутся к n_1^0 и n_2^0 и функция F_1 станет периодической функцией t с периодом T. Помимо этого она является периодической функцией $\bar{\omega}_2 + \beta_2'$, $\bar{\omega}_3 + \beta_3'$, $\bar{\omega}_4 + \beta_4'$ с периодом 2π. Наконец, она зависит еще от $x_3^0 + \beta_3$ и $x_4^0 + \beta_4$. Мы можем записать

$$F_1 = \Sigma A \cos(m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4 + k),$$

где m_1, m_2, m_3 и m_4 — целые числа; A и k — функции x_i.

Действительно, функция F_1 по предположению периодическая с периодом 2π по y_i.

После подстановки получаем

$$F_1 = \Sigma A \cos(\alpha t + \beta),$$

где

$$\alpha = m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0, \quad \beta = k + m_2(\bar{\omega}_2 + \beta_2') + m_3(\bar{\omega}_3 + \beta_3') + m_4(\bar{\omega}_4 + \beta_4').$$

Среди членов разложения F_1 я выделю те, для которых $\alpha = 0$, и обозначу через R множество этих членов, так что

$$R = \Sigma A \cos\beta,$$

где суммирование распространяется на все члены, для которых

$$m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 = 0.$$

Функция F_1 — периодическая функция времени с периодом T, а R не что иное, как среднее значение этой функции, так что

$$TR = \int_0^T F_1 dt,$$

или, дифференцируя по $\bar{\omega}_2$, получаем

$$T\frac{dR}{d\bar{\omega}_2} = \int_0^T \frac{dF_1}{d\bar{\omega}_2} dt.$$

Но

$$\frac{dF_1}{d\bar{\omega}_2} = \frac{dF_1}{dy_2}\frac{dy_2}{d\bar{\omega}_2} = \frac{dF_1}{dy_2}.$$

Таким образом, уравнение (5) принимает вид

$$\frac{\psi_2}{\mu} = \frac{dR}{d\bar{\omega}_2} T;$$

так же можно найти

$$\frac{\psi_3}{\mu} = \frac{dR}{d\bar{\omega}_3} T, \qquad \frac{\psi_4}{\mu} = \frac{dR}{d\bar{\omega}_1} T.$$

Аналогичными вычислениями находим

$$\frac{\psi_3'}{\mu} = -\frac{1}{\mu}\int_0^T \frac{dF}{dx_3}\,dt = -\int_0^T \frac{d}{dx_3}\left(\frac{F-F_0}{\mu}\right)dt$$

или при $\mu = 0$

$$\frac{\psi_3'}{\mu} = -\int_0^T \frac{dF_1}{dx_3}\,dt = -T\,\frac{dR}{dx_3^0}$$

и также

$$\frac{\psi_4^1}{\mu} = -T\,\frac{dR}{dx_4^0}.$$

С другой стороны, получаем

$$n_1^0 T + \psi_1' = -\int_0^T \frac{dF}{dx_1}\,dt$$

или при $\mu = 0$

$$n_1^0 T + \psi_1' = -\frac{dF_0}{d(x_1^0 + \beta_1)}T, \qquad \psi_1' = (n_1 - n_1^0)\,T.$$

Так же находим

$$\psi_2' = (n_2 - n_2^0)\,T.$$

Прежде всего мы хотим, чтобы при

$$\mu = 0, \qquad \beta_i = 0, \qquad \beta_i' = 0$$

система (4) удовлетворялась. Но если $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то n_1 и n_2 сводятся к n_1^0 и n_2^0, ψ_1' и ψ_2' сводятся к 0, так что два из уравнений (4) удовлетворяются сами по себе. Система (4) сводится просто к

$$\frac{dR}{dx_3^0} = \frac{dR}{dx_4^0} = \frac{dR}{d\bar{\omega}_2} = \frac{dR}{d\bar{\omega}_3} = \frac{dR}{d\bar{\omega}_1} = 0. \tag{6}$$

Таким образом, положив $\beta_i = \beta_i' = 0$ в функции R, рассмотрим затем R как функцию $x_3^0, x_4^0, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4$; если эта функция имеет максимум или минимум и если придать x_i^0 и $\bar{\omega}_i$ значения, соответствующие этому максимуму или минимуму, то уравнения (6) будут удовлетворены.

Приведет ли нас это решение системы (6) к периодическим решениям, сохраняющимся при малых значениях μ?

Для этого достаточно, чтобы функциональный определитель уравнений (4) не обращался в нуль при

$$\mu = \beta_i = \beta_i' = 0.$$

Но ψ_1 и ψ_2 зависят (если положить $\mu = 0$) лишь от β_1 и β_2, так как F_0 и две ее производные—n_1 и $-n_2$ являются функциями лишь $x_1^0 + \beta_1$ и $x_2^0 + \beta_2$.

Следовательно, этот функциональный определитель является произведением двух других:

1. Определителя ψ_1' и ψ_2' по β_1 и β_2 (но это не что иное, как гессиан F_0 по x_1 и x_2, который мы предполагаем отличным от нуля).

2. Определителя величин

$$\frac{\psi_2}{\mu}, \frac{\psi_3}{\mu}, \frac{\psi_4}{\mu}, \frac{\psi_3'}{\mu}, \frac{\psi_4'}{\mu} \tag{7}$$

по

$$\beta_3, \beta_4, \beta_2', \beta_3', \beta_4'.$$

Но величины (7) являются функциями

$$x_3^0 + \beta_3, \quad x_4^0 + \beta_4, \quad \omega_2 + \beta_2', \quad \omega_3 + \beta_3', \quad \omega_4 + \beta_4'.$$

Производная любой из величин (7) по β_i или β_i' равна ее производной по x_i^0 или ω_i.

Следовательно, искомый определитель является функциональным определителем величин (7) по

$$x_3^0, x_4^0, \omega_2, \omega_3, \omega_4. \tag{8}$$

Мы должны вычислить значение этого определителя при

$$\mu = \beta_i = \beta_i' = 0.$$

Но когда μ, β_i и β_i' обращаются в нуль, величины (7) сводятся к левым частям уравнений (6).

Следовательно, наш определитель является не чем иным, как гессианом R по переменным (8).

Если этот гессиан не равен нулю, наши дифференциальные уравнения будут иметь периодические решения при малых значениях μ.

Этот результат можно выразить иначе. Периодические решения сохраняются при малых значениях μ, если только уравнения (6) имеют *простое* решение. Более того, периодические решения сохранятся, если уравнения (6) имеют решение нечетного порядка.

Но в силу п. 34 точка максимума функции R будет всегда соответствовать решению уравнений (6) нечетного порядка.

Следовательно, если функция R имеет максимум или минимум, наши дифференциальные уравнения будут иметь периодические решения при малых значениях μ.

Решения второго сорта

47. Применим предыдущие рассуждения к задаче трех тел, предположив сначала, что три тела движутся в одной плоскости, и займемся отысканием периодических решений второго сорта.

Примем переменные п. 15, т. е. переменные

$$\begin{array}{ccc} \beta L = \Lambda, & \beta' L' = \Lambda', & H, \\ l, & l', & h'. \end{array}$$

Решение будет периодическим, если в конце периода Λ, H и Λ' примут свои начальные значения и если l, l' и h увеличатся на величину, кратную 2π.

Функция F равна

$$F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots$$

и F_0 зависит только от Λ и Λ'.

Поэтому если предположить, что $\mu = 0$, и обозначить через

$$\begin{array}{c} \Lambda_0,\ \Lambda_0',\ H_0, \\ l_0,\ l_0',\ h_0 \end{array}$$

начальные значения наших шести переменных, то четыре из этих шести переменных, Λ, Λ' , H и h будут постоянными и

$$\Lambda = \Lambda_0,\ \Lambda' = \Lambda_0',\ H = H_0,\ h = h_0.$$

Если, кроме того, положить

$$n = -\frac{dF_0}{d\Lambda_0}, \qquad n' = -\frac{dF_0}{d\Lambda_0'},$$

то получим

$$l = nt + l_0, \quad l' = n't + l_0'.$$

Следовательно, при $\mu = 0$, если Λ_0 и Λ_0' были выбраны так, что nT и $n'T$ кратны 2π, решение будет периодическим с периодом 2π, каковы бы ни были постоянные H_0, l_0, l_0', h_0.

Мы зададим себе следующий вопрос: можно ли выбрать постоянные H_0, l_0, l_0' и h_0 таким образом, чтобы для малых значений μ уравнения движения имели периодическое решение с периодом T, такое чтобы начальные значения шести переменных были соответственно равны

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_0 + \beta_1, & \Lambda_0' + \beta_2, & H_0 + \beta_3, \\ l_0 + \beta_4, & l_0' + \beta_5, & h_0 + \beta_6, \end{array}$$

где β_i — функции μ, обращающиеся в нуль вместе с μ.

Чтобы разрешить этот вопрос, достаточно применить положения предыдущего пункта.

Поскольку F_1 — периодическая функция по l, l' и h то мы можем записать

$$F_1 = \Sigma A \cos(m_1 l + m_2 l' + m_3 h + k),$$

где A и k — функции Λ, Λ' и H.

Заменим в F_1 шесть переменных

$$\begin{matrix} \Lambda, & \Lambda', & H, \\ l, & l', & h \end{matrix}$$

величинами

$$\begin{matrix} \Lambda_0, & \Lambda_0', & H_0, \\ l_0 + nt, & l_0' + n't, & h_0, \end{matrix}$$

получим

$$F_1 = \Sigma A \cos(\alpha t + \beta),$$

где

$$\alpha = m_1 n + m_2 n', \qquad \beta = k + m_1 l_0 + m_2 l_0' + m_3 h_0.$$

F_1 — периодическая функция t; пусть R — среднее значение этой функции, так что

$$R = \Sigma A \cos\beta,$$

где сумирование распространено на все такие члены, что

$$\alpha = 0 \quad \text{или} \quad m_1 n + m_2 n' = 0.$$

В силу принципов предыдущего пункта найдем искомые значения H_0, l_0, l_0' и h_0, решив систему

$$\frac{dR}{dH_0} = \frac{dR}{dl_0} = \frac{dR}{dl_0'} = \frac{dR}{dh_0} = 0.$$

Мы всегда можем предполагать, что начальный момент времени был выбран так, что $l_0 = 0$.

С другой стороны, в силу определения функции R имеем

$$n \frac{dR}{dl_0} + n' \frac{dR}{dl_0'} = 0.$$

Следовательно, можно заменить предыдущую систему более простой системой

$$\frac{dR}{dH_0} = \frac{dR}{dl_0'} = \frac{dR}{dh_0} = 0. \tag{1}$$

Могло бы случиться, что все решения системы (1) не подходят; однако имеются решения, которые безусловно подходят: это те, порядок кратности которых нечетен, и в частности те, которые соответствуют настоящему максимуму или минимуму функции R.

Итак, чтобы установить существование решений второго сорта, достаточно показать, что функция R имеет максимум.

Но эта функция R ограничена, более того, она периодическая по l_0' и h_0; она зависит еще от H_0; я добавлю, что она может быть разложена в ряд по степеням

$$\sqrt{\Lambda_0^2 - H_0^2} \quad \text{и} \quad \sqrt{\Lambda_0'^2 - (H_0 - C)^2}, \tag{2}$$

где C — постоянная площадей.

Функция R будет, следовательно, вещественной, только если будут выполняться неравенства

$$H_0^2 < \Lambda_0^2, \qquad (H_0 - C)^2 < \Lambda_0'^2; \tag{3}$$

H_0 должно быть всегда заключено между этими двумя пределами. Я могу выбрать переменную φ так, что H_0 и два радикала (2) будут двоякопериодическими функциями φ.

Таким образом, R — однозначная, периодическая и ограниченная функция всего лишь трех переменных (поскольку Λ_0, Λ_0' и C считаются фиксированными и $l_0 = 0$), а именно, переменных l_0', h_0 и φ.

Эта функция имеет, следовательно, по меньшей мере один максимум и один минимум, так что всегда имеются по меньшей мере два периодических решения второго сорта.

Известно, что разложение возмущающей функции F_1 содержит лишь косинусы, так что величина, которую мы обозначили k, всегда равна нулю.

Следовательно, если положить

$$l_0 = l_0' = h_0 = 0,$$

то

$$\frac{dR}{dl_0'} = \frac{dR}{dh_0} = 0;$$

останется удовлетворить уравнению

$$\frac{dR}{dH_0} = 0,$$

или, что то же самое,

$$\frac{dR}{d\varphi} = 0.$$

Это всегда возможно, поскольку R — периодическая функция φ и должна иметь по меньшей мере один максимум и один минимум.

Следовательно, всегда существуют по меньшей мере два решения второго сорта, для которых

$$l_0 = l_0' = h_0 = 0.$$

Если $\mu = 0$, то начальные значения l, l' и h равны нулю, а это означает, что имеет место *симметричное соединение*.

Рассуждением, аналогичным приведенному в п. 40, можно заключить отсюда, что для малых значений μ также будет симметричное соединение и что если в начале периода было симметричное соединение, то оно будет и в середине периода.

Итак, среди периодических решений второго сорта имеются всегда такие, которые допускают симметричные соединения (или противостояния) в начале и середине каждого периода.

Все же может представиться некоторая трудность, и я вынужден о ней сказать несколько слов.

Функция R зависит от l_0', h_0, H_0, так как мы считаем Λ_0 и Λ_0' фиксированными и выбираем l_0 равным нулю.

Функция R периодическая по l_0' и h_0; кроме того, третья переменная H_0 подчиняется некоторым неравенствам, например, следующему:

$$\Lambda_0 > H_0.$$

Из этого мы заключили, что функция R всегда имеет максимум и минимум.

Однако можно задать себе вопрос, что произойдет, если функция достигнет максимума именно тогда, когда H_0 достигнет одного из пределов, определенных неравенствами (3).

Будут ли еще применимы выводы п. 46?

В этом можно усомниться, так как если R достигает максимума при $H_0 = \Lambda_0$, например, то производная dR/dH_0 не равна нулю, а, напротив, бесконечна.

Верно, что для задачи трех тел можно без труда убедиться, что максимум R достигается не при этом значении H_0, но поскольку этот случай мог бы представиться при возмущающих силах, отличных от тех, которые рассматриваются в задаче трех тел, то более подробное изучение его представляет некоторый интерес.

Предположим, например, что мы рассматриваем значения H_0, очень близкие к Λ_0; мы можем воспользоваться переменными из п. 17, т. е. переменными

$$\Lambda,\ \Lambda',\ \xi^*,$$
$$\lambda^*\ l',\ \eta^*.$$

Обозначим тогда через

$$\Lambda_0 + \beta_1, \quad \Lambda_0' + \beta_2, \quad \xi_0^* + \beta_3,$$
$$\lambda_0^* + \beta_4, \quad l_0' + \beta_5, \quad \eta_0^* + \beta_6$$

начальные значения этих шести переменных и посмотрим, можно ли выбрать эти начальные значения так, что решение будет периодическим, а β_i будут функциями μ, обращающимися в нуль вместе с μ.

Мы видели, что для этого достаточно выбрать

$$\lambda_0^*, \ \xi_0^* \text{ и } \eta_0^*$$

так, что R будет максимальной или минимальной; с другой стороны, мы знаем, что Λ_0 и Λ_0' нужно рассматривать как фиксированные и всегда можно предположить, что l_0' равно нулю. Если R достигает максимума при $\Lambda_0 = H_0$, то в новых переменных этот максимум будет достигнут при

$$\xi_0^* = \eta_0^* = 0.$$

Но на этот раз нет никакой трудности, потому что R — голоморфная функция ξ_0^* и η_0^*, которая может быть разложена в ряд по степеням этих переменных, тогда как при прежних переменных эта трудность возникала из-за того, что R переставала быть голоморфной функцией H_0 при $\Lambda_0 = H_0$ и разлагалась в ряд не по целым степеням $\Lambda_0 - H_0$, но по степеням $\sqrt{\Lambda_0 - H_0}$.

Итак, результаты предыдущего пункта остаются справедливыми даже тогда, когда функция R достигает своего максимума при $\Lambda_0 = H_0$ или, более общим образом, когда H_0 достигает одного из пределов, определенных неравенствами (3).

Решения третьего сорта

48. Попытаемся теперь найти периодические решения третьего сорта, т. е. те, для которых наклонения не равны нулю.

Возьмем переменные п. 16, т. е.

$$\beta L = \Lambda, \quad \beta' L' = \Lambda', \quad \beta\Gamma = H, \quad \beta'\Gamma' = H',$$
$$l, \quad l', \quad g, \quad g'.$$

Предположим сначала, что $\mu = 0$ и пусть

$$\Lambda_0, \ \Lambda_0', \ H_0, \ H_0',$$
$$l_0, \ l_0', \ g_0, \ g_0'$$

— начальные значения этих восьми переменных. Если Λ_0 и Λ_0' выбраны так, что

$$nT = -T\frac{dF_0}{d\Lambda_0}, \qquad n'T = -T\frac{dF_0}{d\Lambda_0'}$$

кратны 2π, то решение будет периодическим при любых значениях шести постоянных

$$H_0,\ H_0',\ l_0,\ l_0',\ g_0,\ g_0'.$$

Можно ли выбрать эти шесть постоянных так, чтобы для малых значений μ уравнения задачи трех тел допускали периодическое решение с периодом T, такое, чтобы начальные значения восьми переменных были функциями μ, которые сводятся к

$$\Lambda_0,\ \Lambda_0',\ H_0,\ H_0',$$
$$l_0,\ l_0',\ g_0,\ g_0'$$

при $\mu = 0$?

Мы будем действовать так же как и в предыдущем пункте. Прежде всего предположим, что начальный момент времени был выбран так, что $l_0 = 0$. Затем построим, как и в предыдущем пункте, функции F_1 и R.

В силу результатов двух предыдущих пунктов мы должны определить пять постоянных H_0 H_0', l_0', g_0 и g_0' так, чтобы R была максимальной или минимальной. Каждому максимуму или минимуму функции R будет соответствовать периодическое решение.

Функция R, рассматриваемая как функция от l_0', g_0 и g_0', является периодической функцией с периодом 2π. С другой стороны, H_0 и H_0' подчинены некоторым неравенствам, которые я запишу, как и в п. 18, в виде

$$|\Lambda_0| > |H_0|, \quad |\Lambda_0'| > |H_0'|,$$
$$|H_0| - |H_0'| < C < |H_0| + |H_0'|. \tag{3}$$

Следовательно, две переменные H_0 и H_0' могут изменяться лишь в ограниченной области и функция R будет неизбежно иметь максимум и минимум, которые должны соответствовать периодическим решениям.

Однако, как и в предыдущем пункте, может возникнуть трудность. Не может ли случиться, что функция R достигнет максимума в момент, когда переменные H_0 и H_0' достигнут пределов, определенных неравенствами (3) ? Что тогда произойдет?

Предположим сначала, что максимум достигается при

$$H_0 = \Lambda_0.$$

Тогда мы используем переменные из п. 18, а именно:

$$\Lambda,\ \Lambda',\ \xi^*,\ H',$$
$$\lambda^*,\ l',\ \eta^*,\ g'.$$

Положим, таким образом,

$$\lambda_0^* = l_0 + g_0, \qquad \xi_0^* = \sqrt{2(\Lambda_0 - H_0)}\cos g_0, \qquad \eta_0^* = \sqrt{2(\Lambda_0 - H_0)}\sin g_0.$$

Мы увидим тогда, что R достигает своего максимума при

$$\xi_0^* = \eta_0^* = 0$$

и так как R разлагается в ряд по степеням ξ^* и η^*, трудность будет преодолена.

Итак, даже если максимум достигается при $H_0 = \Lambda_0$, этому максимуму тем не менее соответствует периодическое решение; то же самое и по той же причине будет и в случае, когда максимум достигается при $H_0' = \Lambda_0'$.

Остается рассмотреть случай, когда максимум достигается для значений H_0' и H_0, удовлетворяющих условию

$$C = \pm H_0 \pm H_0';$$

но это именно тот случай, когда наклонения равны нулю. Итак, если максимум достигается при подобных значениях H_0 и H_0', то мы возвращаемся к случаю решения второго сорта, изученному в предыдущем пункте. Поэтому подобному максимуму также соответствует периодическое решение.

Итак, мы показали, что функция R всегда имеет по меньшей мере один максимум и один минимум и что каждому из этих максимумов и минимумов соответствует периодическое решение. Однако трудность еще не преодолена.

Решения третьего сорта, которые мы здесь изучаем, включают в себя как частный случай решения второго сорта, существование которых мы доказали ранее.

Можно задать себе вопрос, существуют ли другие решения; более глубокий анализ дает нам ответ на этот вопрос. Мы увидим, что функция R имеет максимумы и минимумы, отличные от тех, которые соответствуют нулевым наклонениям, и, следовательно, существуют решения третьего сорта, отличные от решений второго сорта.

Для этой цели изучим более подробно форму функции R. Нам надо удовлетворить, с одной стороны, соотношениям

$$\frac{dR}{dl_0'} = \frac{dR}{dg_0} = \frac{dR}{dg_0'} = 0, \tag{4}$$

а с другой стороны, соотношениям

$$\frac{dR}{dH_0} = \frac{dR}{dH_0'} = 0. \tag{5}$$

Я утверждаю, что если положить

$$l_0' = g_0 = g_0' = 0,$$

то уравнения (4) будут удовлетворены, так что останется только удовлетворить уравнениям (5), т. е. отыскать максимумы и минимумы функции R как функции, зависящей только от H_0 и H_0'.

Действительно, я замечу, что R имеет следующую форму (если предположить, как мы это делали, $l_0' = 0$, $\theta = \theta'$):

$$R = \Sigma A \cos(\gamma_1 l_0' + \gamma_2 g_0 + \gamma_3 g_0'),$$

где A зависит от Λ_0, Λ_0', H_0, H_0'.

Значит, если предположить, что

$$l_0' = g_0 = g_0' = 0,$$

то одновременно будут выполняться соотношения

$$\frac{\partial R}{\partial l_0'} = \frac{\partial R}{\partial g_0} = \frac{\partial R}{\partial g_0'} = 0.$$

Представим себе, что мы делаем замену переменных, беря за новые переменные эксцентриситеты e и e' и наклонения i и i', т. е. полагая

$$\frac{H_0}{\beta} = G_0 = L_0\sqrt{1-e^2}, \qquad G_0' = L_0'\sqrt{1-e'^2} = \frac{H_0'}{\beta'},$$
$$\Theta_0 = G_0\cos i, \qquad \Theta_0' = G_0'\cos i',$$

так что одно из уравнений площадей принимает вид

$$\beta L_0\sqrt{1-e^2}\sin i + \beta' L_0'\sqrt{1-e'^2}\sin i' = 0, \tag{6}$$

а другое принимает вид

$$\beta L_0\sqrt{1-e^2}\cos i + \beta' L_0'\sqrt{1-e'^2}\sin i' = c. \tag{7}$$

Теперь речь идет о том, чтобы найти максимумы функции R, рассматриваемой как функция e, e', i и i', причем предполагается, что эти четыре переменные связаны между собой уравнениями площадей (6) и (7). Теперь мы можем записать уравнения, которые вместе с (7) должны определить

e, e', i и i' в следующем виде (где k обозначает вспомогательную величину):

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{de} &= k\beta L_0 \frac{e\cos i}{\sqrt{1-e^2}},\\
\frac{dR}{di} &= k\beta L_0 \sin i \sqrt{1-e^2},\\
\frac{dR}{de'} &= k\beta' L_0' \frac{e'\cos i'}{\sqrt{1-e'^2}},\\
\frac{dR}{di'} &= k\beta' L_0' \sin i' \sqrt{1-e'^2}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Можно ли удовлетворить этим уравнениям? Чтобы ответить на этот вопрос, посмотрим, каков вид функции R. Я замечу прежде всего, что эта функция зависит не от i и i', а только от их разности $i - i'$, так что

$$\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\partial R}{\partial i'} = 0.$$

Далее, R представляется в виде ряда, расположенного по возрастающим степеням e, e', i и i', так что общий член разложения будет иметь следующий вид (с точностью до коэффициента, зависящего лишь от L_0 и L_0'):

$$e^{\alpha_1} e'^{\alpha_2} i^{\alpha_3} i'^{\alpha_4} \cos(\gamma_1 l_0 + \gamma_2 l_0' + \gamma_3 g_0 + \gamma_4 g_0').$$

Более того, должно выполняться, как я уже сказал выше, равенство

$$n\gamma_1 + n'\gamma_2 = 0$$

и, с другой стороны,

$$\begin{gathered}
|\gamma_1 + \gamma_2| < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,\\
\alpha_1 > |\gamma_1 + \gamma_3|, \qquad \alpha_2 > |\gamma_2 + \gamma_4|.
\end{gathered}$$

Я утверждаю, что члены R, для которых γ_1 и γ_2 не равны одновременно нулю, будут иметь по меньшей мере третью степень относительно эксцентриситетов и наклонений, если только n не кратно $(n - n')/2$.

Действительно, пусть γ_1 и γ_2 — два целых числа, которые могут быть положительными или отрицательными, но не равны нулю одновременно и которые удовлетворяют равенствам

$$n\gamma_1 + n'\gamma_2 = 0, \qquad |\gamma_1 + \gamma_2| = 0, \quad 1 \quad \text{или} \quad 2.$$

Если мы положим

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \varepsilon, \qquad \varepsilon = 0, \quad \pm 1 \quad \text{или} \quad \pm 2,$$

то получим

$$\gamma_1 = \varepsilon \frac{n'}{n' - n}, \qquad \gamma_2 = \varepsilon \frac{n}{n - n'}.$$

Прежде всего видно, что ε не может быть нулем, иначе γ_1 и γ_2 были бы равны нулю одновременно. А так как, с другой стороны, γ_1 и γ_2 должны быть целыми и ε равно ± 1 или ± 2, то число $2n/(n-n')$ должно бы было быть целым, а это означало бы, что n кратно $(n-n')/2$ вопреки нашему предположению.

Итак, чтобы вычислить R до членов второго порядка, достаточно положить в F_1 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, т. е. сохранить в F_1 только так называемые вековые члены.

Но вычисление этих членов давно уже было проведено основателями небесной механики. Я ограничусь тем, что отошлю читателя, например, к Тиссерану (T i s s e r a n d. Mécanique céleste, t. I, p. 406). Итак, находим

$$R = \frac{1}{2} A^{(0)} + \frac{1}{8} B^{(1)} [e^2 + e'^2 - (i - i')^2] - \frac{1}{4} B^{(2)} ee' \cos(g_0 - g_0') + \Omega.$$

Коэффициенты $A^{(0)}$, $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$, зависящие лишь от L_0 и L_0', определены в цитированной работе Тиссерана, а Ω означает множество членов по меньшей мере третьей степени относительно e, e', i и i'.

Следовательно, вопрос заключается в том, чтобы сделать эту функцию R максимальной или минимальной, предполагая, что e, e', i и i' связаны соотношением (7)

$$\beta L_0 \sqrt{1-e^2} \cos i + \beta' L_0' \sqrt{1-e'^2} \cos i' = C.$$

Уравнения (8) могут тогда быть записаны (если предположить, как и выше, $l_0' = g_0 = g_0' = 0$) в виде

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} B^{(1)} e - \frac{1}{4} B^{(2)} e' + D_1 &= k(\beta L_0 e + D_2), \\
\frac{1}{4} B^{(1)} (i' - i) + D_3 &= k(\beta L_0 i + D_4), \\
\beta L_0 \sqrt{1-e^2} \sin i + \beta' L_0' \sqrt{1-e'^2} \sin i' &= 0, \\
\frac{1}{4} B^{(1)} e' - \frac{1}{4} B^{(2)} e + D_7 &= k(\beta' L_0' e' + D_8),
\end{aligned} \tag{9}$$

где D_i обозначают множества членов по меньшей мере второго порядка относительно e, e', i и i'.

Что касается уравнения (7), оно запишется в виде

$$\beta L_0 (e^2 + i^2) + \beta' L_0' (e'^2 + i'^2) + D_9 = \rho^2, \tag{10}$$

где ρ обозначает положительную постоянную, равную

$$2\beta L_0 + 2\beta' L_0' - 2C,$$

а D_9 обозначает множество членов по меньшей мере третьей степени относительно e, e', i и i'.

Из уравнений (9) и (10) шестью различными способами можно получить e, e', i и i' в виде рядов по возрастающим степеням ρ.

Положим, в самом деле,

$$e = \varepsilon\rho, \qquad e' = \varepsilon'\rho, \qquad i = \iota\rho, \qquad i' = \iota'\rho;$$

подставим эти значения в уравнения (9), которые мы разделим на ρ, и в уравнения (10), которые мы разделим на ρ^2. Левые и правые части этих уравнений будут тогда разложены в ряды по возрастающим степеням k, ε, ε', ι, ι' и ρ.

Я добавлю даже, что левые и правые части этих уравнений можно разложить в ряды по степеням ρ, $\varepsilon - \varepsilon_0$, $\varepsilon' - \varepsilon_0'$, $\iota - \iota_0$, $\iota' - \iota_0'$, $k - k_0$ (если эти переменные достаточно малы по абсолютной величине) при любых постоянных ε_0, ε_0', ι_0, ι_0', k_0.

При $\rho = 0$ эти уравнения сведутся к

$$\begin{gathered}
\frac{1}{4} B^{(1)}\varepsilon - \frac{1}{4} B^{(2)}\varepsilon' = k\beta L_0\varepsilon, \\
\frac{1}{4} B^{(1)}\varepsilon' - \frac{1}{4} B^{(2)}\varepsilon = k\beta' L_0'\varepsilon', \\
\frac{1}{4} B^{(1)}(\iota' - \iota) = k\beta L_0\iota, \\
\beta L_0\iota + \beta' L_0'\iota' = 0, \\
\beta L_0(\varepsilon^2 + \iota^2) + \beta' L_0'(\varepsilon'^2 + \iota'^2) = 1.
\end{gathered} \tag{11}$$

Уравнения (11) имеют шесть решений, а именно:

$$\begin{gathered}
k = \frac{-1}{4} B^{(1)}\left(\frac{1}{\beta L_0} + \frac{1}{\beta' L_0'}\right), \quad \varepsilon = \varepsilon' = 0, \quad \iota = \frac{\beta' L_0'}{h}, \\
\iota' = \frac{-\beta L_0}{h}, \quad h = +\sqrt{\beta\beta' L_0 L_0'(\beta L_0 + \beta' L_0')}, \\
k = \frac{-1}{+4} B^{(1)}\left(\frac{1}{\beta L_0} + \frac{1}{\beta' L_0'}\right), \quad \varepsilon = \varepsilon' = 0, \quad \iota = \frac{\beta' L_0'}{h}, \\
\iota' = \frac{-\beta L_0}{h}, \quad h = -\sqrt{\beta\beta' L_0 L_0'(\beta L_0 + \beta' L_0')}, \\
k = k_1, \quad \iota = \iota' = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_1, \quad \varepsilon' = \varepsilon_1', \\
k = -k_1, \quad \iota = \iota' = 0, \quad \varepsilon = -\varepsilon_1, \quad \varepsilon' = -\varepsilon_1', \\
k = k_2, \quad \iota = \iota' = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_2, \quad \varepsilon' = \varepsilon_2', \\
k = k_2, \quad \iota = \iota' = 0, \quad \varepsilon = -\varepsilon_2, \quad \varepsilon' = -\varepsilon_2'.
\end{gathered} \tag{12}$$

Каждое из этих шести решений простое, откуда мы можем заключить в силу того, что мы видели в п. 30, что можно шестью различными способами разложить ε, ε', ι и ι' и, следовательно, e, e', i и i' в ряд по возрастающим степеням ρ.

Следовательно, мы можем записать

$$e = f_{1,\lambda}(\rho), \qquad e' = f_{2,\lambda}(\rho), \qquad i = f_{3,\lambda}(\rho), \qquad i' = f_{4,\lambda}(\rho), \tag{13}$$

где индекс λ может принимать значения 1, 2, 3, 4, 5 и 6; положим $\lambda = 1$, отправляясь от первого из решений (12); положим $\lambda = 2$, отправляясь от второго из решений (12) и т. д.

Из шести разложений (13) четыре последних должны быть отброшены, так как они дают

$$i = i' = 0,$$

и периодические решения, к которым они приводят, не отличаются от решений второго сорта, изученных в предыдущем пункте. Но два первых могут быть сохранены и приведут к новым периодическим решениям, для которых наклонения не равны нулю и которые можно назвать *решениями третьего сорта*.

Впрочем, эти два разложения не ведут к двум действительно различным периодическим решениям.

Мы изучили более подробно решения, для которых

$$l_0' = g_0 = g_0';$$

эти уравнения выражают тот факт, что в случае $\mu = 0$ в начале периода имеет место симметричное соединение.

Рассуждение, полностью аналогичное рассуждению п. 40, показало бы, что и для всех значений μ в начале и середине каждого периода происходит симметричное соединение.

Это не означает, что не существует также периодических решений третьего сорта, для которых симметричных соединений не бывает; действительно, может случиться, что функция будет иметь максимумы и минимумы, отличные от тех, которые соответствуют случаю $l_0' = g_0 = g_0' = 0$. Мы еще вернемся к этому вопросу.

Приложения периодических решений

49. Как мы уже говорили, маловероятно, чтобы в какой-либо прикладной задаче начальные условия движения в точности соответствовали периодическому решению. Поэтому может показаться, что рассуждения, изложенные в этой главе, практически бесплодны. Но это не так; они уже принесли пользу астрономии, и я не сомневаюсь, что астрономы и в дальнейшем будут часто к ним прибегать.

Я покажу в следующей главе, как можно взять периодическое решение за начало серии последовательных приближений и изучить таким образом решения, которые отличаются от них очень мало. Полезность периодических решений станет тогда очевидной.

Но я хочу сейчас встать на несколько другую точку зрения. Предположим, что в движении некоторого небесного светила имеется очень значительное неравенство. Может случиться, что истинное движение этого светила отличается очень мало от движения идеального светила, орбита которого соответствует периодическому решению.

Тогда довольно часто значительное неравенство, о котором мы только что говорили, будет иметь почти тот же коэффициент для реального светила и для нашего идеального; но этот коэффициент гораздо проще вычисляется для идеального светила, движение которого проще, а орбита периодична.

Первым приложением этого принципа мы обязаны Хиллу. В своей теории Луны он заменяет этот спутник в первом приближении идеальной Луной, орбита которой периодична. Движение этой идеальной Луны описано в п. 41, где мы говорили об этом частном случае периодических решений первого сорта, которыми мы обязаны Хиллу.

Тогда движение этой идеальной Луны, так же как и реальной Луны, подвержено значительному неравенству, хорошо известному под названием *вариации*; коэффициент почти один и тот же для обеих Лун. Хилл вычислил его значение для своей идеальной Луны с большим числом десятичных знаков. Для того чтобы перейти к реальному случаю, надо исправить полученный таким образом коэффициент, учитывая эксцентриситеты, наклонение и параллакс. Без сомнения, Хилл сделал бы это, если бы закончил публикацию своего замечательного мемуара.

Вот другой случай, который будет часто представляться и к которому я хотел бы привлечь внимание. Выше мы видели, что периодические решения первого сорта перестают существовать, когда отношение средних движений n и n' равно

$$\frac{n}{n'} = \frac{j-1}{j},$$

где j — целое число, т. е. когда $n'/(n'-n)$ равно целому j.

Но если отношение $n'/(n'-n)$, не являясь целым, очень близко к нему, то периодическое решение существует и имеет очень значительное неравенство.

Если истинные начальные условия движения мало отличаются от тех, которые соответствуют подобному периодическому решению, это значительное неравенство сохранится и его коэффициент будет почти тот же; следовательно, можно с успехом вычислить его значение, рассматривая периодические решения.

Это проделал Тиссеран («Bulletin astronomique», t. III, p. 425) при изучении движения Гиперона (спутника Сатурна). Отношение среднего

движения этого спутника к среднему движению Титана в действительности очень близко к $^3/_4$.

Те же рассуждения применимы к изучению малых планет, среднее движение которых почти вдвое больше среднего движения Юпитера; они были предметом замечательной работы Харцера; они также применимы к планете Гильда, среднее движение которой примерно в $^3/_2$ больше среднего движения Юпитера.

Тиссеран отмечает, кроме того, в работе, которую мы цитируем, случай Урана и Нептуна, отношение средних движений которых близко к $^1/_2$. Во всех этих случаях существует значительное неравенство и изучение этого неравенства может быть облегчено рассмотрением периодических решений первого сорта.

Напротив, периодические решения второго и третьего сорта не получили еще практических применений; однако все указывает на то, что со временем они найдут свое применение; это произошло бы, если бы подтвердились предвиденья Гаусса по поводу Паллады.

Спутники Юпитера

50. Но наиболее поразительный пример доставляет нам сам Лаплас своей замечательной теорией спутников Юпитера.

Действительно, существуют истинные периодические решения первого сорта, когда вместо трех тел рассматриваются четыре или более. Рассмотрим, в самом деле, центральное тело большой массы и три других малых тела нулевой массы, вращающихся вокруг первого в соответствии с законами Кеплера. Представим себе, что эксцентриситеты и наклонения равны нулю, так что движение будет круговым. Предположим, что между тремя средними движениями n, n' и n'' существует линейное соотношение с целыми коэффициентами

$$\alpha n + \beta n' + \gamma n'' = 0,$$

где α, β и γ — три целых взаимно простых числа, таких, что

$$\alpha + \beta + \gamma = 0;$$

тогда можно найти три целых числа λ, λ' и λ'', таких, что

$$\alpha\lambda + \beta\lambda' + \gamma\lambda'' = 0,$$

и будем иметь

$$n = \lambda A + B, \quad n' = \lambda' A + B, \quad n'' = \lambda'' A + B,$$

где A и B — некоторые величины.

По прошествии времени T долготы трех тел увеличатся на величины

$$\lambda AT + BT, \quad \lambda' AT + BT, \quad \lambda'' AT + BT,$$

а разности между долготами второго и третьего спутников и долготой первого увеличатся на

$$(\lambda - \lambda') AT, \quad (\lambda - \lambda'') AT.$$

Значит, если выбрать T так, чтобы AT было кратным 2π, то углы, образованные радиусами-векторами, идущими от центрального тела к трем спутникам, примут свое первоначальное значение. Итак, рассмотренное решение при $\mu = 0$ является периодическим с периодом T.

Сохранит ли задача периодическое решение с периодом T, если принять во внимание взаимодействие трех малых тел, так что их движение не будет кеплеровским или, другими словами, если параметр μ принимает значение, не равное нулю, но очень малое?

Исследование, аналогичное тому, которое было проведено в п. 40, показывает, что это действительно так: имеется периодическое решение с периодом T, аналогичное решениям первого сорта, при котором орбиты почти круговые. Три малых тела находятся как в начале, так и в середине каждого периода в симметричном соединении или симметричном противостоянии.

Лаплас показал, что орбиты трех спутников Юпитера очень мало отличаются от тех, по которым они бы следовали в подобном периодическом решении и что положения этих трех малых тел постоянно колеблются около положени , которые они имели бы в этом периодическом решении.

Периодические решения вблизи положения равновесия

51. Периодические решения, о которых шла речь до сих пор, не исчерпывают всех тех периодических решений, существование которых можно доказать. Так, задача трех тел допускает периодические решения следующей природы: два малых тела описывают вокруг большого орбиты, очень мало отличающиеся от двух кеплеровских эллипсов E и E'; в некоторый момент эти два малых тела проходят очень близко одно от другого и оказывают друг на друга значительное возмущающее действие, затем они снова удаляются друг от друга и описывают орбиты, которые очень близки к двум новым кеплеровским эллипсам E_1 и E_1', значительно отличающимся от E и E'. Два малых тела очень мало отклоняются от эллипсов E_1 и E_1' до тех пор, пока снова не оказываются очень близко одно от другого. Таким образом движение почти кеплеровское за исключение некоторых моментов, когда расстояние между двумя телами становится очень малым и когда возникают очень значительные, но очень коротковременные возмущения. Может случиться, что подобные столкновения повторяются

периодически и так, что по прошествии некоторого времени тела снова вернутся на эллипсы E и E'. Тогда решение будет периодическим. Позже я вернусь к этому виду периодических решений, которые совершенно отличны от изученных нами в этой главе.

Я оставлю до другого тома периодические решения, названные мною решениями *второго рода* и определенные в моем мемуаре в XIII томе «Acta mathematica» [18], но их изучение не может быть произведено раньше, чем мы изучим теорию интегральных инвариантов.

Однако есть целая категория периодических решений, теория которых тесно связана с теорией решений второго рода, но о которых я все же хочу сказать здесь несколько слов, хотя и буду их рассматривать более подробно в другом месте.

Пусть

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n \tag{1}$$

— система дифференциальных уравнений. Я предполагаю, что X_i разлагаются в ряд по возрастающим степеням $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и параметра μ.

Кроме того, я предполагаю что при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

одновременно (и при любом μ) выполняются равенства

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_n = 0.$$

Тогда система (1) допускает в качестве частного решения

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0,$$

и так как значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ постоянны, то это решение можно рассматривать как периодическое решение с любым периодом.

Я намерен изучить периодические решения, которые от него отличаются очень мало.

Пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — начальные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, пусть $\psi_1 + \beta_1, \psi_2 + \beta_2, \ldots, \psi_n + \beta_n$ — значения этих же величин при $t = T$.

Можно разложить $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ в ряды по степеням $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ и μ.

Рассмотрим следующее уравнение относительно S:

$$\begin{vmatrix} \frac{dX_1}{dx_1} - S & \frac{dX_1}{dx_2} & \ldots & \frac{dX_1}{dx_n} \\ \frac{dX_2}{dx_1} & \frac{dX_2}{dx_2} - S & \ldots & \frac{dX_2}{dx_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{dX_n}{dx_1} & \frac{dX_n}{dx_2} & \ldots & \frac{dX_n}{dx_n} - S \end{vmatrix} = 0,$$

в котором предполагается, что

$$\mu = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Если это уравнение не имеет кратных корней, я обозначу через $S_1, S_2, \ldots, S_n$ его n корней.

Можно тогда проверить, что функциональный определитель ψ по β становится равным

$$\Delta = (e^{S_1 T} - 1)(e^{S_2 T} - 1) \ldots (e^{S_n T} - 1)$$

при

$$\mu = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0.$$

Для того чтобы рассмотренное решение было периодическим с периодом T, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0. \tag{2}$$

Эта система обладает следующим очевидным решением:

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0. \tag{3}$$

Это нам не дает ничего нового, поскольку мы знаем, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ можно рассматривать как периодическое решение уравнений (1). Имеют ли эти уравнения помимо этого очевидного периодического решения другие, которые отличны от него, но отличны очень мало? Другими словами, могут ли уравнения (2) удовлетворяться, когда вместо β в них подставляют функции от μ, которые, не будучи тождественным нулем, обращаются в нуль при $\mu = 0$?

Если определитель Δ не равен нулю, решение (3) при $\mu = 0$ является простым решением системы (2); следовательно, помимо решения (3) система (2) не может удовлетворяться функциями β, обращающимися в нуль вместе с μ.

Если, напротив, определитель Δ обращается в нуль, можно найти одним или несколькими способами сходящиеся ряды, расположенные по дробным степеням μ, обращающиеся в нуль вместе с этой переменной и которые при подстановке их вместо β_i удовлетворяют уравнениям (2). Имеют ли таким образом определенные ряды действительные коэффициенты?

Только специальное обсуждение, к которому я вернусь при изучении периодических решений второго рода, поможет это выяснить; если эти ряды имеют действительные коэффициенты, они определяют новую категорию периодических решений, которые существуют при малых значениях μ и в которых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принимают только очень малые значения.

Для того чтобы определитель Δ обращался в нуль, необходимо и достаточно, чтобы один из множителей обращался в нуль, т. е. чтобы

имело место равенство

$$e^{S_i T} = 1,$$

где S_i — один из корней уравнения относительно S. Для того чтобы это было возможным, необходимо, чтобы S_i было комплексным; тогда уравнение относительно S будет иметь сопряженный комплексный корень S_j и будет также выполняться равенство

$$e^{S_j T} = 1,$$

откуда видно, что два множителя Δ обращаются в нуль одновременно.

Луны без квадратуры

52. В качестве приложения вернемся к уравнениям Хилла

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{\mu}{r^3} - 3n^2\right)\xi = 0, \\ &\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2n\frac{d\xi}{dt} + \frac{\mu\eta}{r^3} = 0 \end{aligned} \qquad (r^2 = \xi^2 + \eta^2). \tag{1}$$

Эти уравнения удовлетворяются, если положить

$$\eta = 0, \qquad \xi = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3n^2}}. \tag{2}$$

Здесь ξ и η — постоянные; можно считать, что уравнения (2) определяют периодическое решение уравнений (1).

Легко заметить астрономический смысл этого решения. Уравнение $\eta = 0$ означает, что Луна находится постоянно в соединении или противостоянии, а второе из уравнений (2) означает, что расстояние от Луны до Земли постоянно. Таким образом, это периодическое решение есть не что иное, как решение, определенное Лапласом в «Mecánique céleste», Livre VI, Chap. X.

Но мы намереваемся определить периодические решения, которые очень мало от него отличаются, применяя принципы предыдущего пункта. С этой целью предположим сначала, что единица длины выбрана так, что

$$\frac{\mu}{3n^2} = 1, \qquad \mu = 3n^2$$

и что единица времени выбрана так, что

$$n = 1 + \alpha,$$

где α — очень малый параметр.

Если мы положим $\xi = 1 + x$, то система (1) может быть заменена следующей, аналогичной системе (1) предыдущего пункта:

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dx'}{dt} = 2(1+\alpha)\eta' + 3(1+\alpha)^2(x+1)\left(\frac{1}{r^3} - 1\right),$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \eta', \quad \frac{d\eta'}{dt} = -2(1+\alpha)x' + 3(1+\alpha)^2\frac{\eta}{r^3}.$$

Если мы образуем теперь уравнение предыдущего пункта относительно S, то получим

$$S^4 - 2S^2 - 27 = 0.$$

Это уравнение имеет два действительных корня и два мнимых

$$S_1 = \sqrt{-1}\sqrt{\sqrt{28} - 1},$$
$$S_2 = -\sqrt{-1}\sqrt{\sqrt{28} - 1}.$$

Если теперь мы положим

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\sqrt{28} - 1}},$$

то получим

$$e^{S_1 T} = e^{S_2 T} = 1.$$

Определитель Δ предыдущего пункта, следовательно, равен нулю и можно образовать ряды, которые расположены по дробным степеням μ (здесь эти ряды будут расположены по целым степеням $\sqrt{\mu}$) и которые после подстановки их вместо β_i удовлетворяют уравнениям (2) предыдущего пункта. Можно проверить (и я вернусь к этому позже), что коэффициенты этих рядов действительны.

Уравнения (1) Хилла допускают, следовательно, периодические решения, мало отличающиеся от решения (2). В этих решениях η остается очень малым и Луна всегда находится почти в противостоянии (или соединении). Хилл был прав, заявив, что можно представить себе класс спутников, которые никогда не смогут быть в квадратуре; однако способ, которым он намеревался получить этот, так сказать угаданный им результат, никак не мог к нему привести; действительно, этот класс не является, как думал Хилл, аналитическим продолжением того класса, который он изучал вначале столь глубоко и блистательно.

Я добавлю, что в этой категории периодических решений Луна находится в симметричном противостоянии в начале и середине каждого периода.

Глава IV

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ

Уравнения в вариациях

53. Маловероятно, чтобы в каком-либо приложении начальные условия движения в точности соответствовали периодическому решению; но может случиться, что они отличаются от него очень мало. Тогда, если рассматривать координаты трех тел в их истинном движении и, с другой стороны, координаты, которые эти же три тела имели бы в периодическом движении, то разность остается очень малой по крайней мере в течение некоторого времени, и в первом приближении можно пренебречь квадратом этой разности.

Пусть

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

— система дифференциальных уравнений, где X_i — данные функции $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пусть

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t) \tag{1 bis}$$

— некоторое решение этих уравнений, которое мы назовем *порождающим решением.*

Пусть

$$x_1 = \varphi_1(t) + \xi_1, \; x_2 = \varphi_2(t) + \xi_2, \ldots, x_n = \varphi_n(t) + \xi_n \tag{1 ter}$$

— решение, мало отличающееся от первого.

Если пренебречь квадратами ξ, то можно записать

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{dX_i}{dx_n}\xi_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Уравнения (2) мы назовем *уравнениями в вариациях* уравнений (1). Понятно, что можно в первом приближении пользоваться этими уравнениями в вариациях для определения ξ.

Предыдущих рассуждений достаточно, чтобы понять важность этих уравнений. Поэтому мы займемся их подробным изучением, делая упор в основном на уравнения в вариациях для уравнений динамики.

54. Вернемся к уравнениям (1) предыдущего пункта и уравнениям (2), которые являются их уравнениями в вариациях.

Когда известно решение уравнений (1), содержащее некоторое число произвольных постоянных, то можно, исходя из него, найти частные решения уравнений (2).

Действительно, предположим, что уравнения (1) удовлетворяются при

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t, h_1, h_2, \ldots, h_p), \\ x_2 &= \varphi_2(t, h_1, h_2, \ldots, h_p), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \varphi_n(t, h_1, h_2, \ldots, h_p). \end{aligned} \tag{3}$$

Я предполагаю, что порождающее решение получается, если положить в уравнениях (3)

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_p = 0,$$

где h_1, h_2, h_3, ..., h_p — p произвольных постоянных.

Ясно, что уравнения (2) допускают p частных решений

$$\begin{aligned} &\xi_1 = \frac{d\varphi_1}{dh_1}, \quad \xi_2 = \frac{d\varphi_2}{dh_1}, \quad \ldots, \quad \xi_n = \frac{d\varphi_n}{dh_1}, \\ &\xi_1 = \frac{d\varphi_1}{dh_2}, \quad \xi_2 = \frac{d\varphi_2}{dh_2}, \quad \ldots, \quad \xi_n = \frac{d\varphi_n}{dh_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\xi_1 = \frac{d\varphi_1}{dh_p}, \quad \xi_2 = \frac{d\varphi_2}{dh_p}, \quad \ldots, \quad \xi_n = \frac{d\varphi_n}{dh_p}. \end{aligned}$$

Конечно, в этих производных $d\varphi_i/dh_k$ после дифференцирования надо положить

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_p = 0.$$

Предположим теперь, что известен один интеграл уравнений (1), и пусть

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const}$$

— этот интеграл.

Тогда для решения (1 bis) получим

$$F[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)] = c$$

и для решения (1 ter)

$$F[\varphi_1(t) + \xi_1, \quad \varphi_2(t) + \xi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n(t) + \xi_n] = c',$$

где c и c' — две числовые постоянные.

Если мы предположим, что ξ очень малы, то же самое можно будет сказать о разности $c' - c$, и если пренебречь квадратами этих величин, то получим

$$\frac{dF}{dx_1}\xi_1 + \frac{dF}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{dF}{dx_n}\xi_n = c' - c = \text{const.} \qquad (4)$$

В частных производных dF/dx_i надо, конечно, после дифференцирования положить

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(t).$$

Уравнение (4) даст тогда интеграл уравнений (2). Важно заметить, что этот интеграл, вообще говоря, содержит время в явном виде.

Таким образом, если известен интеграл уравнений (1), можно из него получить интеграл уравнений (2).

Приложение к теории Луны

55. Я уже говорил выше, в п. 53, о возможных приложениях уравнений в вариациях и их полезности для астрономии. Поразительным примером этого является замечательная теория Луны Хилла.

Я говорил в п. 41 о том, как этот ученый-астроном, составив уравнения движения Луны, подробно изучил одно частное решение этих уравнений, которое достаточно мало отличается от решения, соответствующего истинным начальным условиям движения. Это решение периодично и принадлежит к тем решениям, которые я назвал в предыдущей главе *решениями первого сорта*.

Ограничиваясь этим решением, мы тем самым пренебрегаем не только параллаксом и эксцентриситетом Солнца, но также и наклонениями орбит и эксцентриситетом Луны.

Тем не менее это первое приближение позволяет нам, как я отметил в п. 49, достаточно точно найти коэффициент одного из самых важных неравенств Луны, известного под названием *вариации*.

Пусть теперь

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad x_3 = \varphi_3(t) = 0$$

— координаты Луны в этом частном периодическом решении.

Пусть

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i$$

— истинные координаты Луны.

Во втором приближении Хилл пренебрегает квадратами ξ и приходит таким образом к системе линейных дифференциальных уравнений. Другими

словами, он образует уравнения в вариациях, беря за порождающее решение прежде изученное им периодическое решение. Тем не менее это второе приближение дает ему некоторые из наиболее важных элементов движения Луны, а именно, движения перигея, узла и коэффициент эвекции.

В действительности опубликованы лишь результаты, касающиеся движения перигея («Cambridge U. S. A.», 1877, и «Acta mathematica», т. VIII), но полученное численное значение чрезвычайно удовлетворительно [19].

Уравнения в вариациях в динамике

56. Пусть F — функция двойного ряда переменных

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

и времени t.

Предположим, что имеются дифференциальные уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i} \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{1}$$

Рассмотрим два бесконечно близких решения этих уравнений: решение

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

которое послужит порождающим решением, и

$$x_1 + \xi_1, \quad x_2 + \xi_2, \ldots, \quad x_n + \xi_n, \quad y_1 + \eta_1, \quad y_2 + \eta_2, \ldots, \quad y_n + \eta_n,$$

где ξ и η достаточно малы, чтобы можно было пренебречь их квадратами.

Тогда ξ и η будут удовлетворять линейным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta_k, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi_k - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta_k, \end{aligned} \tag{2}$$

которые являются уравнениями в вариациях уравнений (1).

Пусть ξ_i', η_i' — другое решение этих линейных уравнений, так что

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i'}{dt} &= \sum \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi_k' + \sum \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta_k'. \\ \frac{d\eta_i'}{dt} &= -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi_k' - \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta_k'. \end{aligned} \tag{2'}$$

Умножим уравнения (2) и (2′) соответственно на η_i', $-\xi_i'$, $-\eta_i$, ξ_i и просуммируем все эти уравнения; получим

$$\sum_i \left(\eta_i' \frac{d\xi_i}{dt} - \xi_i' \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i'}{dt} + \xi_i \frac{d\eta_i'}{dt}\right) = \sum_i \sum_k \left(\xi_k \eta_i' \frac{d^2F}{dy_i dx_k} + \eta_k \eta_i' \frac{d^2F}{dy_i dy_k} + \right.$$
$$+ \xi_k \xi_i' \frac{d^2F}{dx_i dx_k} + \eta_k \xi_i' \frac{d^2F}{dx_i dy_k} \Big) - \sum_i \sum_k \left(\eta_i \xi_k' \frac{d^2F}{dy_i dx_k} + \eta_i \eta_k' \frac{d^2F}{dy_i dy_k} + \right.$$
$$\left. + \xi_i \xi_k' \frac{d^2F}{dx_i dx_k} + \xi_i \eta_k' \frac{d^2F}{dx_i dy_k} \right),$$

или

$$\sum \frac{d}{dt} [\eta_i' \xi_i - \xi_i' \eta_i] = 0,$$

или, наконец,

$$\eta_1' \xi_1 - \xi_1' \eta_1 + \eta_2' \xi_2 - \xi_2' \eta_2 + \ldots + \eta_n' \xi_n - \xi_n' \eta_n = \text{const}. \qquad (3)$$

Это соотношение связывает между собой два любых решения линейных уравнений (2).

Легко найти другие аналогичные соотношения.

Рассмотрим четыре решения уравнений (2)

$$\xi_i, \xi_i', \xi_i'', \xi_i''',$$
$$\eta_i, \eta_i', \eta_i'', \eta_i'''.$$

Затем рассмотрим сумму определителей

$$\sum_i \sum_k \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_i' & \xi_i'' & \xi_i''' \\ \eta_i & \eta_i' & \eta_i'' & \eta_i''' \\ \xi_k & \xi_k' & \xi_k'' & \xi_k''' \\ \eta_k & \eta_k' & \eta_k'' & \eta_k''' \end{vmatrix},$$

где индексы i и k изменяются от 1 до n. Легко проверить, что и эта сумма постоянна.

Вообще, если образовать при помощи $2p$ решений уравнений (2) сумму определителей

$$\sum_{a_1, a_2, \ldots, a_p} |\xi_{a_1} \eta_{a_2} \xi_{a_2} \eta_{a_2} \ldots \xi_{a_p} \eta_{a_p}|,$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_p = 1, 2, \ldots, n),$$

то эта сумма будет постоянной.

В частности, определитель, образованный значениями $2n$ величин ξ и η в $2n$ решениях уравнений (2), будет постоянным.

Эти рассуждения позволяют найти одно решение уравнения (2), когда известен один его интеграл, и обратно.

Действительно, предположим, что

$$\xi_i = \alpha_i, \qquad \eta_i = \beta_i$$

— частное решение уравнений (2) и обозначим через ξ_i и η_i произвольное решение этих же уравнений. Должно выполняться равенство

$$\sum (\xi_i \beta_i - \eta_i \alpha_i) = \text{const},$$

которое является интегралом уравнений (2).

Обратно, пусть

$$\sum A_i \xi_i + \sum B_i \eta_i = \text{const}$$

— интеграл уравнений (2); тогда должно выполняться уравнение

$$\sum_i \frac{dA_i}{dt} \xi_i + \sum_i \frac{dB_i}{dt} \eta_i + \sum_i A_i \left(\sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k} \xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k} \eta_k \right) -$$
$$- \sum_i B_i \left(\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k} \xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k} \eta_k \right) = 0,$$

откуда получаем

$$\frac{dA_i}{dt} = - \sum_k \frac{d^2F}{dy_k dx_i} A_k + \sum_k \frac{d^2F}{dx_k dx_i} B_k,$$
$$\frac{dB_i}{dt} = - \sum_k \frac{d^2F}{dy_k dy_i} A_k + \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k} B_k.$$

Это показывает, что

$$\xi_i = B_i, \qquad \eta_i = - A_i$$

является частным решением уравнений (2).

Если теперь

$$\Phi (x_i, y_i, t) = \text{const}$$

— интеграл уравнений (1), то

$$\sum \frac{d\Phi}{dx_i} \xi_i + \sum \frac{d\Phi}{dy_i} \eta_i = \text{const}$$

будет интегралом уравнений (2) и, следовательно,

$$\xi_i = \frac{d\Phi}{dy_i}, \qquad \eta_i = -\frac{d\Phi}{dx_i}$$

будет частным решением этих уравнений.

Если $\Phi = \text{const}$, $\Phi_1 = \text{const}$ — два интеграла уравнений (1), то

$$\sum\left(\frac{d\Phi}{dx_i}\frac{d\Phi_1}{dy_i} - \frac{d\Phi}{dy_i}\frac{d\Phi_1}{dx_i}\right) = \text{const}.$$

Это теорема Пуассона.

Рассмотрим частный случай, когда переменные x обозначают прямоугольные координаты n точек в пространстве, будем их обозначать при помощи двойных индексов

$$x_{1i}, x_{2i}, x_{3i},$$

где первый индекс относится к трем прямоугольным осям координат, а второй — к n материальным точкам. Пусть m_i — масса i-й материальной точки. Тогда

$$m_i \frac{d^2x_{ki}}{dt^2} = \frac{dV}{dx_{ki}},$$

где V — силовая функция.

Тогда уравнение живых сил имеет вид

$$F = \sum \frac{m_i}{2}\left(\frac{dx_{ki}}{dt}\right)^2 - V = \text{const}.$$

Положим далее

$$y_{ki} = m_i \frac{dx_{ki}}{dt},$$

откуда

$$F = \sum \frac{y_{ki}^2}{2m_i} - V = \text{const} \tag{3}$$

и

$$\frac{dx_{ki}}{dt} = \frac{dF}{dy_{ki}}, \qquad \frac{dy_{ki}}{dt} = -\frac{dF}{dx_{ki}}. \tag{1'}$$

Пусть

$$x_{ki} = \varphi_{ki}(t), \qquad y_{ki} = m_i\varphi'_{ki}(t)$$

— решение этих уравнений (1'), тогда другим решением будет

$$x_{ki} = \varphi_{ki}(t+h), \qquad y_{ki} = m_i\varphi'_{ki}(t+h),$$

где h — любая постоянная.

Считая h бесконечно малой величиной, можно получить решение уравнений (2), которое соответствует (1) так же, как уравнения (2) соответствуют (1),

$$\xi_{ki} = h\varphi'_{ki}(t) = h\frac{y_{ki}}{m_i}, \qquad \eta_{ki} = hm_i\varphi''_{ki}(t) = h\frac{dV}{dx_{ki}},$$

где h — постоянный очень малый множитель, который можно опустить, когда рассматриваются лишь линейные уравнения (2).

Зная решение

$$\xi = \frac{y}{m}, \qquad \eta = \frac{dV}{dx}$$

этих уравнений, можно вывести из них интеграл

$$\sum\frac{y\eta}{m} - \sum\frac{dV}{dx}\xi = \text{const}$$

Но этот же интеграл получается очень легко дифференцированием уравнения живых сил (3).

Если материальные точки избавлены от всяких внешних воздействий, то из решения (4) можно получить другое решение

$$\begin{aligned} x_{1i} &= \varphi_{1i}(t) + h + kt, & y_{1i} &= m_i\varphi'_{1i}(t) + m_ik, \\ x_{2i} &= \varphi_{2i}(t), & y_{2i} &= m_i\varphi'_{2i}(t), \\ x_{3i} &= \varphi_{3i}(t), & y_{3i} &= m_i\varphi'_{3i}(t), \end{aligned}$$

где h и k — произвольные постоянные. Считая эти постоянные бесконечно малыми, получим два решения уравнений (2′)

$$\begin{aligned} &\xi_{1i} = 1, \quad \xi_{2i} = \xi_{3i} = \eta_{1i} = \eta_{2i} = \eta_{3i} = 0, \\ &\xi_{1i} = t, \quad \xi_{2i} = \xi_{3i} = \eta_{2i} = \eta_{3i} = 0, \quad \eta_{1i} = m_i. \end{aligned}$$

Таким образом получаются два интеграла уравнений (2′)

$$\sum_i \eta_{1i} = \text{const},$$

$$\sum\eta_{1i}t - \sum m_i\xi_{1i} = \text{const}.$$

Эти интегралы можно получить с помощью дифференцирования уравнений движения центра тяжести

$$\sum m_ix_{1i} = t\sum y_{1i} + \text{const},$$

$$\sum y_{1i} = \text{const}.$$

Если повернуть решение (4) на угол ω вокруг оси z, то получится другое решение

$$x_{1i} = \varphi_{1i}\cos\omega - \varphi_{2i}\sin\omega, \qquad \frac{y_{1i}}{m_i} = \varphi'_{1i}\cos\omega - \varphi'_{2i}\sin\omega,$$

$$x_{2i} = \varphi_{1i}\sin\omega + \varphi_{2i}\cos\omega, \qquad \frac{y_{2i}}{m_i} = \varphi'_{1i}\sin\omega + \varphi'_{2i}\cos\omega,$$

$$x_{3i} = \varphi_{3i}, \qquad \frac{y_{3i}}{m_i} = \varphi'_{3i}.$$

Считая ω бесконечно малым, находим решение уравнений (2′)

$$\xi_{1i} = -x_{2i}, \qquad \eta_{1i} = -y_{2i},$$
$$\xi_{2i} = x_{1i}, \qquad \eta_{2i} = y_{1i},$$
$$\xi_{3i} = 0, \qquad \eta_{3i} = 0,$$

откуда получается интеграл уравнений (2′)

$$\sum_i (x_{1i}\eta_{2i} - y_{1i}\xi_{2i} - x_{2i}\eta_{1i} + y_{2i}\xi_{1i}) = \text{const},$$

который можно было также получить, дифференцируя интеграл площадей уравнений (1′)

$$\Sigma\,(x_{1i}y_{2i} - x_{2i}y_{1i}) = \text{const}.$$

Предположим теперь, что функция V однородна и имеет степень -1 относительно переменных x, как это и есть в природе.

Уравнения (1′) не изменятся, если умножить t на λ^3, x на λ^2 и y на λ^{-1}, где λ — произвольная постоянная. Тогда из решения (4) мы получим следующее решение:

$$x_{ki} = \lambda^2\varphi_{ki}\left(\frac{t}{\lambda^3}\right), \qquad y_{ki} = \lambda^{-1}m_i\varphi'_{ki}\left(\frac{t}{\lambda^3}\right).$$

Если рассматривать значение λ, очень близкое к единице, то в качестве решения уравнений (2′) получим

$$\xi_{ki} = 2\varphi_{ki} - 3t\varphi'_{ki}, \qquad \eta_{ki} = -m_i\varphi'_{ki} - 3m_it\varphi''_{ki}$$

или

$$\xi_{ki} = 2x_{ki} - 3t\frac{y_{ki}}{m_i}, \qquad \eta_{ki} = -y_{ki} - 3t\frac{dV}{dx_{ki}}, \tag{5}$$

откуда получается следующий интеграл уравнений (2′), который в отличие от рассматриваемых до сих пор нельзя получить дифференцированием

известного интеграла уравнений (1′):

$$\sum(2x_{ki}\eta_{ki} + x_{ki}\xi_{ki}) = 3t\left[\sum\left(\frac{y_{ki}\eta_{ki}}{m_i} - \frac{dV}{dx_{ki}}\xi_{ki}\right)\right] + \text{const.}$$

Применение теории линейных подстановок

57. Прежде чем идти дальше, я должен напомнить некоторые свойства линейных преобразований, которые нам будут полезны в дальнейшем.

Пусть

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3,\\ \gamma_2 &= b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3,\\ \gamma_3 &= c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3,\end{aligned} \tag{1}$$

есть линейная подстановка, связывающая переменные β с переменными γ. Определитель этой подстановки есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix},$$

а уравнение

$$\begin{vmatrix} a_1 - S & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 - S & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3 - S\end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

— так называемое уравнение относительно S подстановки (1). Если применить к β и γ одну и ту же линейную подстановку, т. е. если положить

$$\begin{aligned}\beta_i' &= \lambda_{i,1}\beta_1 + \lambda_{i,2}\beta_2 + \lambda_{i,3}\beta_3,\\ \gamma_i' &= \lambda_{i,1}\gamma_1 + \lambda_{i,2}\gamma_2 + \lambda_{i,3}\gamma_3,\end{aligned}$$

где λ—постоянные, то γ' и β' будут связаны между собой линейными соотношениями того же вида, что и (1), и мы получим

$$\begin{aligned}\gamma_1' &= a_1'\beta_1' + a_2'\beta_2' + a_3'\beta_3',\\ \gamma_2' &= b_1'\beta_1' + b_2'\beta_2 + b_3'\beta_3',\\ \gamma_3' &= c_1'\beta_1' + c_2'\beta_2' + c_3'\beta_3'.\end{aligned} \tag{3}$$

Линейная подстановка (3) будет называться тогда *преобразованной подстановкой* (1).

Из теории линейных подстановок нам известно:

1) что новое уравнение относительно S

$$\begin{vmatrix} a_1' - S & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' - S & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' - S \end{vmatrix} = 0$$

не отличается от прежнего уравнения (2) относительно S;

2) что если определитель Δ равен нулю вместе со своими минорами до p-го порядка включительно, то то же самое верно и для определителя

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{vmatrix}$$

(в самом деле, миноры порядка p определителя Δ' являются линейной комбинацией миноров порядка p определителя Δ);

3) что можно выбрать λ таким образом, что подстановка (2) сведется к самому простому, так называемому каноническому виду. Этот вид характеризуется следующим.

Если все корни уравнения относительно S простые, то одновременно можно обратить в нуль a_2', a_3', b_1', b_3', c_1', c_2'.

Если уравнение относительно S имеет двойной корень, то можно одновременно обратить в нуль a_2', a_3', b_3', b_1', c_1'; тогда $b_2' = c_3'$.

Если уравнение относительно S имеет тройной корень, то можно одновременно обратить в нуль a_2', a_3' и b_3'; тогда $a_1' = b_2' = c_3'$.

Во всех случаях можно предполагать, что λ были выбраны так, что

$$a_2' = a_3' = b_3' = 0.$$

Если уравнение относительно S имеет нулевой корень, то и Δ равен нулю, и обратно. Предположим теперь, что все миноры первого порядка* определителя Δ равны нулю, тогда то же верно и для определителя Δ'. Но поскольку

$$a_2' = a_3' = b_3' = 0,$$

то среди миноров Δ' есть три, которые сводятся к

$$a_1'b_2',\ b_2'c_3',\ a_1'c_3';$$

они могут обращаться в нуль, лишь если две из трех величин a_2', b_2' и c_3' равны нулю. Но эти три величины суть три корня уравнения относительно S. Следовательно, если миноры Δ все равны нулю, уравнение относительно S имеет два нулевых корня.

* Т. е. полученные вычеркиванием одного столбца и одной строки. *(Прим. ред.)*

Обратное неверно.

Действительно, уравнение относительно S

$$\begin{vmatrix} 1-S & 0 & 0 \\ 0 & -S & 0 \\ 0 & 1 & -S \end{vmatrix} = 0$$

имеет два нулевых корня, однако не все миноры равны нулю.

Мы предположили для определенности, что имеем дело с линейной подстановкой относительно только трех переменных, однако те же рассуждения применяются и при любом числе переменных.

Если определитель линейной подстановки равен нулю вместе со всеми минорами первого, второго и т. д., до $(p-1)$-го порядка, то уравнение относительно S будет иметь p нулевых корней.

58. Пусть, как и в предыдущей главе,

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

— система дифференциальных уравнений. Пусть

$$x_i = \varphi_i(t)$$

— периодическое решение этих уравнений, имеющее период T.

Пусть в решении, близком в этому периодическому решению, $\varphi_i(0) + \beta_i$ — значение x_i при $t = 0$ и $\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i$ — значение x_i при $t = T + \tau$.

Рассмотрим функциональный определитель ψ по β

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \cdots & \cdots & \frac{d\psi_n}{d\beta_n} \end{vmatrix}.$$

Его можно рассматривать как таблицу коэффициентов линейной подстановки T.

Если совершить линейную замену переменных x, то β и ψ подвергнутся той же линейной замене переменных, и линейная подстановка T превратится в преобразованную подстановку в смысле предыдущего пункта.

Следовательно, мы можем выбрать линейную замену переменных x, β и ψ так, чтобы возможно сильнее упростить таблицу коэффициентов T, как это было указано выше.

Итак, мы можем всегда предполагать, что совершена такая замена переменных, что

$$\frac{d\psi_i}{d\beta_k} = 0 \qquad (1)$$

при всех $i < k$.

В этом случае корни уравнения относительно S, соответствующего подстановке T, равны

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1}, \frac{d\psi_2}{d\beta_2}, \ldots, \frac{d\psi_n}{d\beta_n}.$$

Более того, мы можем выбрать замену переменных x, β и ψ так, что эти корни уравнения относительно S будут располагаться в том порядке, в каком нам угодно. Если, например, уравнение относительно S имеет два нулевых корня, можно выбрать эту замену переменных так, что

$$\frac{d\psi_{n-1}}{d\beta_{n-1}} = \frac{d\psi_n}{d\beta_n} = 0.$$

Если уравнение относительно S имеет лишь один корень, равный $d\psi_1/d\beta_1$, то можно выбрать замену переменных так, что

$$\frac{d\psi_2}{d\beta_1} = \frac{d\psi_3}{d\beta_1} = \ldots = \frac{d\psi_n}{d\beta_1} = 0. \qquad (2)$$

Предположим теперь, что уравнение относительно S имеет один и только один нулевой корень; мы можем в силу изложенного выше предположить, что этот нулевой корень есть $d\psi_1/d\beta_1$, так что

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1} = 0,$$

и выбрать в то же время замену переменных так, чтобы удовлетворялись условия (1) и (2).

Итак, если уравнение относительно S имеет один и только один нулевой корень, то можно всегда предположить, что

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1} = \frac{d\psi_1}{d\beta_2} = \ldots = \frac{d\psi_1}{d\beta_n} = 0,$$

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1} = \frac{d\psi_2}{d\beta_1} = \ldots = \frac{d\psi_n}{d\beta_1} = 0.$$

Определение характеристических показателей

59. Пусть

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

— система дифференциальных уравнений, где X_1, X_2, . . ., X_n—данные функции от x_1, x_2, . . ., x_n. Мы можем предполагать либо, что время t не

входит явно в эти функции X_i, либо, наоборот, что функции X_i зависят не только от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, но еще и от времени t; в последнем случае X_i должны быть периодическими функциями t.

Предположим, что эти уравнения (1) допускают периодическое решение

$$x_i = \varphi_i(t).$$

Возьмем это решение за порождающее и образуем уравнения в вариациях (см. п. 52) уравнений (1), положив

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i$$

и пренебрегая квадратами ξ.

Эти уравнения в вариациях запишутся в виде

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{dX_i}{dx_n}\xi_n. \tag{2}$$

Они линейны относительно ξ и их коэффициенты dX_i/dx_i (где x_i заменены на $\varphi_i(t)$) являются периодическими функциями t. Итак, нам надо проинтегрировать линейные уравнения с периодическими коэффициентами.

В п. 29 мы видели, какова в общем случае форма интегралов этих уравнений; мы получаем n частных интегралов следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = e^{\alpha_1 t}S_{11}, \quad \xi_2 = e^{\alpha_1 t}S_{21}, \ldots, \quad \xi_n = e^{\alpha_1 t}S_{n1},\\
&\xi_1 = e^{\alpha_2 t}S_{12}, \quad \xi_2 = e^{\alpha_2 t}S_{22}, \ldots, \quad \xi_n = e^{\alpha_2 t}S_{n2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\xi_1 = e^{\alpha_n t}S_{1n}, \quad \xi_2 = e^{\alpha_n t}S_{2n}, \ldots, \quad \xi_n = e^{\alpha_n t}S_{nn},
\end{aligned} \tag{3}$$

где α — постоянные а S_{ik} — периодические функции от t того же периода, что и $\varphi_i(t)$.

Постоянные α называются *характеристическими показателями* переодического решения.

Если α чисто мнимое, так что его квадрат отрицателен, то модуль $e^{\alpha t}$ есть постоянная, равная единице. Если, напротив, α действительное или если α такое комплексное число, что его квадрат не является действительным, то модуль $e^{\alpha t}$ стремится к бесконечности при $t = +\infty$ или $t = -\infty$. Итак, если все α имеют действительные и отрицательные квадраты, величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ остаются конечными; я скажу тогда, что периодическое решение $x_i = \varphi_i(t)$ устойчиво; в противном случае я скажу, что это решение неустойчиво.

Интересным частным случаем является случай, когда два или несколько характеристических показателей равны между собой. В этом случае интегралы уравнений (2) уже нельзя записать в виде (3). Если бы,

например,

$$\alpha_1 = \alpha_2,$$

то уравнения (2) допускали два частных интеграла вида

$$\xi_i = e^{\alpha_1 t} S_{i,1}$$

и

$$\xi_i = te^{\alpha_1 t} S_{i,1} + e^{\alpha_1 t} S_{i,2},$$

где $S_{i,2}$ и $S_{i,1}$ — периодические функции t (см. п. 29).

Если бы три из характеристических показателей были равны между собой, то вне знаков тригонометрических и экспоненциальных функций могло бы появиться не только t, но и t^2.

Уравнение, определяющее характеристические показатели

60. Вернемся к уравнениям (1) предыдущего пункта; рассмотрим какое-нибудь решение

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i.$$

Пусть T — период порождающего периодического решения $x_i = \varphi_i(t)$; пусть $\varphi_i(0) + \beta_i$ — значение x_i при $t = 0$ и $\varphi_i(T) + \beta_i + \psi_i$ — значение x_i при $t = T$.

Поскольку ψ_i обращаются в нуль вместе с β_i и разложимы в ряд по возрастающим степеням β_i, мы можем написать по формуле Тейлора

$$\psi_i = \frac{d\psi_i}{d\beta_1}\beta_1 + \frac{d\psi_i}{d\beta_2}\beta_2 + \ldots + \frac{d\psi_i}{d\beta_n}\beta_n + \ldots.$$

Если рассмотренное решение достаточно мало отличается от периодического и можно пренебречь квадратами ξ, то можно будет также пренебречь квадратами β и останется

$$\psi_i = \frac{d\psi_i}{d\beta_1}\beta_1 + \frac{d\psi_i}{d\beta_2}\beta_2 + \ldots + \frac{d\psi_i}{d\beta_n}\beta_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Рассмотрим одно из частных решений уравнений в вариациях (2); при $t = 0$ мы имеем

$$\xi_i = \beta_i,$$

а при $t = T$

$$\xi_i = \beta_i + \psi_i.$$

Мы видели в п. 59, что среди этих частных решений n имеют замечательный вид: это решения (3); пусть

$$\xi_1 = e^{\alpha_k t} S_{1,k}, \quad \xi_2 = e^{\alpha_k t} S_{2,k}, \ldots, \quad \xi_n = e^{\alpha_k t} S_{n,k}$$

— одно из этих решений (3), или, опуская индекс k для сокращения записи,

$$\xi_i = e^{\alpha t} S_i(t).$$

Функции $S_i(t)$ — периодические функции t с периодом T; следовательно, при $t = 0$

$$\beta_i = S_i(0)$$

и при $t = T$

$$\beta_i + \psi_i = e^{\alpha T} S_i(T) = e^{\alpha T} S_i(0) = e^{\alpha T} \beta_i$$

или при замене ψ_i его значением

$$\beta_i (e^{\alpha T} - 1) = \frac{d\psi_i}{d\beta_1}\beta_1 + \frac{d\psi_i}{d\beta_2}\beta_2 + \ldots + \frac{d\psi_i}{d\beta_n}\beta_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Исключая $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ из этих n уравнений, получаем

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} + 1 - e^{\alpha T} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\psi_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} + 1 - e^{\alpha T} & \ldots & \frac{d\psi_2}{d\beta_n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\psi_n}{d\beta_n} + 1 - e^{\alpha T} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда следует правило: чтобы получить характеристические показатели α, составляем функциональный определитель ψ по β; образуем соответствующее уравнение относительно S; корни этого уравнения равны $e^{\alpha T} - 1$.

Само собой разумеется, что в частных производных $d\psi_i/d\beta_k$ надо после дифференцирования положить все β_i равными 0.

Случай, когда время не входит явно

61. Когда время t не входит явно в уравнения (1) п. 59, по меньшей мере один из характеристических показателей равен нулю. Пусть

$$x_i = \varphi_i(t)$$

— порождающее решение; если положить

$$x_i = \varphi_i(t + h),$$

где h — произвольная постоянная, то получим еще одно решение уравнений (1); тогда в силу п. 54 получим одно решение уравнения в вариациях, положив

$$\xi_i = \frac{d\varphi_i}{dh} = \frac{d\varphi_i}{dt}. \qquad (4)$$

Но поскольку φ_i — периодическая функция t, то такою же будет и ее частная производная $d\varphi_i/dt$.

Решение (4) имеет, конечно, вид (3) (т. е. равно показательной функции, умноженной на периодическую функцию от t). Только в этом случае показательная функция обращается в единицу и характеристический показатель равен нулю. Это и требовалось доказать.

Впрочем, мы уже видели в предыдущей главе, что в этом случае функциональный определитель ψ по β равен нулю.

Новая формулировка теоремы пунктов 37 и 38

62. В п. 37 мы вначале рассмотрели случай, когда уравнения (1) зависят от времени t и параметра μ и при $\mu = 0$ допускают единственное периодическое решение. Мы видели, что если функциональный определитель

$$\Delta \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{\partial(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)} \neq 0,$$

то и при малых значениях μ уравнения допускают периодическое решение.

Этот определитель можно записать в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\psi_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\psi_2}{d\beta_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_n} & \ldots & \frac{d\psi_n}{d\beta_n} \end{vmatrix}.$$

Но характеристические показатели α даны уравнением

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} + 1 - e^{\alpha T} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\psi_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} + 1 - e^{\alpha T} & \ldots & \frac{d\psi_2}{d\beta_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\psi_n}{d\beta_n} + 1 - e^{\alpha T} \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому сказать, что Δ равен нулю, значит сказать, что один из характеристических показателей равен нулю, и мы можем следующим образом выразить первую из теорем, доказанных в предыдущем пункте.

Если уравнения (1), *зависящие от параметра* μ, *допускают при* $\mu = 0$ *периодическое решение, ни один из характеристических показателей которого не равен нулю, то они будут допускать периодическое решение и при малых значениях* μ.

63. Можно прийти к аналогичному результату, если предположить, как и в п 38, что время не входит явно в дифференциальные уравнения.

В п. 38 мы видели, что для сохранения периодических решений при малых значениях μ достаточно, чтобы при $\mu = 0$ не все определители, содержащиеся в матрице

$$\begin{pmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \cdots & \frac{d\psi_1}{d\beta_n} & \frac{d\psi_1}{d\tau} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_2}{d\beta_n} & \frac{d\psi_2}{d\tau} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_n}{d\beta_n} & \frac{d\psi_n}{d\tau} \end{pmatrix},$$

обращались в нуль одновременно.

Рассмотрим теперь уравнение относительно S

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} - S & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} - S & \cdots & \frac{d\psi_2}{d\beta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_n}{d\beta_n} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Как мы уже видели в п. **60**, его корни равны $e^{\alpha T} - 1$, где T — период, α — характеристический показатель. Поскольку время не входит явно в уравнения, один из этих показателей равен нулю в силу п. **61**.

Следовательно, уравнение относительно S имеет по меньшей мере один нулевой корень; *я утверждаю, что если оно имеет только один нулевой корень, то периодические решения сохраняются при малых значениях* μ.

Действительно, в силу того, что мы показали в п. 58, всегда можно предположить, что

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1} = \frac{d\psi_1}{d\beta_2} = \frac{d\psi_1}{d\beta_3} = \ldots = \frac{d\psi_1}{d\beta_n} = 0,$$

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1} = \frac{d\psi_2}{d\beta_1} = \frac{d\psi_3}{d\beta_1} = \ldots = \frac{d\psi_n}{d\beta_1} = 0.$$

Левая часть уравнения относительно S записывается в виде

$$-S\begin{vmatrix} \frac{d\psi_2}{d\beta_2}-S & \frac{d\psi_2}{d\beta_3} & \dots & \frac{d\psi_2}{d\beta_n} \\ \frac{d\psi_3}{d\beta_2} & \frac{d\psi_3}{d\beta_3}-S & \dots & \frac{d\psi_3}{d\beta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \frac{d\psi_n}{d\beta_3} & \dots & \frac{d\varphi_n}{d\beta_n}-S \end{vmatrix}.$$

Итак, если уравнение относительно S имеет лишь один нулевой корень, то функциональный определитель δ величин $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$ по $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ не равен нулю.

Тогда определитель, полученный из матрицы вычеркиванием первого столбца, сводится к

$$\delta\frac{d\psi_1}{d\tau}.$$

Я утверждаю, что он не равен нулю. В самом деле, $d\psi_1/d\tau$ не может обращаться в нуль по следующей причине.

Равенства

$$\frac{d\psi_1}{d\tau}=\frac{d\psi_2}{d\tau}=\dots=\frac{d\psi_n}{d\tau}=0$$

не могут выполняться одновременно.

Если бы эти равенства выполнялись, то это означало бы, что для периодического решения

$$x_1=\varphi_1(t),\qquad x_2=\varphi_2(t),\qquad \dots,\qquad x_n=\varphi_n(t),$$

которое соответствует $\mu=0$ и с которого мы начинали, мы имели бы при $t=T$ (следовательно, также при всех значениях t)

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{dx_2}{dt}=\dots=\frac{dx_n}{dt}=0,$$

так что $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\dots,\varphi_n(t)$ были бы постоянными, а этот случай мы исключим из рассмотрения.

С другой стороны, я утверждаю, что

$$\frac{d\psi_2}{d\tau}=\frac{d\psi_3}{d\tau}=\dots=\frac{d\psi_n}{d\tau}=0.$$

Действительно, мы имеем, как это было показано выше (см. п. 38),

$$\frac{d\psi_1}{d\tau}\frac{d\psi_i}{d\beta_1}+\frac{d\psi_2}{d\tau}\frac{d\psi_i}{d\beta_2}+\dots+\frac{d\psi_n}{d\tau}\frac{d\psi_i}{d\beta_n}=0\qquad(i=1,2,\dots n).$$

Но

$$\frac{d\psi_i}{d\beta_1} = 0;$$

следовательно, мы имеем ряд линейных уравнений

$$\frac{d\psi_2}{d\tau}\frac{d\psi_i}{d\beta_2} + \ldots + \frac{d\psi_n}{d\tau}\frac{d\psi_i}{d\beta_n} = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

и, поскольку определитель этих уравнений (т. е. δ) не равен нулю, получаем

$$\frac{d\psi_2}{d\tau} = \frac{d\psi_3}{d\tau} = \ldots = \frac{d\psi_n}{d\tau} = 0.$$

Исключая из рассмотрения случай, когда $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ постоянны, который будет изучен отдельно в п. 68, мы приходим к заключению, что

$$\frac{d\psi_1}{d\tau} \neq 0,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, если дифференциальные уравнения не содержат времени в явном виде и допускают периодическое решение при $\mu = 0$, то один из характеристических показателей этого решения будет всегда равен нулю; если, кроме того, ни один из остальных показателей не равен нулю, то периодическое решение существует и при малых значениях μ.

Случай, когда уравнения допускают однозначные интегралы

64. Предположим, что уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где X_i — однозначные функции x_1, x_2, . . ., x_n и t, периодические по t с периодом 2π, допускают периодическое решение с периодом 2π

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(t),$$

так что $\varphi_i(2\pi) = \varphi_i(0)$ и не зависящий от времени, *однозначный* по x_1, x_2, . . ., x_n интеграл

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const}.$$

Я утверждаю, что один из характеристических показателей равен нулю всегда, кроме исключительного случая, о котором скажу позже.

Действительно, определим величины ψ и β, как и в п. 37, и рассмотрим функциональный определитель ψ по β. Я утверждаю, что этот определитель равен нулю.

В самом деле, тождественно имеем

$$F[\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i] = F[\varphi_i(0) + \beta_i],$$

где для краткости вместо

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

мы пишем $F(x_i)$.

Дифференцируя это тождество по β_i, находим

$$\frac{dF}{dx_1}\frac{d\psi_1}{d\beta_i} + \frac{dF}{dx_2}\frac{d\psi_2}{d\beta_i} + \ldots + \frac{dF}{dx_n}\frac{d\psi_n}{d\beta_i} = 0. \tag{2}$$

В производных $\frac{dF}{dx_1}, \frac{dF}{dx_2}, \ldots, \frac{dF}{dx_n}$ надо заменить $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \ldots, \varphi_n(0)$.

Мы можем положить в уравнениях (2) $i = 1, 2, \ldots, n$; таким образом получаем n линейных уравнений относительно величин

$$\frac{dF}{dx_1}, \frac{dF}{dx_2}, \ldots, \frac{dF}{dx_n}.$$

Тогда будет верно одно из двух: либо определитель этих уравнений (2), т. е. функциональный определитель ψ по β, будет равен нулю, и тогда, как мы видели в п. 62, один из характеристических показателей будет равен нулю.

Либо одновременно будут выполняться равенства

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \ldots = \frac{dF}{dx_n}. \tag{3}$$

Эти уравнения должны удовлетворяться при

$$x_1 = \varphi_1(2\pi), \quad x_2 = \varphi_2(2\pi), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(2\pi),$$

или, что то же, при

$$x_1 = \varphi_1(0), \quad x_2 = \varphi_2(0), \quad \ldots, x_n = \varphi_n(0).$$

Но начальный момент времени остается полностью произвольным; следовательно, мы должны заключить, что уравнения (3) будут удовлетворены для любого t при

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t).$$

Впрочем, в этом можно убедиться следующим образом.

Предположим, что уравнения (3) удовлетворяются для системы значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$; я утверждаю, что они также будут удовлетворяться для бесконечно близкой системы $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2, \ldots, x_n + dx_n$, если только в соответствии с дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Другими словами, я утверждаю, что из уравнений (3) следуют уравнения

$$\frac{d^2F}{dx_i dx_1} X_1 + \frac{d^2F}{dx_i dx_2} X_2 + \ldots + \frac{d^2F}{dx_i dx_n} X_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Действительно, *тождественно* выполняется равенство

$$\frac{dF}{dx_1} X_1 + \frac{dF}{dx_2} X_2 + \ldots + \frac{dF}{dx_n} X_n = 0$$

(поскольку F — интеграл дифференциальных уравнений).

Дифференцируя это тождество по x_i, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d^2F}{dx_i dx_k} X_k + \frac{dF}{dx_k} \frac{dX_k}{dx_i} \right) = 0$$

или в силу уравнений (3)

$$\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k} X_k = 0,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, если дифференциальные уравнения допускают однозначный интеграл, то один из характеристических показателей любого периодического решения будет равен нулю, если только все частные производные интеграла не обращаются в нуль во всех точках этого периодического решения. Последнее обстоятельство может представиться лишь в исключительном случае.

65. Предположим снова, что правые части дифференциальных уравнений (1) содержат время в явном виде и являются относительно этой переменной периодическими функциями с периодом 2π.

Я утверждаю, что если дифференциальные уравнения имеют два однозначных интеграла F и F_1, то два характеристических показателя равны нулю.

Действительно, как и в предыдущем пункте, найдем

$$\begin{gathered}\frac{dF}{dx_1}\frac{d\psi_1}{d\beta_i}+\frac{dF}{dx_2}\frac{d\psi_2}{d\beta_i}+\ldots+\frac{dF}{dx_n}\frac{d\psi_n}{d\beta_i}=0,\\ \frac{dF_1}{dx_1}\frac{d\psi_1}{d\beta_i}+\frac{dF_1}{dx_2}\frac{d\psi_2}{d\beta_i}+\ldots+\frac{dF_1}{dx_n}\frac{d\psi_n}{d\beta_i}=0,\\ (i=1,2,\ldots,n)\\ [x_1=\varphi_1(0),\quad x_2=\varphi_2(0),\quad \ldots,\quad x_n=\varphi_n(0)].\end{gathered}\tag{2}$$

Отсюда можно заключить, что не только функциональный определитель ψ по β равен нулю, но также равны нулю все его миноры первого порядка, если только одновременно не выполняются уравнения

$$\frac{\dfrac{dF}{dx_1}}{\dfrac{dF_1}{dx_1}}=\frac{\dfrac{dF}{dx_2}}{\dfrac{dF_1}{dx_2}}=\ldots=\frac{\dfrac{dF}{dx_n}}{\dfrac{dF_1}{dx_n}}.\tag{3}$$

Но в силу п. 57 это может случиться, лишь если уравнение относительно S, составленное при помощи функционального определителя величин ψ, имеет два нулевых корня, т. е. (поскольку эти корни равны $e^{\alpha T}-1$) если два характеристических показателя равны нулю.

Итак, если имеются два однозначных интеграла, то найдутся два нулевых характеристических показателя, если только уравнения (3) не удовлетворяются во всех точках периодического решения, что, очевидно, может произойти лишь в исключительном случае.

Точно так же можно было бы доказать, что если имеются p однозначных интегралов $F_1, F_2, \ldots, F_p$, то p характеристических показателей будут равны нулю, если только все определители матрицы

$$\begin{pmatrix}\dfrac{dF_1}{dx_1} & \dfrac{dF_1}{dx_2} & \ldots & \dfrac{dF_1}{dx_n}\\ \dfrac{dF_2}{dx_1} & \dfrac{dF_2}{dx_2} & \ldots & \dfrac{dF_2}{dx_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \dfrac{dF_p}{dx_1} & \dfrac{dF_p}{dx_2} & \ldots & \dfrac{dF_p}{dx_n}\end{pmatrix}$$

не обращаются в нуль во всех точках периодического решения.

66. Представим себе теперь, что время не входит явно в наши дифференциальные уравнения и что, кроме того, эти уравнения имеют одно-

значный интеграл

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const},$$

не зависящий от времени t.

Я утверждаю, что два характеристических показателя будут равны нулю.

Прежде всего, мы видели, что один из этих показателей всегда равен нулю, когда время не входит явно. Если, кроме того, имеется интеграл F, то, как в п. **64**,

$$F[\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i] = F[\varphi_i(0) + \beta_i]$$

и, дифференцируя это соотношение по β_i и τ, получим

$$\frac{dF}{dx_1}\frac{d\psi_1}{d\beta_i} + \frac{dF}{dx_2}\frac{d\psi_2}{d\beta_i} + \ldots + \frac{dF}{dx_n}\frac{d\psi_n}{d\beta_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{dF}{dx_1}\frac{d\psi_1}{d\tau} + \frac{dF}{dx_2}\frac{d\psi_2}{d\tau} + \ldots + \frac{dF}{dx_n}\frac{d\psi_n}{d\tau} = 0.$$

Отсюда следует, что или одновременно

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \ldots = \frac{dF}{dx_n} = 0$$

во всех точках периодического решения, или же все определители, содержащиеся в матрице

$$\begin{pmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\psi_1}{d\beta_n} & \frac{d\psi_1}{d\tau} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\psi_2}{d\beta_n} & \frac{d\psi_2}{d\tau} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\psi_n}{d\beta_n} & \frac{d\psi_n}{d\tau} \end{pmatrix},$$

одновременно равны нулю.

Но мы видели в п. **63**, что это может случиться, лишь если два характеристических показателя обращаются в нуль.

67. Я намереваюсь теперь доказать следующее.

Предположим снова, что время не входит явно в наши дифференциальные уравнения; предположим, что эти уравнения имеют p аналитических и однозначных интегралов, в которые время также не входит явно. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_p$ — эти p интегралов.

Тогда либо $p+1$ характеристических показателей равны нулю, либо все определители, содержащиеся в матрице

$$\left(\frac{dF_i}{dx_k}\right) \qquad (i=1,2,\ldots,p;\ k=1,2,\ldots,n),$$

равны нулю во всех точках порождающего периодического решения.

Действительно, предположим для определенности, что

$$n=4,\ p=2.$$

Мы будем тогда иметь следующие уравнения:

$$\frac{dF_1}{dx_1}\frac{d\psi_1}{d\beta_i}+\frac{dF_1}{dx_2}\frac{d\psi_2}{d\beta_i}+\frac{dF_1}{dx_3}\frac{d\psi_3}{d\beta_i}+\frac{dF_1}{dx_4}\frac{d\psi_4}{d\beta_i}=0, \qquad (i=1,2,3,4),$$

$$\frac{dF_2}{dx_1}\frac{d\psi_1}{d\beta_i}+\frac{dF_2}{dx_2}\frac{d\psi_2}{d\beta_i}+\frac{dF_2}{dx_3}\frac{d\psi_3}{d\beta_i}+\frac{dF_2}{dx_4}\frac{d\psi_4}{d\beta_i}=0,$$

$$\frac{dF_1}{dx_1}\frac{d\psi_1}{d\tau}+\frac{dF_1}{dx_2}\frac{d\psi_2}{d\tau}+\frac{dF_1}{dx_3}\frac{d\psi_3}{d\tau}+\frac{dF_1}{dx_4}\frac{d\psi_4}{d\tau}=0,$$

$$\frac{dF_2}{dx_1}\frac{d\psi_1}{d\tau}+\frac{dF_2}{dx_2}\frac{d\psi_2}{d\tau}+\frac{dF_2}{dx_3}\frac{d\psi_3}{d\tau}+\frac{dF_2}{dx_4}\frac{d\psi_4}{d\tau}=0.$$

Из этих уравнений можно вывести, что либо все определители, содержащиеся в матрице

$$\begin{pmatrix} \frac{dF_1}{dx_1} & \frac{dF_1}{dx_2} & \frac{dF_1}{dx_3} & \frac{dF_1}{dx_4} \\ \frac{dF_2}{dx_1} & \frac{dF_2}{dx_2} & \frac{dF_2}{dx_3} & \frac{dF_2}{dx_4} \end{pmatrix},$$

равны нулю одновременно, либо все определители, содержащиеся в матрице

$$\begin{pmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \frac{d\psi_1}{d\beta_3} & \frac{d\psi_1}{d\beta_4} & \frac{d\psi_1}{d\tau} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} & \frac{d\psi_2}{d\beta_3} & \frac{d\psi_2}{d\beta_4} & \frac{d\psi_2}{d\tau} \\ \frac{d\psi_3}{d\beta_1} & \frac{d\psi_3}{d\beta_2} & \frac{d\psi_3}{d\beta_3} & \frac{d\psi_3}{d\beta_4} & \frac{d\psi_3}{d\tau} \\ \frac{d\psi_4}{d\beta_1} & \frac{d\psi_4}{d\beta_2} & \frac{d\psi_4}{d\beta_3} & \frac{d\psi_4}{d\beta_4} & \frac{d\psi_4}{d\tau} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

равны нулю одновременно вместе со своими минорами первого порядка.

Как мы видели в п. 58, можно всегда предполагать, что

$$\frac{d\psi_i}{d\beta_k}=0$$

при

$$i < k.$$

С другой стороны, поскольку все миноры определителя, полученного вычеркиванием последующего столбца матрицы (1), должны быть равны нулю, то соответствующее уравнение относительно S будет иметь два нулевых корня; следовательно, я могу предположить, что

$$\frac{d\psi_3}{d\beta_3} = \frac{d\psi_4}{d\beta_4} = 0.$$

Я намерен показать, что уравнение относительно S имеет третий нулевой корень и, следовательно,

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1} = 0$$

или

$$\frac{d\psi_2}{d\beta_2} = 0.$$

В самом деле, в силу самого определения ψ_i имеем $\psi_i = 0$, если положить

$$\beta_k = \varphi_k(h) - \varphi_k(0),$$

где h — любая постоянная; отсюда, дифференцируя по h и полагая затем $h = 0$, получаем

$$\sum \frac{d\psi_i}{d\beta_k} \varphi_k'(0) = 0.$$

Но

$$\varphi_k'(0) = \frac{d\psi_k}{d\tau};$$

следовательно,

$$\frac{d\psi_i}{d\beta_1}\frac{d\psi_1}{d\tau} + \frac{d\psi_i}{d\beta_2}\frac{d\psi_2}{d\tau} + \frac{d\psi_i}{d\beta_3}\frac{d\psi_3}{d\tau} + \frac{d\psi_i}{d\beta_4}\frac{d\psi_4}{d\tau} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{2}$$

Полагая $i = 1$, получаем

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1}\frac{d\psi_1}{d\tau} = 0,$$

откуда

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1} = 0$$

или

$$\frac{d\psi_1}{d\tau} = 0.$$

В первом случае теорема доказана. Во втором случае запишем уравнение (2), положив $i = 2$; получим

$$\frac{d\psi_2}{d\beta_2}\frac{d\psi_2}{d\tau} = 0,$$

откуда или

$$\frac{d\psi_2}{d\beta_2} = 0,$$

или

$$\frac{d\psi_2}{d\tau} = 0.$$

В первом случае теорема доказана, во втором случае имеем

$$\frac{d\psi_1}{d\tau} = \frac{d\psi_2}{d\tau} = 0,$$

откуда можно заключить (поскольку мы исключаем из рассмотрения случай, когда все $d\psi_i/d\tau$ равны нулю одновременно), что производные $d\psi_3/d\tau$ и $d\psi_4/d\tau$ не обе равны нулю.

Образуем миноры, получаемые вычеркиванием в матрице (1) третьего и четвертого столбцов и третьей строки (или третьего и четвертого столбцов и четвертой строки).

Эти два минора должны равняться нулю; это дает

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1}\frac{d\psi_2}{d\beta_2}\frac{d\psi_3}{d\tau} = \frac{d\psi_1}{d\beta_1}\frac{d\psi_2}{d\beta_2}\frac{d\psi_4}{d\tau} = 0,$$

откуда вытекает (поскольку $d\psi_3/d\tau$ и $d\psi_4/d\tau$ не обе равны нулю), что или

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1} = 0,$$

или

$$\frac{d\psi_2}{d\beta_2} = 0,$$

а это и требовалось доказать.

68. В п. 67 мы исключили из рассмотрения случай, когда

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$$

постоянны, т. е. когда одновременно выполняются равенства

$$\frac{d\psi_1}{d\tau} = \frac{d\psi_2}{d\tau} = \ldots = \frac{d\psi_n}{d\tau} = 0.$$

Если по-прежнему предполагать, что время не входит явно в исходные дифференциальные уравнения, то остаются в силе уравнения

$$\frac{d\psi_i}{d\beta_1}\frac{d\psi_1}{d\tau} + \frac{d\psi_i}{d\beta_2}\frac{d\psi_2}{d\tau} + \ldots + \frac{d\psi_i}{d\beta_n}\frac{d\psi_n}{d\tau} = 0.$$

Но из этих уравнений не вытекает более ни что функциональный определитель ψ по β равен нулю, ни что один из характеристических показателей всегда равен нулю.

Итак, если дифференциальные уравнения имеют p интегралов, то из этого можно только заключить, что по меньшей мере p характеристических показателей равны нулю (но не $p+1$), как в случае, когда время явно входит в уравнения.

Случай уравнений динамики

69. Перейдем теперь к уравнениям динамики

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

куда, я предполагаю, время не входит явно. Они имеют интеграл живых сил

$$F = \text{const}.$$

Предположим, что уравнения (1) имеют периодическое решение с периодом 2π

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \psi_i(t)$$

и составим уравнения в вариациях, положив

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \qquad y_i = \psi_i(t) + \eta_i.$$

В п. 56 мы показали, что если ξ_i, η_i, и ξ_i', η_i' — два произвольных частных решения уравнений в вариациях, то

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i \eta_i' - \xi_i' \eta_i) = \text{const}.$$

Я утверждаю, что отсюда следует, что характеристические показатели попарно равны по величине и противоположны по знаку.

В самом деле, пусть ξ_i^0 и η_i^0 — начальные значения ξ_i и η_i при $t = 0$ в некотором решении уравнений в вариациях; пусть ξ_i^1 и η_i^1 — соответствующие значения ξ_i и η_i при $t = 2\pi$. Ясно, что ξ_i^1 и η_i^1 будут линейными функциями ξ_i^0 и η_i^0, так что подстановка T, переводящая ξ_i^0 и η_i^0 в ξ_i^1 и η_i^1, будет линейной подстановкой.

Пусть

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,2n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & \ldots & a_{2n,2n} \end{vmatrix}$$

— таблица коэффициентов этой линейной подстановки.

Составим уравнение относительно λ:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1,2n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & \dots & a_{2n,2n}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$2n$ корней этого уравнения будут так называемыми мультипликаторами линейной подстановки T. Но эта линейная подстановка T не может быть произвольной; необходимо, чтобы она не изменяла билинейной формы

$$\sum_i (\xi_i \eta_i' - \xi_i' \eta_i).$$

Для этого уравнение относительно λ должно быть возвратным. Действительно, теория линейных подстановок нас учит, что если линейная подстановка не изменяет билинейной формы, то ее уравнение относительно S должно быть возвратным. Итак, если положить

$$\lambda = e^{2\alpha\pi},$$

то величины α должны быть попарно равными по абсолютной величине и противоположными по знаку, что и требовалось доказать. Мы вернемся к этому в п. 70.

70. Уравнения (1) предыдущего пункта всегда допускают интеграл, называемый интегралом живых сил

$$F = \text{const}.$$

Я предполагаю, что они имеют, кроме того, p однозначных интегралов

$$F_1 = \text{const}, \quad F_2 = \text{const}, \quad \dots, \quad F_p = \text{const}.$$

Я предполагаю также, что попарные скобки Пуассона этих интегралов равны нулю, т. е.

$$[F_i, F_k] = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, p).$$

Впрочем, известно, что для произвольного интеграла F_i

$$[F, F_i] = 0.$$

Я собираюсь доказать, что в этом случае либо все функциональные определители функций F, F_1, F_2, . . ,F_p по любым $p+1$ переменным x_i и y_i одновременно равны нулю во всех точках периодического решения, либо $2p+2$ характеристических показателей равны нулю.

Действительно, рассмотрим снова уравнения (2) п. 56, т. е. уравнения в вариациях уравнений (1). Пусть ξ_i, η_i — частное решение этих уравнений; обозначим это решение через S; пусть ξ_i', η_i' — другое решение этих же уравнений; обозначим его через S'.

Мы знаем, что

$$\sum(\xi_i\eta_i' - \xi_i'\eta_i) = \text{const}.$$

Я обозначу (S, S') левую часть этого соотношения.

Мы видели в п. 59, что среди решений предложенных уравнений некоторые имеют замечательный вид. Для одних каждая из величин ξ_i и η_i равна показательной функции $e^{\alpha t}$, умноженной на периодическую функцию от t. Эти решения я буду называть *решениями первого вида.*

Для других каждая из величин ξ_i и η_i равна показательной функции $e^{\alpha t}$, умноженной на целый многочлен от t, коэффициенты которого являются периодическими функциями t. Я буду их называть *решениями второго вида.*

Уравнения (2) могут допускать только $2n$ линейно независимых решений. Следовательно, произвольное решение может рассматриваться как линейная комбинация $2n$ решений, называемых *фундаментальными.*

Если из $2n$ характеристических показателей p различны, можно выбрать в качестве фундаментальных решений p решений первого вида и $2n - p$ решений второго вида.

Пусть

$$S_1, S_2, \ldots, S_q$$

— q частных линейно независимых решений уравнений (2); обозначим через S' произвольное решение.

Линейно независимых решений, удовлетворяющих условиям

$$(S_1, S') = (S_2, S') = \ldots = (S_q, S') = 0 \tag{3}$$

не может быть больше $2n - q$.

Действительно, пусть

$$\xi_i = \xi_i^k, \qquad \eta_i = \eta_i^k$$

— решение S_k; сохраним буквы ξ_i и η_i для обозначения решений S', тогда условия (3) нам дадут q линейных соотношений между ξ_i и η_i; эти соотношения различны, если частные решения S_1, S_2, . . ., S_q линейно независимы. Следовательно, они дадут возможность понизить на q единиц порядок линейных дифференциальных уравнений (2). После этого понижения порядка уравнения будут иметь только $2n - q$ линейно независимых решений, что и требовалось доказать.

Теперь предположим, что S — решение первого или второго вида, соответствующее характеристическому показателю α, и что S' — решение

первого или второго вида, соответствующее характеристическому показателю β. Составим выражение

$$(S, S').$$

Это выражение имеет следующий вид: показательная функция $e^{(\alpha+\beta)t}$, умноженная на целый многочлен от t, коэффициентами которого являются периодические функции t.

Но это выражение должно сводиться к постоянной. Ясно, что это может быть лишь в двух случаях: либо если эта постоянная равна нулю, либо если $\alpha + \beta = 0$.

Отсюда можно заключить, что если имеется q характеристических показателей, равных $+\alpha$, найдется еще q, равных $-\alpha$, что подтверждает результат, полученный в п. 69. Действительно, если q характеристических показателей равны $+\alpha$, то показателю α соответствуют q линейно независимых решений первого или второго вида.

Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_q$ — эти q решений. Независимых решений S', удовлетворяющих соотношениям

$$(S_1, S') = (S_2, S') = \ldots = (S_q, S') = 0,$$

не может быть больше $2n - q$.

Следовательно, среди фундаментальных решений (которые все первого или второго вида) имеются q, для которых по меньшей мере одна из постоянных (S_i, S') не равна нулю, и, следовательно, для которых показатель β равен $-\alpha$.

71. Предположим теперь, что уравнения (1) допускают интеграл

$$F_1 = \text{const}.$$

Как мы видели в п. 54, уравнения (2) будут допускать в качестве частного решения

$$\xi_i = \frac{dF_1}{dy_i}, \qquad \eta_i = -\frac{dF_1}{dx_i}.$$

Обозначим через S_1 это решение; функции dF_1/dx_i и dF_1/dy_i (где надо будет заменить x_i и y_i их значениями, соответствующими порождающему периодическому решению) будут периодическими функциями t. Следовательно, решение S_1 первого вида и его характеристический показатель равен нулю.

Если $F_2 = \text{const}$ — другой интеграл и S_2 — решение

$$\xi_i = \frac{dF_2}{dy_i}, \qquad \eta_i = -\frac{dF_2}{dx_i},$$

то

$$(S_1, S_2) = [F_1, F_2].$$

Предположим теперь, что наши уравнения (1) допускают $p+1$ интеграл

$$F = \text{const}, \quad F_1 = \text{const}, \quad F_2 = \text{const}, \quad \ldots, \quad F_p = \text{const},$$

и пусть

$$S, S_1, S_2, \ldots, S_p$$

— $p+1$ решений уравнений (2), соответствующих этим интегралам.

Справедливо одно из двух: либо эти $p+1$ решений независимы; либо все функциональные определители $F, F_1, F_2, \ldots, F_p$ по $p+1$ переменным, выбранным среди x_i и y_i, одновременно равны нулю во всех точках периодического решения.

Предположим, что это не так и что решения S, S_1, S_2, . . ., S_p независимы.

Во всех случаях мы будем иметь

$$[F, F_i] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

откуда

$$(S, S_i) = 0.$$

Я предполагаю, что, кроме того,

$$[F_i, F_k] = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, p).$$

Равным образом будем иметь

$$(S_i, S_k) = 0.$$

За $2n$ фундаментальных решений я возьму $p+1$ решений S, S_1, $S_2, \ldots, S_p$ и $2n - p - 1$ других решений первого или второго вида.

Среди фундаментальных решений заведомо найдется $p+1$, которые (я обозначу их S') не будут одновременно удовлетворять соотношениям

$$(S, S') = (S_1, S') = \ldots = (S_p, S') = 0$$

и которые, следовательно, будут иметь характеристический показатель, равный нулю.

Но эти $p+1$ решений не совпадут с $p+1$ решениями

$$S, S_1, S_2, \ldots, S_p.$$

Я утверждаю, что, например, не может иметь место равенство

$$S' = S_k,$$

так как по предположению

$$(S, S_k) = (S_1, S_k) = \ldots = (S_p, S_k) = 0,$$

а S' в силу самого своего определения этим свойством не обладает.

72. Предположим теперь, что существуют p интегралов (кроме $F = \text{const}$), а именно,

$$F_1 = \text{const}, \quad F_2 = \text{const}, \quad \ldots, \quad F_p = \text{const},$$

но что попарные скобки Пуассона этих p интегралов не равны нулю. Все, что можем утверждать в этом случае, это что $p + 2$ характеристических показателя равны нулю. Но мы знаем, что по меньшей мере $p + 1$ фундаментальных решений (тех, что мы обозначили S, S_1, S_2, . . ., S_p) будут первого вида с нулевым показателем.

Поэтому если было установлено, что уравнения (2) допускают лишь p линейно независимых решений первого вида с нулевым показателем, то можно быть уверенным, что уравнения (1) имеют не более чем $p + 1$ интегралов (включая $F = \text{const}$) или по крайней мере что если эти $p + 1$ интегралов существуют, то все их функциональные определители по $p + 1$ из $2n$ переменных x и y одновременно равны нулю во всех точках периодического решения.

Замена переменных

73. Посмотрим, что происходит с характеристическими показателями при замене переменных.

Пусть

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i$$

— наши дифференциальные уравнения, куда, я предполагаю, время не входит явно. Пусть

$$x_i = \varphi_i(t)$$

— периодическое решение с периодом T. Пусть

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i,$$

откуда получаем уравнения в вариациях

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum \frac{dX_i}{dx_k} \xi_k.$$

Пусть

$$\xi_i = e^{\alpha t} \psi_i(t)$$

— решение этих уравнений в вариациях, где ψ_i периодичны по t.

Сделаем замену переменных, заменяя время t новой переменной τ, определенной соотношением

$$\frac{dt}{d\tau} = \Phi,$$

где Φ — данная функция $x_1, x_2, \ldots, x_n$; получаем дифференциальные уравнения

$$\frac{dx_i}{d\tau} = X_i\Phi \tag{1bis}$$

и уравнения в вариациях

$$\frac{d\xi_i}{d\tau} = \Phi\sum\frac{dX_i}{dx_k}\xi_k + X_i\sum\frac{d\Phi}{dx_k}\xi_k. \tag{2bis}$$

Уравнения (1bis) допускают периодическое решение

$$x_i = \varphi_i'(\tau),$$

соответствующее

$$x_i = \varphi_i(t),$$

период которого равен

$$T' = \int_0^T \frac{dt}{\Phi}.$$

В Φ до интегрирования следует x_i заменить на $\varphi_i(t)$.

Чтобы решить уравнения (2bis), мы учтем величину $dt/d\tau$ и запишем

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum\frac{dX_i}{dx_k}\xi_k + X_i\sum\frac{\frac{d\Phi}{dx_k}\xi_k}{\Phi} \tag{2ter}$$

Положим затем

$$\xi_i = \eta_i + X_i\lambda;$$

получим

$$\frac{d\eta_i}{dt} + X_i\frac{d\lambda}{dt} + \sum\lambda\frac{dX_i}{dx_k}X_k =$$

$$= \sum\frac{dX_i}{dx_k}\eta_k + \sum\lambda\frac{dX_i}{dx_k}X_k + \frac{X_i}{\Phi}\sum\frac{d\Phi}{dx_k}\eta_k + \frac{X_i\lambda}{\Phi}\sum\frac{d\Phi}{dx_k}X_k,$$

отсюда видно, что можно удовлетворить уравнениям (2ter), полагая

$$\eta_i = e^{\alpha t}\psi_i(t) \text{ и } \Phi\frac{d\lambda}{dt} = \lambda\sum\frac{d\Phi}{dx_k}X_k + \sum\frac{d\Phi}{dx_k}e^{\alpha t}\psi_k(t).$$

Из этого можно получить

$$\lambda = e^{\alpha t}\,\theta(t)$$

и

$$\xi_i = e^{\alpha t}\,\theta_i(t),$$

где $\theta(t)$ и $\theta_i(t)$ — периодические по t. Затем следует заменить t его значением, полученным из уравнения

$$\frac{dt}{d\tau} = \Phi[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)].$$

Таким образом, находим

$$t = \frac{T}{T'}\tau + f(\tau),$$

где $f(\tau)$ — периодическая функция τ. Итак, получаем

$$\xi_i = e^{\frac{\alpha T}{T'}\tau} e^{\alpha f(\tau)}\,\theta_i\left[\frac{T}{T'}\tau + f(\tau)\right],$$

откуда видно, что после замены переменных новые характеристические показатели равны старым, умноженным на T/T'.

Разложение показателей. Вычисление первых членов

74. Вернемся к уравнениям

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

из п. 13 и к предположениям этого пункта.

Положим

$$n_i = -\frac{dF_0}{dx_i}.$$

При $\mu = 0$ x_i постоянны; с другой стороны, имеем

$$y_i = n_i t + \omega_i,$$

где ω_i — постоянные.

Пусть $n_1^0, n_2^0, \ldots, n_n^0$ — такие значения n_i, что величины $n_i^0 T$ кратны 2π. Пусть x_i^0 — такие значения x_i, что

$$n_i = n_i^0.$$

В п. 42 и 44 мы видели, что уравнения (1) имеют периодическое решение с периодом T, которое разлагается в ряд по степеням μ и которое при $\mu = 0$ сводится к

$$x_i = x_i^0, \qquad y_i = n_i^0 t + \varpi_i^0,$$

где ϖ_i^0 — некоторые частные значения постоянных ϖ_i. Рассмотрим теперь произвольное решение.

Пусть $x_i^0 + \beta_i$ — начальные значения x_i и ϖ_i — начальные значения y_i при $t = 0$. Пусть Δx_i — приращение x_i и $n_i^0 T + \Delta y_i$ — приращение y, когда t изменяется от 0 до T.

Вот как составляется уравнение, дающее характеристические показатели.

Построим определитель, элементы которого даются следующей таблицей. В этой таблице первый столбец указывает номер строки, второй указывает номер столбца, а третий дает соответствующий элемент определителя *.

Номер строки	Номер столбца	Выражение для элемента
i $(i \leqslant n)$	k $(k \leqslant n,\ k \neq i)$	$\dfrac{d\Delta x_k}{d\beta_i}$
i $(i \leqslant n)$	$k = i$	$\dfrac{d\Delta x_i}{d\beta_i} - S$
$i + n$ $(i > 0)$	k $(k \leqslant n)$	$\dfrac{d\Delta x_k}{d\varpi_i}$
i $(i \leqslant n)$	$k + n$ $k > 0)$	$\dfrac{d\Delta y_k}{d\beta_i}$
$i + n$ $(i > 0)$	$k + n$ $(k > 0,\ k \neq i)$	$\dfrac{d\Delta y_k}{d\varpi_i}$
$i + n$ $(i > 0)$	$k + n = i + n$	$\dfrac{d\Delta y_i}{d\varpi_i} - S$

(2)

Приравнивая нулю построенный таким образом определитель, получим уравнение относительно S, корнями которого являются выражения

$$e^{\alpha T} - 1,$$

где α — характеристические показатели.

Δx_i и Δy_i разлагаются в ряды по степеням μ, β_i и $\varpi_i - \varpi_i^0$. То же самое можно сказать о величинах

$$\frac{d\Delta x_k}{d\beta_i}, \quad \frac{d\Delta x_k}{d\varpi_i}, \quad \frac{d\Delta y_k}{d\beta_i}, \quad \frac{d\Delta y_k}{d\varpi_i}. \tag{3}$$

---

* Так, например, первый элемент k-го столбца будет равен $d\,\Delta x_k/d\beta_i$, если только $i \leqslant n$, $k \leqslant n$, $k \neq i$.

Здесь следует заменить β и $\bar{\omega}_i$ значениями, соответствующими периодическому решению и разложимыми в ряды по степеням μ, так что после этой подстановки величины (3) будут разложены в ряды по степеням μ.

Поскольку, с другой стороны,

$$S = e^{\alpha T} - 1,$$

мы видим, что наш определитель является *целой* функцией от α, разложимой в ряд по степеням μ.

Я обозначу эту функцию $G(\alpha, \mu)$ и для определения α как функции от μ буду иметь уравнение

$$G(\alpha, \mu) = 0. \tag{4}$$

Теперь положим

$$\alpha = \varepsilon \sqrt{\mu}.$$

Разделим первые n строк определителя, а также его n последних столбцов, на $\sqrt{\mu}$. Если записать элементы определителя в том же порядке, что и в (2), то они примут вид

$$\frac{d\Delta x_k}{\sqrt{\mu}\, d\beta_i}, \quad \frac{d\Delta x_i}{\sqrt{\mu}\, d\beta_i} - \frac{S}{\sqrt{\mu}}, \quad \frac{d\Delta x_k}{\mu d\bar{\omega}_i}, \quad \frac{d\Delta y_k}{d\beta_i}, \quad \frac{d\Delta y_k}{\sqrt{\mu}\, d\bar{\omega}_i},$$

$$\frac{d\Delta y_i}{\sqrt{\mu}\, d\bar{\omega}_i} - \frac{S}{\sqrt{\mu}},$$

и уравнение (4) превратится в уравнение

$$\mu^{-n} G(\varepsilon \sqrt{\mu}, \mu) = G_1(\varepsilon, \sqrt{\mu}) = 0.$$

Посмотрим, во что превратится это уравнение при $\mu = 0$, или, другими словами, образуем определитель $G_1(\varepsilon, 0)$.

При $\mu = 0$ Δx_k равны нулю, а Δy_k зависят лишь от β_i. Следовательно, $d\Delta x_k/d\beta_i$, $d\Delta x_k/d\bar{\omega}_i$ и $d\Delta y_k/d\bar{\omega}_i$ делятся на μ. Итак, получаем

$$\lim \frac{d\Delta x_k}{\sqrt{\mu}\, d\beta_i} = \lim \frac{d\Delta y_k}{\sqrt{\mu}\, d\bar{\omega}_i} = 0 \text{ при } \mu = 0.$$

С другой стороны,

$$\lim \frac{S}{\sqrt{\mu}} = \frac{\lim e^{T\varepsilon\sqrt{\mu}} - 1}{\sqrt{\mu}} = \varepsilon T.$$

Затем получим (при $\mu = 0$)

$$\Delta y_k = -\int_0^T \frac{dF_0}{dx_k}\, dt = -T \frac{dF_0}{dx_k}.$$

В dF_0/dx_k нужно заменить x_i на $x_i^0 + \beta_i$. Следовательно, получаем

$$\frac{d\Delta y_k}{d\beta_i} = -T\frac{d^2F_0}{dx_i dx_k}.$$

В $d^2F_0/dx_i dx_k$ после дифференцирования надо положить $\beta_i = 0$, т. е. $x_i = x_i^0$.

Мы имеем (по-прежнему при $\mu = 0$)

$$\frac{1}{\mu}\Delta x_k = \int_0^T \frac{dF_1}{dy_k}dt.$$

В dF_1/dy_k следует x_i заменить на $x_i^0 + \beta_i$, а y_i — на $n_i t + \varpi_i$; это показывает прежде всего, что

$$\frac{dF_1}{dy_k} = \frac{dF_1}{d\varpi_k}.$$

Поскольку мы намерены дифференцировать Δx_k по ϖ_i, а не по β_i, можем сразу же дать β_i их окончательные значения и положить $\beta_i = 0$, откуда $n = n_i^0$. Тогда F_1 становится периодической функцией с периодом T по t и с периодом 2π по ϖ_i. Пусть

$$[F_1] = R$$

— среднее значение функции F_1, рассматриваемой как периодическая функция от t; получим

$$\frac{\Delta x_k}{\mu} = T\frac{dR}{d\varpi_k},$$

откуда

$$\frac{d\Delta x_k}{\mu d\varpi_i} = T\frac{d^2R}{d\varpi_i d\varpi_k}.$$

Таким образом, элементы определителя $G_1(\varepsilon, 0)$, если их записать в том же порядке, что и в (2), примут вид

$$0, -\varepsilon T, T\frac{d^2R}{d\varpi_i d\varpi_k}, -T\frac{d^2F_0}{dx_i dx_k}, 0, -\varepsilon T.$$

Таким образом, мы получаем алгебраическое уравнение относительно ε; вообще, это уравнение имеет два нулевых корня, а все остальные различны и отличны от нуля.

Применив теорему п. 30, мы увидим, что из уравнения

$$G_1(\varepsilon, \sqrt{\mu}) = 0$$

можно получить ε (и, следовательно, α) в виде ряда по степеням $\sqrt{\mu}$.

Итак, мы должны исследовать уравнение

$$G_1(\varepsilon, 0) = 0.$$

Если мы заменим ε на $-\varepsilon$, то это уравнение не изменится.

Действительно, если мы умножим n первых строк и n последних столбцов на -1, то определитель не изменится и все элементы определителя также не изменятся, за исключением элементов главной диагонали, которые были равны $-\varepsilon T$ и станут равными $+\varepsilon T$.

Я утверждаю, что уравнение имеет два нулевых корня. Действительно, если мы приравняем ε нулю, определитель станет равным произведению двух других, а именно:

1) гессиана — TF_0 по x_i;

2) гессиана TR по $\bar{\omega}_i$.

Последний гессиан равен нулю, так как по определению R

$$n_1^0 \frac{d^2R}{d\bar{\omega}_i\, d\bar{\omega}_1} + n_2^0 \frac{d^2R}{d\bar{\omega}_i d\bar{\omega}_2} + \ldots + n_n^0 \frac{d^2R}{d\bar{\omega}_i\, d\bar{\omega}_n} = 0.$$

Следовательно, уравнение удовлетворяется при $\varepsilon = 0$ и, поскольку его корни попарно противоположны по знаку, оно должно иметь два нулевых корня.

Для того чтобы было больше двух нулевых корней, необходимо, чтобы коэффициент при ε^2 в G_1 был равен нулю. Но этот коэффициент можно подсчитать следующим образом. Умножим первую строку G_1 на n_1^0 и прибавим к ней вторую, умноженную на n_2^0, третью, умноженную на n_3^0,..., n-ю, умноженную на n_n^0. Все элементы G_1 остаются неизменными, за исключением элементов первой строки, которая принимает вид

$$-n_1^0\varepsilon T, -n_2^0\varepsilon T, n_3^0\varepsilon T, \ldots, -n_n^0\varepsilon T, 0, 0, \ldots, 0.$$

Умножим теперь $(n+1)$-й столбец на n_1^0 и прибавим к нему $(n+2)$-й, умноженный на n_2^0, $(n+3)$-й, умноженный на n_3^0, . ., $2n$-й, умноженный на n_n^0. Все элементы остаются неизменными, кроме элементов $(n+1)$-го столбца, которые принимают вид

$$0, 0, \ldots, 0, -n_1^0\varepsilon T, -n_2^0\varepsilon T, \ldots, -n_n^0\varepsilon T.$$

С помощью этой двойной операции мы умножили наш определитель на $(n_n^0)^2$. Разделим его теперь на ε^2, разделив на ε первую строку и $(n+1)$-й столбец.

Положим затем $\varepsilon = 0$ и найдем искомый коэффициент.

Элементы полученного таким образом определителя представлены следующей таблицей:

Номер столбца	Номер строки	Значения элемента
$i \quad (i < n)$	1	$-n_i^0 T$
$n+1$	$k \quad (k < n)$	0
$i+n \quad (i > 1)$	$k \quad (k > 1,\ k < n)$	$T \dfrac{d^2R}{d\tilde{\omega}_i d\tilde{\omega}_k}$
$i \quad (i < n)$	$k \quad (k > 1,\ k < n)$	0
$i+n \quad (i > 1)$	1	0
$i \quad (i < n)$	$k+n \quad (k > 0)$	$-T \dfrac{d^2F_0}{dx_i dx_k}$
$n+1$	$k+n \quad (k > 0)$	$-n_k^0 T$
$i+n \quad (i > 1)$	$k+n \quad (k > 0)$	0

Мы видим, что этот определитель с точностью до знака равен

$$T^{2n} H_1 H_2,$$

где H_1 и H_2 — два следующих определителя:

$$H_1 = \begin{vmatrix} n_1^0 & n_2^0 & \dots & n_n^0 & 0 \\ \dfrac{d^2F_0}{dx_1^2} & \dfrac{d^2F_0}{dx_1 dx_2} & \dots & \dfrac{d^2F_0}{dx_1 dx_n} & n_1^0 \\ \dfrac{d^2F_0}{dx_1 dx_2} & \dfrac{d^2F_0}{dx_2^2} & \dots & \dfrac{d^2F_0}{dx_2 dx_n} & n_2^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{d^2F_0}{dx_1 dx_n} & \dots & \dots & \dfrac{d^2F_0}{dx_n^2} & n_n^0 \end{vmatrix},$$

а H_2 — гессиан R по

$$\tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3, \dots, \tilde{\omega}_n.$$

Замечая, что n_i^0 равен с точностью до знака dF_0/dx_i, я вижу, что H_1 не изменяется при замене в первой строке и последнем столбце n_i на dF_0/dx_i. Составленный так определитель будет называться *окаймленным гессианом* F_0 по $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Таким образом, уравнение $G_1(\varepsilon, 0) = 0$ не может иметь больше двух нулевых корней и, следовательно, не может быть более двух нулевых характеристических показателей, если только H_1 или H_2 не обращаются в нуль.

В частном случае задачи трех тел, который мы рассматривали в п. 9, имеются лишь две степени свободы и

$$F_0 = \frac{1}{2x_1^2} + x_2;$$

тогда получаем

$$H_1 = \begin{vmatrix} \frac{dF_0}{dx_1} & \frac{dF_0}{dx_2} & 0 \\ \frac{d^2F_0}{dx_1^2} & \frac{d^2F_0}{dx_1\,dx_2} & \frac{dF_0}{dx_1} \\ \frac{d^2F_0}{dx_1\,dx_2} & \frac{d^2F_0}{dx_2^2} & \frac{dF_0}{dx_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x_1^{-3} & 1 & 0 \\ 3x_1^{-4} & 0 & -x_1^{-3} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3x_1^{-4};$$

следовательно, определитель H_1 не равен нулю; можно проверить, что

$$H_2 = \frac{d^2R}{d\varpi_2^2}$$

также не равен нулю.

Итак, в этом частном случае задачи трех тел два характеристических показателя равны нулю, а два других отличны от нуля.

75. Определитель G_1 можно немного упростить подходящим выбором переменных. Я утверждаю, что всегда можно предполагать, что

$$n_2^0 = n_3^0 = \ldots = n_n^0 = 0. \tag{1}$$

Действительно, если это не так, можно было бы заменить переменные, взяв за новые переменные x_i' и y_i', и положить

$$y_i' = \alpha_{1i}y_1 + \alpha_{2i}y_2 + \ldots + \alpha_{ni}y_n,$$
$$x_i = \alpha_{i1}x_1' + \alpha_{2i}x_2' + \ldots + \alpha_{ni}x_n',$$

где $\alpha_{i,k}$ — постоянные коэффициенты. После этой линейной замены переменных уравнения сохранят канонический вид, а величины, которые будут соответствовать $n_1^0, n_2^0, \ldots, n_n^0$ и которые мы обозначим $n_1'^0, n_2'^0, \ldots, n_n'^0$, будут задаваться соотношениями

$$n_i'^0 = \alpha_{1i}n_1^0 + \alpha_{2i}n_2^0 + \ldots + \alpha_{ni}n_n^0,$$

поскольку

$$n_i'^0 = -\frac{dF_0}{dx_i'}, \qquad n_i^0 = -\frac{dF_0}{dx_i}, \qquad \frac{dF_0}{dx_i'} = \sum_k \frac{dF_0}{dx_n}\frac{dx_k}{dx_i'} = \sum \frac{dF_0}{dx_k}\alpha_{ki}.$$

Так как числа $n_1^0, n_2^0, \ldots, n_n^0$ соизмеримы между собой, мы всегда можем выбрать α_{ik} таким образом:

1) чтобы α_{ik} были целыми числами;

2) чтобы их определитель был равен 1.

Эти два условия необходимы, чтобы F оставалась периодической по y', так же, как она была периодична по y;

3) чтобы

$$n_2'^0 = n_3'^0 = \ldots = n_n'^0 = 0.$$

Таким образом, мы можем всегда предполагать, что условия (1) выполнены, и мы получим отсюда следующие уравнения:

$$\frac{d^2R}{d\bar{\omega}_1\, d\bar{\omega}_2} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

76. Интересным частным случаем является случай, когда одна или несколько переменных x_i не входят в F. Предположим, например, что F_0 не зависит от x_n. Тогда все элементы n-го столбца (и $2n$-й строки) равны нулю, за исключением тех из них, которые принадлежат главной диагонали и остаются равными εT.

Я предположу, кроме того, что переменные были выбраны так, что условия 1 и 2 предыдущего пункта выполнены.

Отсюда следует, что элементы первой строки (и $(n+1)$-го столбца) все равны нулю, за исключением тех из них, которые принадлежат главной диагонали и остаются равными $-\varepsilon T$.

Таким образом, все элементы 1-й и n-й строк и n-го и $(n+1)$-го столбцов делятся на ε (я добавлю, что все элементы, принадлежащие одновременно одной из этих строк и одному из этих столбцов, равны нулю и, следовательно, делятся на ε^2); отсюда видно, что определитель делится на ε^4, и следовательно, что уравнение $G_1 = 0$ имеет четыре нулевых корня.

В каком случае оно может иметь больше четырех нулевых корней?

Чтобы отдать себе в этом отчет, разделим 1-ю и $2n$-ю строки и n-й и $(n+1)$-й стобцы на ε и положим затем $\varepsilon = 0$. В каком случае таким образом полученный определитель, равный

$$\lim \frac{G_1}{\varepsilon^4} \qquad \text{при} \qquad \varepsilon = 0,$$

будет равен нулю?

Мы можем также разделить определитель G_1 на $\varepsilon^4 T^4$, отбрасывая 1-ю, n-ю, $(n+1)$-ю и $2n$-ю строки и столбцы с теми же номерами. Если затем положить $\varepsilon = 0$, мы увидим, что все элементы равны нулю, кроме тех, которые принадлежат одному из $n-2$ последних оставшихся столбцов и одной из первых $n-2$ строк или же, наоборот, одному из $n-2$ первых столбцов и $n-2$ последних строк.

Таким образом, определитель равен с точностью до степени T произведению двух гессианов, а именно:

1) гессиана F_0 по $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$;

2) гессиана R по $\bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \ldots, \bar{\omega}_{n-1}$.

Если ни один из этих двух гессианов не равен нулю, то уравнение $G_1 = 0$ будет иметь не более четырех нулевых корней и поэтому число нулевых характеристических показателей не превосходит четырех.

Что станет с этим условием, если предположить, что переменные произвольны и что условия 1 и 2 предыдущего пункта не выполняются?

В этом случае надо подвергнуть определитель тому же преобразованию, что и в конце п. 74; тогда мы увидим, как и в конце этого пункта, что после преобразования элементы первой строки будут равны

$$-n_1^0\varepsilon T,\ -n_2^0\varepsilon T,\ \ldots,\ -n_n^0\varepsilon T,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,$$

а элементы $(n+1)$-го столбца будут равны

$$0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ -n_1^0\varepsilon T,\ -n_2^0\varepsilon T,\ \ldots,\ -n_n^0\varepsilon T.$$

Важно только заметить здесь, что n_n^0 равно нулю, так как

$$\frac{dF_0}{dx_n}=0.$$

Затем мы сможем разделить этот определитель на ε^4T^4, отбрасывая n-ю и $2n$-ю строки и столбцы с теми же номерами и разделив на εT элементы первой строки и $(n+1)$-го столбца. Если затем положить $\varepsilon=0$, то определитель сведется к произведению двух других, а именно:

1) *окаймленного гессиана* F_0 по $x_1,\ x_2,\ \ldots,x_{n-1}$;

2) гессиана R по $\omega_2,\ \omega_3,\ \ldots,\ \omega_{n-1}$.

Для того чтобы нулевых характеристических показателей было больше четырех, *необходимо* (но не достаточно), чтобы один из этих гессианов был равен нулю.

Предположим теперь, что F_0 не содержит ни x_n, ни x_{n-1}. Рассуждая подобным образом, можно прийти к следующему результату.

Уравнение $G_1(\varepsilon, 0)$ всегда имеет шесть нулевых корней; для того чтобы оно имело больше нулевых корней, необходимо и достаточно, чтобы окаймленный гессиан F_0 по $x_1, x_2,\ \ldots,\ x_{n-2}$ был равен нулю или же чтобы гессиан R по $\omega_2\ \omega_3,\ \ldots,\ \omega_{n-2}$ был равен нулю. Это условие, следовательно, необходимо (но не достаточно) для того, чтобы имелось более шести нулевых характеристических показателей.

77. Вернемся к предположениям, сделанным в начале п. 76, а именно, что F_0 не зависит от x_n и что условия 1 и 2 п. 75 выполнены.

Мы видели, что уравнение

$$G_1(\varepsilon, 0)=0$$

Допускает тогда четыре и только четыре нулевых корня и из этого заключили, что число нулевых характеристических показателей не превосходит четырех. Напротив, отсюда нельзя заключить, что четыре нулевых показателя равны нулю; это доказывает лишь, что в разложении этих показателей по степеням $\sqrt{\mu}$ первый член разложения равен нулю для четырех из них.

Нам остается выяснить, равны ли нулю также и последующие члены разложения.

Я знаю, что два показателя равны нулю, поскольку время не входит явно в дифференциальные уравнения, и что $F = \text{const}$ является интегралом. Я намерен исследовать, что произойдет с двумя другими, и для этого найду коэффициент при μ в их разложении.

Положим

$$\alpha = \eta\mu, \text{ откуда } \varepsilon = \eta\sqrt{\mu};$$

разделим уравнение

$$G(\alpha, \mu) = G(\eta\mu, \mu) = 0$$

на подходящую степень μ и затем положим $\mu = 0$; получим уравнение, которое даст значения μ.

Из того, что F_0 не зависит от x_n, можно заключить, что величины, обозначенные через n_i и равные $-dF_0/dx_i$, также не зависят от x_n и, следовательно, от β_n.

Поэтому $n_i = n_i^0$ не только, как в п. 74, когда все β равны нулю, но и когда β_n не равно нулю, если только остальные β равны нулю.

Итак, если мы предположим

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{n-1} = 0, \beta_n \neq 0,$$

будем по-прежнему иметь

$$\frac{\Delta x_k}{\mu} = T\frac{dR}{d\varpi_k}.$$

Это позволяет дифференцировать тождество по β_n и записать

$$\frac{d\Delta x_k}{\mu d\beta_n} = T\frac{d^2R}{d\varpi_k\, d\beta_n}.$$

Вычислим теперь

$$\frac{d\Delta y_n}{\mu d\varpi_k} \text{ и } \frac{d\Delta y_n}{\mu d\beta_n}.$$

Получим

$$\Delta y_n = -\int_0^T \frac{dF}{dx_n}\,dt,$$

где, поскольку $dF_0/dx_n = 0$, имеем при $\mu = 0$

$$\frac{\Delta y_n}{\mu} = -\int_0^T \frac{dF_1}{dx_n}\,dt = -T\frac{dR}{d\beta_n}.$$

Это тождество имеет место, если только

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{n-1} = 0.$$

Следовательно, мы можем его дифференцировать по ϖ_k или по β_n, что дает

$$\frac{d\Delta y_n}{\mu d\varpi_k} = -T\frac{d^2R}{d\beta_n\, d\varpi_k}, \quad \frac{d\Delta y_n}{\mu d\beta_n} = -T\frac{d^2R}{d\beta_n^2}. \tag{3}$$

Что касается величин

$$\frac{d\Delta y_n}{d\beta_k}, \quad \frac{d\Delta y_k}{d\beta_n},$$

нам достаточно заметить, что они делятся на μ.

Надо еще исследовать элементы первой строки определителя, а также элементы $(n+1)$-го столбца.

Элементы первой строки равны

$$1 + \frac{d\Delta x_1}{d\beta_1} - e^{\eta\mu T}, \frac{d\Delta x_1}{d\beta_2}, \frac{d\Delta x_1}{d\beta_3}, \ldots, \frac{d\Delta x_1}{d\beta_{n-1}}, \frac{d\Delta x_1}{d\beta_n}, \frac{d\Delta x_1}{d\varpi_1}, \ldots, \frac{d\Delta x_1}{d\varpi_n}.$$

Они все делятся на μ, но я утверждаю, что $n+1$ последних элементов, т. е.

$$\frac{d\Delta x_1}{d\beta_n} \text{ и } \frac{d\Delta x_1}{d\varpi_k}$$

делятся на μ^2. Действительно, мы нашли при $\mu = 0$

$$\frac{d\Delta x_1}{\mu d\beta_n} = T\frac{d^2R}{d\varpi_1\, d\beta_n}, \quad \frac{d\Delta x_1}{\mu d\varpi_k} = T\frac{d^2R}{d\varpi_1\, d\varpi_k}.$$

Но в силу определения R имеем

$$n_1^0\frac{dR}{d\varpi_1} + n_2^0\frac{dR}{d\varpi_2} + \ldots + n_n^0\frac{dR}{d\varpi_n} = 0$$

или в силу соотношений (1) п. 75

$$\frac{dR}{d\varpi_1} = 0,$$

откуда (дифференцируя это тождество) получаем

$$\frac{d\Delta x_1}{\mu d\beta_n} = \frac{d\Delta x_1}{\mu d\varpi_k} = 0$$

при $\mu = 0$, что и требовалось доказать.

Элементы $(n+1)$-го столбца записываются в виде

$$\frac{d\Delta x_1}{d\varpi_1}, \frac{d\Delta x_2}{d\varpi_1}, \ldots, \frac{d\Delta x_n}{d\varpi_1}, \frac{d\Delta y_1}{d\varpi_1} + 1 - e^{\eta\mu T}, \frac{d\Delta y_2}{d\varpi_1}, \ldots, \frac{d\Delta y_n}{d\varpi_1}.$$

Все эти элементы делятся на μ; но я утверждаю, что n первых и последний делятся на μ^2, или, что то же самое,

$$\frac{d\Delta x_k}{\mu d\varpi_1} = \frac{d\Delta y_n}{\mu d\varpi_1} = 0$$

при $\mu = 0$.

Действительно, мы нашли

$$\frac{d\Delta x_k}{\mu d\varpi_1} = T\frac{d^2R}{d\varpi_1 d\varpi_k}, \frac{d\Delta y_n}{\mu d\varpi_1} = -T\frac{d^2R}{d\varpi_1 d\beta_n}$$

и

$$\frac{dR}{d\varpi_1} = 0,$$

откуда дифференцированием получаем

$$\frac{d^2R}{d\varpi_1 d\varpi_k} = \frac{d^2R}{d\varpi_1 d\beta_n} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Теперь я делю каждый элемент нашего определителя $G(\eta, \mu, \mu)$ на T, затем 1-ю строку на μ, строки $2, 3, 4, \ldots, n, 2n$ на $\sqrt{\mu}$, $(n+1)$-й столбец на μ, столбцы $n, n+2, n+3, \ldots, 2n$ на $\sqrt{\mu}$. В конечном счете определитель разделен на $T^{2n}\mu^{n+2}$. Затем я полагаю $\mu = 0$.

Я замечаю, что следующие элементы равны нулю:

Строка, которой принадлежит элемент	Столбец, которому принадлежит элемент	Степень μ, на которую элемент делится	Степень μ, на которую элемент был разделен	
2 по n вкл. и $2n$	1 по $n-1$ вкл.	μ	$\sqrt{\mu}$	
1	n и $n+2$ по $2n$ вкл.	μ^2	$\mu\sqrt{\mu}$	(4)
2 по n вкл. и $2n$	$n+1$	μ^2	$\mu\sqrt{\mu}$	
$n+1$ по $2n-1$ вкл.	n и $n+2$ по $2n$ вкл.	μ	$\sqrt{\mu}$	

Заметим также, что следующие элементы конечны:

$n+1$ по $2n-1$ вкл.	1 по $n-1$ вкл.	степень 0	степень 0	
1	1 по $n-1$ вкл.	μ	μ	
2 по n вкл. и $2n$	n и $n+2$ по $2n$ вкл.	μ	μ	(4bis)
1	$n+1$	μ^2	μ^2	
$n+1$ по $2n-1$ вкл.	$n+1$	μ	μ	

Следовательно, конечные элементы принадлежат только 1-й строке и строкам с $(n+1)$-й по $(2n-1)$-ю включительно и столбцам с 1-го по $(n-1)$-й включительно и $(n+1)$-му столбцу или же к строкам с 2-й по n-ю включительно и $2n$-й строке и n-му столбцу или столбцам с $(n+2)$-го по $2n$-й включительно.

Наш определитель становится равным произведению двух других, которые я обозначу через D_1 и D_2.

Определитель D_1 получится вычеркиванием строк с номерами

$$1, n+1, n+2, \ldots, 2n-1$$

и столбцов с номерами

$$1, 2, 3, \ldots, n-1, n+1.$$

Определитель D_2 получится вычеркиванием строк с номерами

$$2, 3, 4, \ldots, n, 2n$$

и столбцов с номерами

$$n, n+2, n+3, \ldots, 2n.$$

Посмотрим, как эти определители зависят от η. С этой целью я замечу что величина

$$\eta = \lim \frac{S}{\mu T} \qquad (\text{при } \mu = 0)$$

входит лишь в члены главной диагонали, причем определитель D_1 содержит два из этих членов: один, принадлежащий столбцу и строке с номером n, а другой — столбцу и строке с номером $2n$.

Определитель D_2 также содержит два из этих членов: один принадлежащий столбцу и строке с номером 1, другой — столбцу и строке с номером $n+1$.

Отсюда следует, что D_1 и D_2 являются многочленами второй степени от η. Таким образом, наше уравнение относительно η распадается на два уравнения второй степени

$$D_1 = 0, \qquad D_2 = 0.$$

Исследуем сначала уравнение $D_1 = 0$.

Чтобы составить определитель D_1, можно применить следующее правило.

Записать гессиан R по

$$\varpi_2, \varpi_3, \ldots, \varpi_n, \beta_n,$$

изменить знаки в последней строке (той, которая содержит производные от $dR/d\beta_n$) и прибавить затем $-\eta$ к тем двум элементам, которые равны $d^2R/d\varpi_n d\beta_n$ и $-d^2R/d\varpi_n d\beta_n$.

То же самое уравнение можно получить проще (только изменив знак левой части), беря гессиан функции R и прибавляя $-\eta$ к одному из двух элементов, равных по абсолютной величине $d^2R/d\bar{\omega}_n d\beta_n$ и $+\eta$ к другому. Запишем уравнение $D_1 = 0$, предполагая для определенности, что $n = 4$,

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2R}{d\bar{\omega}_2^2} & \frac{d^2R}{d\bar{\omega}_2 d\bar{\omega}_3} & \frac{d^2R}{d\bar{\omega}_2 d\bar{\omega}_4} & \frac{d^2R}{d\bar{\omega}_2 d\beta_1} \\ \frac{d^2R}{d\bar{\omega}_2 d\bar{\omega}_3} & \frac{d^2R}{d\bar{\omega}_3^2} & \frac{d^2R}{d\bar{\omega}_3 d\bar{\omega}_4} & \frac{d^2R}{d\bar{\omega}_3 d\beta_1} \\ \frac{d^2R}{d\bar{\omega}_2 d\bar{\omega}_4} & \frac{d^2R}{d\bar{\omega}_3 d\bar{\omega}_4} & \frac{d^2R}{d\bar{\omega}_4^2} & \frac{d^2R}{d\bar{\omega}_4 d\beta_4} + \eta \\ \frac{d^2R}{d\bar{\omega}_2 d\beta_3} & \frac{d^2R}{d\bar{\omega}_3 d\beta_4} & \frac{d^2R}{d\bar{\omega}_4 d\beta_1} - \eta & \frac{d^2R}{d\beta_4^2} \end{vmatrix} = 0.$$

При такой записи непосредственно видно то, что, впрочем, можно было предвидеть: это уравнение относительно η имеет два корня, противоположных по знаку.

Эти два корня будут конечными, если гессиан R по

$$\bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4, \ldots, \bar{\omega}_{n-1}$$

не равен нулю.

Они будут отличны от нуля, если гессиан R по

$$\bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4, \ldots, \bar{\omega}_{n-1}, \bar{\omega}_n, \beta_n$$

не равен нулю.

Что касается уравнения $D_2 = 0$, то оно будет иметь два нулевых корня. В самом деле, мы знаем, что всегда имеются два нулевых характеристических показателя и, следовательно, два из значений η равны нулю; но мы только что видели, что корни $D_1 = 0$ в общем случае не равны нулю; итак, приходится заключить, что это корни уравнения $D_2 = 0$ всегда равны нулю.

Как изменились бы результаты, если бы условия (1) п. 75 не были выполнены?

В этом случае следовало умножить (как мы это делали в п. 74) первую строку на n_1^0 и прибавить к ней 2-ю, 3-ю, . . ., n-ю строки, умноженные соответственно на $n_2^0, n_3^0, \ldots, n_n^0$ (я напомню, что n_n^0 равно нулю); затем надо было бы умножить $(n+1)$-й столбец на n_1^0 и прибавить к нему $(n+2)$-й, $(n+3)$-й, . . ., $2n$-й столбцы, умноженные соответственно на n_2^0, $n_3^0, \ldots, n_n^0$. После этого преобразования все элементы определителя $G(\eta\mu, \mu)$ остаются прежними, кроме элементов первой строки и $(n+1)$-го столбца.

Кроме того, каждый элемент (как элементы первой строки и $(n+1)$-го столбца, так и все остальные) делится на степень μ, указанную в 3-м

столбце таблиц (4) и (4bis). Разделим затем каждый элемент на T и на степень μ, указанную в 4-м столбце тех же таблиц.

Когда мы положим $\mu = 0$, некоторое число элементов обратится в нуль, а остальные будут конечны в соответствии с таблицами (4) и (4bis). Наш определитель останется равным произведению двух других, D_1 и D_2, получающихся так, как описано выше.

Все элементы этих двух определителей будут иметь тот же вид, что и в предыдущем случае, за исключением элементов первой строки и $(n+1)$-го столбца. Но D_1 не содержит ни одного элемента этой строки и этого столбца. Следовательно, D_1 выражается так же, как и в предыдущем случае, и справедливы те же выводы.

Значения η конечны, если гессиан R по ω_2, $\omega_3, \ldots, \omega_{n-1}$ не равен нулю, и отличны от нуля, если гессиан R по ω_2, $\omega_3, \ldots, \omega_n, \beta_n$ не равен нулю.

Итак, если F_0 не зависит от x_n, если окаймленный гессиан F_0 по $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ не равен нулю, если гессианы R по $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{n-1}$ и по $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_n, \beta_n$ не равны нулю, то лишь два характеристических показателя равны нулю.

Перейдем к случаю, когда F_0 не зависит ни от x_{n-1}, ни от x_n.

Рассуждая аналогичным образом, мы увидим, что если окаймленный гессиан F_0 по $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ не равен нулю, если гессианы от R по $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{n-2}$ и по $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{n-2}, \omega_{n-1}, \omega_n, \beta_{n-1}$ и β_n не равны нулю, то лишь два показателя равны нулю.

Приложение к задаче трех тел

78. Применим предыдущие результаты к задаче трех тел. Мы видели в пунктах 15 и 16, как можно понизить число степеней свободы до трех в случае плоской задачи и до четырех в общем случае.

Запишем уравнения движения в виде, указанном в пунктах 15 и 16. Два ряда сопряженных переменных тогда будут

$$\beta L, \beta' L', H,$$
$$l, l', h$$

в случае плоской задачи и

$$\beta L, \beta' L', \beta\Gamma, \beta'\Gamma',$$
$$l, \quad l', \quad g, \quad g'$$

в общем случае. Кроме того,

$$F_0 = AL^{-2} + A'L'^{-2},$$

где и A и A' — постоянные коэффициенты.

Мы видели, что F_0 не зависит от H в случае плоской задачи и от Γ и Γ' в общем случае.

В первом случае окаймленный гессиан F_0 по βL и $\beta' L'$ равен

$$BL^{-4}L'^{-6} + B'L^{-6}L'^{-4},$$

где B и B' — постоянные коэффициенты. Следовательно, окаймленный гессиан не равен нулю.

Гессианы функции R также, вообще говоря, не будут равны нулю, в чем можно убедиться на примерах; впрочем, мы вернемся к подробному изучению этого вопроса в следующей главе.

Следовательно, периодические решения задачи трех тел имеют два и только два характеристических показателя, равных нулю.

Полное вычисление характеристических показателей

79. Рассмотрим снова уравнения (1) п. 74, полагая для определенности $n = 3$,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF_1}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Предположим, что найдено периодическое решение этих уравнений

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \psi_i(t)$$

и попытаемся определить характеристические показатели этого решения.

Для этого мы положим

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \qquad y_i = \psi_i(t) + \eta_i,$$

затем составим уравнения в вариациях уравнения (1), которые запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum_k \frac{d^2F}{dy_i\,dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i\,dy_k}\eta_k, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i\,dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dx_i\,dy_k}\eta_k \end{aligned} \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{2}$$

и попробуем проинтегрировать эти уравнения, полагая

$$\xi_i = e^{\alpha t} S_i, \qquad \eta_i = e^{\alpha t} T_i, \tag{3}$$

где S_i и T_i — периодические функции от t. Мы знаем, что в общем случае существует шесть частных решений этого вида (поскольку линейные уравнения (2) шестого порядка). Однако важно заметить, что в рассмат-

риваемом нами частном случае только четыре частных решения имеют эту форму, потому что два из характеристических показателей равны нулю и два частных решения имеют, следовательно, вырожденный вид.

Теперь предположим сначала, что $\mu = 0$, тогда F сводится к F_0 и зависит только от x_1^0, x_2^0, x_3^0.

Тогда уравнения (2) сводятся к следующим:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = 0, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\sum_k \frac{d^2F_0}{dx_i^0 dx_k^0}\,\xi_k. \tag{2'}$$

Коэффициенты при ξ_k во втором уравнении (2′) постоянны. В качестве решений уравнений (2′) возьмем

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0, \qquad \eta_1 = \eta_1^0, \qquad \eta_2 = \eta_2^0, \qquad \eta_3 = \eta_3^0,$$

где η_1^0, η_2^0, η_3^0 — три постоянные интегрирования.

Это решение не самое общее, так как оно содержит лишь три произвольные постоянные, но оно самое общее среди тех, которые можно свести к виду (3). Таким образом, мы видим, что при $\mu = 0$ шесть характеристических показателей равны нулю.

Не будем больше предполагать, что μ равно нулю. Мы попытаемся теперь разложить α, S_i и T_i не по возрастающим степеням μ, а по степеням $\sqrt{\mu}$, записывая

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_1\sqrt{\mu} + \alpha_2\mu + \alpha_3\mu\sqrt{\mu} + \ldots,\\
S_i &= S_i^0 + S_i^1\sqrt{\mu} + S_i^2\mu + S_i^3\mu\sqrt{\mu} + \ldots,\\
T_i &= T_i^0 + T_i^1\sqrt{\mu} + T_i^2\mu + T_i^3\mu\sqrt{\mu} + \ldots.
\end{aligned}$$

Я намерен прежде всего установить, что разложение возможно.

Мы видели в п. 74, что характеристические показатели α разлагаются в ряд по возрастающим степеням $\sqrt{\mu}$.

Покажем теперь, что S_i и T_i также разлагаются в ряд по степеням $\sqrt{\mu}$.

Действительно, S_i и T_i задаются уравнениями

$$\begin{aligned}
\frac{dS_i}{dt} + \alpha S_i &= \sum \frac{d^2F}{dy_i\,dx_k} S_k + \sum \frac{d^2F}{dy_i\,dy_k} T_k,\\
\frac{dT_i}{dt} + \alpha T_i &= -\sum \frac{d^2F}{dx_i\,dx_k} S_k + \sum \frac{d^2F}{dx_i\,dy_k} T_k.
\end{aligned} \tag{2''}$$

Пусть β_i — начальное значение S_i и β_i' — начальное значение T_i; значения S_i и T_i для некоторого значения t разлагаются в силу п. 27

в ряд по степеням μ, α, β_i и β_i'. Кроме того, в силу линейности уравнений эти значения будут линейными и однородными функциями β_i и β_i'.

Пусть, если использовать обозначения, аналогичные обозначениям п. 37, $\beta_i + \psi_i$ — значение S_i, а $\beta_i' + \psi_i'$ — значение T_i при $t = T$. Условие периодичности решения таково:

$$\psi_i = \psi_i' = 0.$$

Функции ψ_i и ψ_i' линейны по β_i и β_i'; следовательно, эти уравнения линейны относительно этих величин. Вообще, эти уравнения не допускают другого решения, кроме

$$\beta_i = \beta_i' = 0,$$

так что уравнения (2) не имеют другого периодического решения, кроме

$$S_i = T_i = 0.$$

Но нам известно, что если выбрать α так, чтобы удовлетворялось уравнение $G(\alpha, \mu) = 0$, то уравнения (2″) будут допускать другие периодические решения, отличные от $S_i = T_i = 0$. Следовательно, определитель линейных уравнений $\psi_i = \psi_i'$ равен нулю. Таким образом, мы можем найти из этих уравнений отношения

$$\frac{\beta_i}{\beta_1'} \quad \text{и} \quad \frac{\beta_i'}{\beta_1'}$$

в виде рядов по степеням α и μ.

Поскольку β_1' остается произвольным, мы условимся брать $\beta_1' = 1$, так что начальное значение T_1 будет равно 1. Тогда β_i и β_i' разложимы в ряды по степеням α и μ; но S_i и T_i, как мы это уже видели, разлагаются в ряды по степеням α, μ, β_i и β_i' и, с другой стороны, α разлагается в ряд по степеням $\sqrt{\mu}$.

Итак, S_i и T_i разлагаются в ряды по степеням $\sqrt{\mu}$, что и требовалось доказать.

В частности, мы имеем

$$T_1 = T_1^0 + T_1^1\sqrt{\mu} + T_1^2\mu + \ldots.$$

Поскольку в силу нашего предположения β_1', являющееся начальным значением T_1, должно быть равным 1 при любом μ, мы имеем при $t = 0$

$$T_1^0 = 1, \qquad 0 = T_1^1 = T_1^2 = \ldots = T_1^m = \ldots.$$

Доказав таким образом существование наших рядов, мы постараемся определить их коэффициенты.

Имеем

$$S_i^0 = 0, \qquad T_i^0 = \eta_i^0$$

и

$$\xi_i = e^{\alpha t}(S_i^0 + S_i^1\sqrt{\mu} + \ldots), \qquad \eta_i = e^{\alpha t}(T_i^0 + T_i^1\sqrt{\mu} + \ldots),$$

$$\frac{d\xi_i}{dt} = e^{\alpha t}\left|\frac{dS_i^0}{dt} + \sqrt{\mu}\,\frac{dS_i^1}{dt} + \ldots + \alpha S_i^0 + \alpha\sqrt{\mu}\,S_i^1 + \ldots\right|, \tag{4}$$

$$\frac{d\eta_i}{dt} = e^{\alpha t}\left|\frac{dT_i^0}{dt} + \sqrt{\mu}\,\frac{dT_i^1}{dt} + \ldots + \alpha T_i^0 + \alpha\sqrt{\mu}\,T_i^1 + \ldots\right|.$$

С другой стороны, разложим вторые производные F, входящие в качестве коэффициентов в уравнения (2), в ряды

$$\begin{aligned}
\frac{d^2F}{dy_i\,dx_k} &= A_{ik}^0 + \mu A_{ik}^2 + \mu^2 A_{ik}^4 + \ldots,\\
\frac{d^2F}{dy_i\,dy_k} &= B_{ik}^0 + \mu B_{ik}^2 + \mu^2 B_{ik}^4 + \ldots,\\
-\frac{d^2F}{dx_i\,dx_k} &= C_{ik}^0 + \mu C_{ik}^2 + \mu^2 C_{ik}^4 + \ldots,\\
-\frac{d^2F}{dx_i\,dy_k} &= D_{ik}^0 + \mu D_{ik}^2 + \mu^2 D_{ik}^4 + \ldots.
\end{aligned} \tag{5}$$

Эти разложения содержат лишь целые степени μ и не имеют в отличие от разложений (4) членов, зависящих от $\sqrt{\mu}$.

Мы заметим, что

$$\begin{gathered}
A_{ik}^0 = B_{ik}^0 = D_{ik}^0 = 0,\\
C_{ik}^m = C_{ki}^m, \qquad B_{ik}^m = B_{ki}^m, \qquad A_{ik}^m = -D_{ki}^m.
\end{gathered} \tag{6}$$

Подставим в уравнения (2) значения (4) и (5) вместо ξ, η, их производных и частных производных F. В выражении (4) я предполагаю, что α разложено в ряд по степеням $\sqrt{\mu}$, кроме того случая, когда эта величина входит в экспоненциальный множитель $e^{\alpha t}$.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\mu}$ и получим ряд уравнений, который позволит определять последовательно

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, S_i^0, S_i^1, \ldots, T_i^0, T_i^1, \ldots.$$

Выпишем лишь первые из этих уравнений, полученных приравниванием свободных членов, членов с $\sqrt{\mu}$, членов с μ и т. д.

Сократим сначала на множитель $\sqrt{\mu}$, который встречается всюду.

Приравняем члены с $\sqrt{\mu}$; получим

$$\frac{dS_i^1}{dt} + \alpha_1 S_i^0 = \sum_k A_{ik}^0 S_k^1 + \sum_k B_{ik}^0 T_k^1,$$
$$\frac{dT_i^1}{dt} + \alpha_1 T_i^0 = \sum_k C_{ik}^0 S_k^1 + \sum_k D_{ik}^0 T_k^1. \tag{7}$$

Приравняем члены с μ, получим

$$\frac{dS_i^2}{dt} + \alpha_1 S_i^1 + \alpha_2 S_i^0 = \sum_k (A_{ik}^0 S_k^2 + A_{ik}^2 S_k^0 + B_{ik}^0 T_k^2 + B_{ik}^2 T_k^0) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{8}$$

и еще три аналогичные уравнения, дающие dT_i^2/dt.

Если учесть теперь соотношения (6), уравнения (7) примут вид

$$\frac{dS_i^1}{dt} = 0, \qquad \frac{dT_i^1}{dt} + \alpha_1 \eta_i^0 = \sum_k C_{ik}^0 S_k^1.$$

Первое из этих уравнений показывает, что S_1^1, S_2^1, S_3^1 постоянны. Что касается второго, то оно показывает, что dT_i^1/dt — постоянная, но поскольку T_1^i должна быть периодической функцией, эта постоянная должна быть нулем, так что

$$\alpha_1 \eta_1^0 = C_{i1}^0 S_1^1 + C_{i2}^0 S_2^1 + C_{i3}^0 S_3^1, \tag{9}$$

что дает три соотношения между тремя постоянными η_i^1, тремя постоянными S_i^1 и неизвестной величиной α_i.

Со своей стороны, уравнение (8) запишется в виде

$$\frac{dS_i^2}{dt} + \alpha_1 S_i^1 = \sum_k B_{ik}^2 \eta_k^0.$$

Функции B_{ik}^2 — периодические функции t; разложим их по формуле Фурье и пусть b_{ik} — постоянный член B_{ik}^2. Получим

$$\alpha_1 S_i^1 = \sum_k b_{ik} \eta_k^0$$

или, учитывая уравнения (9),

$$\alpha_1^2 S_i^1 = \sum_{k=1}^{k=3} b_{ik} (C_{k1}^0 S_1^1 + C_{k2}^0 S_2^1 + C_{k3}^0 S_3^1). \tag{10}$$

Полагая в уравнении (10) $i = 1, 2$ и 3, получаем три линейных и однородных соотношения между тремя постоянными S_i^1. Исключая эти три постоянные, получаем уравнение третьей степени, которое определит α_1^2.

Если для краткости положим

$$e_{ik} = b_{i1}C_{1k}^0 + b_{i2}C_{2k}^0 + b_{i3}C_{3k}^0,$$

то уравнение, возникающее вследствие этого исключения, запишется в виде

$$\begin{vmatrix} e_{11} - \alpha_1^2 & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} - \alpha_1^2 & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} - \alpha_1^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Его можно еще записать в виде

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 & C_{11}^0 & C_{12}^0 & C_{13}^0 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & C_{21}^0 & C_{22}^0 & C_{23}^0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 & C_{31}^0 & C_{32}^0 & C_{33}^0 \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & -\alpha_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Определение α_1 — это единственная часть вычислений, представляющая некоторую трудность.

Уравнения, аналогичные уравнениям (7) и (8), образованные приравниванием в уравнениях (2) коэффициентов при одинаковых степенях $\sqrt{\mu}$, позволяют затем определить без труда α_k, S_i^m, T_i^m. Итак, мы можем сформулировать следующий результат.

Характеристические показатели α разлагаются в ряд по возрастающим степеням $\sqrt{\mu}$.

Итак, сосредоточивая все наше внимание на определении α_1, особо изучим уравнение (11). Мы должны постараться прежде всего определить величины C_{ik}^0 и b_{ik}.

Мы имеем, очевидно,

$$C_{ki}^0 = -\frac{d^2F_0}{dx_i^0\,dx_k^0}$$

и

$$B_{ik}^2 = \frac{d^2F_1}{dy_i^0\,dy_k^0}$$

или

$$B_{ik}^2 = -\Sigma A m_i m_k \sin\omega, \qquad (\omega = m_1 y_1^0 + m_2 y_2^0 + m_3 y_3^0 + h)$$

и

$$b_{ik} = -\mathrm{S} A m_i m_k \sin\omega.$$

Суммирование, представленное знаком Σ, распространяется на все члены, каковы бы ни были целые значения m_1, m_2 и m_3. Суммирование, представленное знаком S, распространяется только на такие члены, что

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 = 0.$$

Следовательно, под S мы имеем

$$\omega = m_2 \bar{\omega}_2 + m_3 \bar{\omega}_3 + h.$$

Это нам позволяет записать

$$b_{ik} = \frac{d^2 R}{d\bar{\omega}_i \, d\bar{\omega}_k} \qquad (\text{при } i \text{ и } k = 2 \text{ или } 3).$$

Если один или два индекса i и k равны единице, то b_{ik} определяется соотношением

$$n_1 b_{i1} + n_2 b_{i2} + n_3 b_{i3} = 0.$$

Мы будем с помощью этого последнего соотношения преобразовывать уравнение (11) так, чтобы выявить существование двух нулевых корней и свести уравнение к уравнению четвертой степени.

Действительно, простым преобразованием определителя и делением на α_1^2 я нахожу

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & b_{22} & b_{23} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 & b_{32} & b_{33} & 0 \\ C_{13}^0 & C_{23}^0 & C_{33}^0 & -\alpha_1 & 0 & n_3 \\ C_{12}^0 & C_{22}^0 & C_{32}^0 & 0 & -\alpha_1 & n_2 \\ C_{11}^0 & C_{21}^0 & C_{31}^0 & 0 & 0 & n_1 \end{vmatrix} = 0.$$

В частном случае, когда степеней свободы всего две, это уравнение записывается в виде

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 & \dfrac{d^2 R}{d\bar{\omega}_2^2} & 0 \\ C_{12}^0 & C_{22}^0 & -\alpha_1 & n_2 \\ C_{11}^0 & C_{21}^0 & 0 & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$n_1^2\alpha_1^2 = \frac{d^2R}{d\varpi_2^2}(n_1^2C_{22}^0 - 2n_1n_2C_{12}^0 + n_2^2C_{11}^0).$$

Выражение $n_1^2C_{22}^0 - 2n_1n_2C_{12}^0 + n_2^2C_{11}^0$ зависит лишь от x_1^0 и x_2^0 или, если угодно, от n_1 и n_2. Когда будут даны два соизмеримых числа n_1 и n_2, мы сможем рассматривать $n_1^2C_{22}^0 - 2n_1n_2C_{12}^0 + n_2^2C_{11}^0$ как известную постоянную. Тогда знак ${\alpha_1}^2$ зависит только от знака $d^2R/d\varpi_2^2$.

Когда заданы n_1 и n_2, образуем уравнение

$$\frac{dR}{d\varpi_2} = 0. \tag{12}$$

Мы видели в п. 42, что каждому корню этого уравнения соответствует периодическое решение.

Рассмотрим общий случай, когда уравнение (12) имеет только два простых корня; каждый из этих корней соответствует тогда максимуму или минимуму R. Но функция R, будучи периодической, в каждом периоде имеет по меньшей мере один максимум и один минимум и ровно столько максимумов, сколько минимумов.

Для значений ϖ_2, соответствующих минимуму, $d^2R/d\varpi_2^2$ положительна; для значений, соответствующих максимуму, эта производная отрицательна. Следовательно, уравнение (12) будет иметь ровно столько корней, для которых эта производная положительна, сколько корней, для которых эта производная отрицательна, и, следовательно, столько корней, для которых ${\alpha_1}^2$ положительно, сколько корней, для которых ${\alpha_1}^2$ отрицательно.

Это равносильно тому, что будет ровно столько периодических устойчивых решений, сколько неустойчивых, если этим словам придавать тот же смысл, что и в п. 59.

Таким образом, каждой системе значений n_1 и n_2 соответствуют по меньшей мере одно устойчивое и одно неустойчивое периодические решения, причем устойчивых решений ровно столько, сколько неустойчивых, если только μ достаточно мало.

Я не буду рассматривать здесь, как обобщаются эти результаты на тот случай, когда уравнение (12) будет иметь кратные корни.

Вот как следует продолжать вычисления.

Предположим, что мы полностью определили величины

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$$

и функции

$$S_i^0, S_i^1, \ldots, S_i^m,$$
$$T_i^0, T_i^1, \ldots, T_i^{m-1}$$

и что функции S_i^{m+1} и T_i^m известны *с точностью до постоянной*. Предположим, что надо вычислить α_{m+1}, закончить определение функций S_i^{m+1} и T_i^m и определить функции S_i^{m+2} и T_i^{m+1} *с точностью до постоянной*.

Приравнивая одинаковые степени μ в уравнениях (4), получаем уравнения следующего вида, аналогичные уравнениям (7) и (8):

$$\begin{aligned}
&\frac{-dT_i^{m+1}}{dt} + \sum_k C_{ik}^0 S_k^{m+1} - \alpha_1 T_i^m - \alpha_{m+1} T_i^0 = \text{известная величина},\\
&\frac{-dS_i^{m+2}}{dt} + \sum_k B_{ik}^0 T_k^m - \alpha_1 S_i^{m+1} - \alpha_{m+1} S_i^1 = \text{известная величина}
\end{aligned} \tag{13}$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Обе части уравнений (13) являются периодическими функциями t. Приравняем средние значения обеих частей. Если обозначим через $[U]$ среднее значение некоторой периодической функции U; если заметим, что для периодической функции U

$$\left[\frac{dU}{dt}\right] = 0,$$

и если вспомним, что так как T_k^m известна с точностью до постоянной, $T_k^m - [T_k^m]$ и $[B_{ik}^2 (T_k^m - [T_k^m])]$ — известные величины, то получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
&\sum_k C_{ik}^0 [S_k^{m+1}] - \alpha_1 [T_i^m] - \alpha_{m+1} T_i^0 = \text{известная величина},\\
&\sum_k b_{ik} [T_k^m] - \alpha_1 [S_i^{m+1}] - \alpha_{m+1} S_i^1 = \text{известная величина}
\end{aligned} \tag{14}$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Уравнения (14) помогут нам вычислить α_{m+1}, $[T_i^m]$ и $[S_i^{m+1}]$ и, следовательно, закончить определение функций T_i^m и S_i^{m+1}, известных пока лишь с точностью до постоянной.

Если просуммировать уравнения (14), предварительно умножив их соответственно на

$$S_1^1,\ S_2^1,\ S_3^1,\ T_1^0,\ T_2^0,\ T_3^0,$$

то найдем

$$2\Sigma S_i^1 T_i^0 \alpha_{m+1} = \text{известная величина},$$

что определяет α_{m+1}.

Если в уравнениях (14) заменить α_{m+1} на найденное таким образом значение, то для определения шести неизвестных $[T_i^m]$ и $[S_i^{m+1}]$ будем иметь шесть линейных уравнений, из которых лишь пять независимы.

Теперь можно определить $[T_1^m]$ из условия, что $[T_1^m]$ равно нулю при $t = 0$ в соответствии со сделанным выше предположением, и пять уравнений (14), остающихся независимыми, позволят вычислить пять остальных неизвестных величин.

Уравнения (13) позволят нам затем вычислить dT_i^{m+1}/dt и dS_i^{m+2}/dt и, следовательно, определить функции T_i^{m+2} и S_i^{m+1} с точностью до постоянной и т. д.

Вырождающиеся решения

80. Вернемся к уравнениям (1) предыдущего пункта

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Мы предположили, что существует периодическое решение с периодом T

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \psi_i(t).$$

Положив затем

$$x_i = \varphi_i + \xi_i, \qquad y_i = \psi_i + \eta_i,$$

мы составили уравнения в вариациях

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum \frac{d^2F}{dy_i\,dx_k}\xi_k + \sum \frac{d^2F}{dy_i\,dy_k}\eta_k, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\sum \frac{d^2F}{dx_i\,dx_k}\xi_k - \sum \frac{d^2F}{dx_i\,dy_k}\eta_k. \end{aligned} \tag{2}$$

Так как эти уравнения имеют в общем случае четыре отличных от нуля характеристических показателя, то у них имеются четыре частных решения вида

$$\xi_i = e^{\alpha t}S_i, \qquad \eta_i = e^{\alpha t}T_i,$$

где S_i и T_i — периодичны. Мы научились составлять эти интегралы.

Но уравнения (2) будут иметь, кроме того, два нулевых характеристических показателя; следовательно, у них будут два частных решения вида

$$\begin{aligned} \xi_i &= S_i', & \eta_i &= T_i', \\ \xi_i &= S_i^* + tS_i', & \eta_i &= T_i^* + tT_i', \end{aligned} \tag{3}$$

где S_i', T_i', S_i^* и T_i^* — периодические функции того же периода, что и φ_i, ψ_i, S_i и T_i.

Как нам получить решения (3)?

В п. 42 мы видели, что уравнения (1) допускают периодическое решение

$$x_i = \varphi_i(t, \mu, \varepsilon), \qquad y_i = \psi_i(t, \mu, \varepsilon) \tag{4}$$

с периодом

$$\frac{T}{1+\varepsilon},$$

сводящееся к

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \psi_i(t)$$

при $\varepsilon = 0$.

Функции φ_i и ψ_i разлагаются в ряды по возрастающим степеням ε.

Положим теперь

$$t = \frac{u}{1+\varepsilon},$$

откуда

$$u = t(1+\varepsilon).$$

Если мы подставим это значение вместо t в уравнения (4), то получим

$$x_i = \theta_i(u, \mu, \varepsilon), \qquad y_i = \Theta_i(u, \mu, \varepsilon).$$

Функции θ_i и Θ_i будут также разлагаться в ряды по степеням μ и ε; но они будут периодическими по u и период будет постоянным и равным T; следовательно, они будут разлагаться в ряды по синусам и косинусам углов, кратных $2\pi u/T$.

Если h — любая постоянная, то

$$x_i = \varphi_i(t+h, \mu, \varepsilon), \qquad y_i = \psi_i(t+h, \mu, \varepsilon)$$

— также решение уравнений (1), поскольку время не входит в явном виде в эти уравнения. Это решение содержит две произвольные постоянные, h и ε.

Пункт 54 дает нам способ вывести отсюда два решения уравнений (2) в вариациях.

Эти решения запишутся в виде

$$\xi_i = \frac{d\varphi_i}{dh}, \qquad \eta_i = \frac{d\psi_i}{dh}$$

и

$$\xi_i = \frac{d\varphi_i}{d\varepsilon}, \qquad \eta_i = \frac{d\psi_i}{d\varepsilon}.$$

После дифференцирования надо положить $h = \varepsilon = 0$.

Но, как мы видели,

$$\varphi_i(t, \mu, \varepsilon) = \theta_i[t(1+\varepsilon), \mu, \varepsilon],$$
$$\psi_i(t, \mu, \varepsilon) = \Theta_i[t(1+\varepsilon), \mu, \varepsilon],$$

откуда

$$\frac{d\varphi_i}{dh} = \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{d\theta_i}{du}\frac{du}{dt} = \frac{d\theta_i}{du}(1+\varepsilon),$$
$$\frac{d\psi_i}{dh} = \frac{d\psi_i}{dt} = \frac{d\Theta_i}{du}\frac{du}{dt} = \frac{d\Theta_i}{du}(1+\varepsilon)$$

и при $\varepsilon = 0$

$$\frac{d\varphi_i}{dh} = \frac{d\theta_i}{du}, \qquad \frac{d\psi_i}{dh} = \frac{d\Theta_i}{du}.$$

С другой стороны,

$$\frac{d\varphi_i}{d\varepsilon} = \frac{d\theta_i}{du}\frac{du}{d\varepsilon} + \frac{d\theta_i}{d\varepsilon} = t\frac{d\theta_i}{du} + \frac{d\theta_i}{d\varepsilon},$$
$$\frac{d\psi_i}{d\varepsilon} = \frac{d\Theta_i}{du}\frac{du}{d\varepsilon} + \frac{d\Theta_i}{d\varepsilon} = t\frac{d\Theta_i}{du} + \frac{d\Theta_i}{d\varepsilon}$$

или при $\varepsilon = 0$

$$\frac{d\varphi_i}{d\varepsilon} = t\frac{d\varphi_i}{dt} + \frac{d\theta_i}{d\varepsilon}, \qquad \frac{d\psi_i}{d\varepsilon} = t\frac{d\psi_i}{dt} + \frac{d\Theta_i}{d\varepsilon}.$$

Искомые решения уравнений (2), следовательно, будут

$$\xi_i = S_i'' = \frac{d\varphi_i}{dt}, \qquad \eta_i = T_i'' = \frac{d\psi_i}{dt}$$

и

$$\xi_i = tS_i'' + S_i^*, \qquad \eta_i = tT_i'' + T_i^*,$$

где

$$S_i^* = \frac{d\theta_i}{d\varepsilon}, \qquad T_i^* = \frac{d\Theta_i}{d\varepsilon}.$$

Я утверждаю, что функции S_i'', T_i'', S_i^* и T_i^* периодические по t с периодом T. Действительно, θ_i и Θ_i периодические по u функции с периодом T; поскольку этот период не зависит от ε, производные

$$\frac{d\theta_i}{du}, \quad \frac{d\Theta_i}{du}, \quad \frac{d\theta_i}{d\varepsilon}, \quad \frac{d\Theta_i}{d\varepsilon} \tag{5}$$

будут также периодическими по u. Но $u = t$ при $\varepsilon = 0$, поэтому если положить после дифференцирования $\varepsilon = 0$, то эти четыре производные (5), т. е. четыре функции S_i'', S_i^*, T_i'', T_i^*, будут периодическими по t, что и требовалось доказать.

Эти четыре функции будут, как и θ_i и Θ_i, производными которых они являются, разлагаться в ряд по возрастающим и положительным степеням μ (я напоминаю, что S_i и T_i в предыдущем пункте разлагались в ряд не по степеням μ, а по степеням $\sqrt{\mu}$).

При $\mu = 0$ φ_i сводится к постоянной x_i^0; следовательно, $d\varphi_i/dt = S_i''$ обращается в нуль. Следовательно, S_i'' делится на μ так же, как в предыдущем пункте S_i делилась на $\sqrt{\mu}$.

Напротив, S_i^* не делится на μ.

В мемуаре, который я опубликовал в «Acta mathematica» (т. XIII, стр. 157) [20], я пришел к рассмотрению уравнений, аналогичных уравнениям (2), и двух частных решений этих уравнений

$$\xi_i = S_i'', \qquad \eta_i = T_i'',$$
$$\xi_i = S_i''' + \alpha t S_i'', \qquad \eta_i = T_i''' + \alpha t T_i''.$$

Я обозначаю через α один из характеристических показателей, так что α разлагается в ряд по нечетным степеням $\sqrt{\mu}$, а μ само разлагается в ряд по степеням α^2 и делится на α^2.

Я предполагаю, что μ заменено этим значением, так что все наши функции оказываются разложенными в ряды по степеням α. Я утверждаю затем, что S_i' и S_i'' делятся на α. Действительно, как мы только что видели, S_i' делится на μ, а μ — на α^2.

С другой стороны, очевидно, что

$$S_i''' = \alpha S_i^*,$$

поскольку следует умножить на α только что изученное решение

$$\xi_i = S_i^* + t S_i'',$$

чтобы получить решение, рассмотренное в «Acta mathematica»,

$$\xi_i = S_i''' + \alpha t S_i''.$$

Я счел себя обязанным сделать это замечание, потому что невнимательный читатель мог бы не обратить внимания на этот множитель α и усмотреть противоречие между результатом, сформулированным в «Acta», и тем, что я только что доказал.

Глава V

НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ ОДНОЗНАЧНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

81. Рассмотрим вновь наши канонические уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}$$
$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots. \tag{1}$$

Я предполагаю сначала, что функция F_0, не зависящая от y_i, зависит от n переменных x_i и что ее гессиан по этим n переменным не равен нулю.

Я собираюсь доказать, что за исключением некоторых особых случаев, которые будем изучать в дальнейшем, уравнения (1) не допускают никаких других аналитических однозначных интегралов, кроме интеграла $F = \text{const}$ [21].

Вот что я понимаю под этим.

Пусть Φ — аналитическая и однозначная функция x, y и μ, которая, кроме того, должна быть периодической по y.

Не обязательно предполагать, что эта функция аналитична и однозначна *при всех значениях переменных* x, y и μ.

Я предполагаю лишь, что эта функция аналитична и однозначна для всех действительных значений переменных y, для достаточно малых μ и для систем значений x, принадлежащих некоторой области D; впрочем, область D может быть произвольной и сколь угодно малой. В этих условиях функция Φ разлагается в ряд по степеням μ и можно записать

$$\Phi = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \ldots,$$

где Φ_0, Φ_1, Φ_2, ... однозначны относительно x и y и периодичны по y.

Я утверждаю, что функция Φ *такого вида не может быть интегралом уравнений* (1).

Необходимое и достаточное условие того, чтобы функция была интегралом, записывается в обозначениях п. 3 в виде

$$[F, \Phi] = 0$$

или, если заменить F и Φ их разложениями,

$$0 = [F_0, \Phi_0] + \mu([F_1, \Phi_0] + [F_0, \Phi_1]) + \mu^2([F_2, \Phi_0] + [F_1, \Phi_1] + [F_0, \Phi_2]) + \ldots.$$

Таким образом, мы имеем в отдельности следующие уравнения, которые я использую в дальнейшем:

$$[F_0, \Phi_0] = 0 \tag{2}$$

и

$$[F_1, \Phi_0] + [\Phi_1, F_0] = 0. \tag{3}$$

Я утверждаю, что всегда можно предполагать, что Φ_0 не является функцией от F_0. Действительно, предположим, что

$$\Phi_0 = \psi(F_0).$$

Я утверждаю, что ψ будет, вообще говоря, однозначной, когда переменные x остаются в области D. В самом деле, мы имеем

$$F_0 = F_0(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Можно разрешить это уравнение относительно x_1 и записать

$$x_1 = \theta(F_0, x_2, \ldots, x_n)$$

и θ будет однозначной функцией, если только dF_0/dx_1 не обращается в нуль внутри области D.

Заменяя x_1 его значением θ в

$$\Phi_0\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Phi_0\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{pmatrix} = \psi\begin{pmatrix} F_0, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{pmatrix}.$$

Φ_0 — однозначная функция x и y; если заменить в ней x_1 однозначной функцией θ, то получим однозначную функцию от F_0, x_2, x_3, ..., x_n и y, но по предположению эта функция ψ зависит лишь от F_0. Следовательно, $\Phi = \psi$ — однозначная функция F_0.

Все это так в предположении, что dF_0/dx_1 не обращается в нуль в области D; равным образом достаточно, чтобы одна из производных dF_0/dx_i не обращалась в нуль в области D.

Теперь, если Φ — однозначный интеграл, то такова же и разность

$$\Phi - \psi(F).$$

$\Phi - \psi(F)$ разлагается в ряд по степеням μ и, кроме того, делится на μ, поскольку $\Phi_0 - \psi(F_0)$ равно нулю. Итак, положим

$$\Phi - \psi(F) = \mu\Phi';$$

Φ' будет однозначным и аналитическим интегралом вида

$$\Phi' = \Phi_0' + \mu\Phi_1' + \mu^2\Phi_2' + \ldots.$$

Вообще говоря, Φ_0' не будет функцией F_0; если бы это было так, то можно было проделать все сначала.

Я утверждаю, что, повторяя таким образом эту операцию, мы в конце концов придем к интегралу, не сводящемуся к функции от F_0 при $\mu = 0$, если только Φ не будет функцией от F; в последнем случае интегралы F и Φ не были бы различными.

Действительно, пусть J — якобиан, или функциональный определитель Φ и F по двум из переменных x и y. Я могу предположить, что этот якобиан не равен тождественно нулю, поскольку если бы все якобианы были равны нулю, то Φ была бы функцией от F, а этот случай мы исключаем.

Очевидно, J разлагается в ряд по степеням μ. Кроме того, J обращается в нуль вместе с μ, поскольку Φ_0 есть функция от F. Следовательно, J делится на некоторую степень μ, например на μ^p.

Пусть теперь J' — функциональный определитель, или якобиан функций Φ' и F; тогда

$$J = \mu J',$$

так что J' делится только на μ^{p-1}.

Таким образом, через самое большее p операций мы придем к якобиану, который уже не будет обращаться в нуль одновременно с μ и который, следовательно, будет соответствовать интегралу, не сводящемуся при $\mu = 0$ к функции от F_0.

Следовательно, если существует аналитический и однозначный интеграл Φ, отличный от F, но такой, что Φ_0 является функцией от F_0, то всегда можно найти другой интеграл того же вида, не сводящийся к функции от F_0 при $\mu = 0$.

Таким образом, мы всегда имеем право предполагать, что Φ_0 *не является функцией от* F_0.

82. Я утверждаю теперь, что Φ не может зависеть от переменных y.

Действительно, если Φ_0 зависит от переменных y, она будет периодической функцией этих переменных, так что мы сможем записать

$$\Phi_0 = \Sigma A e^{\sqrt{-1}(m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n)} = \Sigma A\zeta,$$

где m_i — положительные или отрицательные целые числа, A — функции от x_i и ζ есть краткое обозначение экспоненты от мнимого аргумента, на которую множится A.

Теперь мы имеем

$$[F_0, \Phi_0] = \sum \frac{dF_0}{dx_i} \frac{d\Phi_0}{dy_i},$$

поскольку F_0 не зависит от y и dF_0/dy_i равны нулю.

С другой стороны,

$$\frac{d\Phi_0}{dy_i} = \sum \sqrt{-1}\, m_i A \zeta,$$

так что уравнение (2) имеет вид

$$\sqrt{-1} \sum A \left(m_1 \frac{dF_0}{dx_1} + m_2 \frac{dF_0}{dx_2} + \ldots + m_n \frac{dF_0}{dx_n} \right) \zeta = 0$$

и, поскольку это равенство должно выполняться тождественно, мы будем иметь для всех систем целых значений m_i

$$A \sum m_i \frac{dF_0}{dx_i} = 0,$$

так что тождественно выполняется одно из равенств

$$A = 0 \tag{4}$$

или же

$$\sum m_i \frac{dF_0}{dx_i} = 0. \tag{5}$$

Из тождества (5) выводим с помощью дифференцирования

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 F_0}{dx_i\, dx_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Но это может иметь место лишь в двух случаях: если

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$$

или если гессиан функции F_0 равен нулю. Однако мы предположили вначале, что гессиан не равен нулю. Следовательно, A должно быть тождественным нулю, за исключением того члена, где все m_i равны нулю. Иными словами, Φ_0 сводится к одному члену, не зависящему от y, что и требовалось доказать.

Изучим теперь уравнение (3). Поскольку F_0 и Φ_0 не зависят от y, это уравнение можно записать в виде

$$-\sum \frac{d\Phi_0}{dx_i}\frac{dF_1}{dy_i}+\sum \frac{dF_0}{dx_i}\frac{d\Phi_1}{dy_i}=0.$$

С другой стороны, F_1 и Φ_1 периодические по y функции и, следовательно, они разлагаются в ряды по экспонентам вида

$$e^{\sqrt{-1}(m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n)},$$

где m_i — положительные или отрицательные целые числа.

Для краткости я буду обозначать, как и выше, эту экспоненту через ζ и буду писать

$$F_1=\sum B\zeta, \qquad \Phi_1=\sum C\zeta,$$

где B и C — коэффициенты, зависящие только от x.

Тогда

$$\frac{dF_1}{dy_i}=\sqrt{-1}\sum Bm_i\zeta, \qquad \frac{d\Phi_1}{dy_i}=\sqrt{-1}\sum Cm_i\zeta,$$

так что уравнение (3), разделенное на $\sqrt{-1}$, запишется в виде

$$-\sum B\zeta\left(\sum_i m_i\frac{d\Phi_0}{dx_i}\right)+\sum C\zeta\left(\sum_i m_i\frac{dF_0}{dx_i}\right)=0.$$

Поскольку это уравнение оказывается тождеством, мы должны иметь при всех системах целых значений

$$B\sum m_i\frac{d\Phi_0}{dx_i}=C\sum m_i\frac{dF_0}{dx_i}. \tag{6}$$

Соотношение (6) должно выполняться при всех значениях x. Дадим теперь x такие значения, что

$$\sum m_i\frac{dF_0}{dx_i}=0, \tag{7}$$

тогда правая часть соотношения (6) обращается в нуль. Следовательно, каждый раз, когда x удовлетворяют уравнению (7), должно выполняться равенство

$$B=0 \tag{8}$$

или же равенство

$$\sum m_i\frac{d\Phi_0}{dx_i}=0. \tag{9}$$

Функция F_1 задана, следовательно, заданы и коэффициенты B. Поэтому легко распознать, следует ли из равенства (7) равенство (8). Вообще говоря, это окажется не так и придется заключить, что равенство (9) с необходимостью вытекает из равенства (7).

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — некоторые целые числа. Представим себе, что мы дали x такие значения, что

$$\frac{dF_0}{p_1 dx_1} = \frac{dF_0}{p_2 dx_2} = \ldots = \frac{dF_0}{p_n dx_n}. \tag{10}$$

Можно найти бесконечное число систем целых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$, таких, что

$$m_1 p_1 + m_2 p_2 + \ldots + m_n p_n = 0.$$

Для каждой из этих систем целых чисел должно выполняться равенство

$$\sum m_i \frac{dF_0}{dx_i} = 0$$

и, следовательно,

$$\sum m_i \frac{d\Phi_0}{dx_i} = 0.$$

Сравнение этих двух уравнений показывает, что

$$\frac{\dfrac{dF_0}{dx_1}}{\dfrac{d\Phi_0}{dx_1}} = \frac{\dfrac{dF_0}{dx_2}}{\dfrac{d\Phi_0}{dx_2}} = \ldots = \frac{\dfrac{dF_0}{dx_n}}{\dfrac{d\Phi_0}{dx_n}},$$

т. е. что якобиан F_0 и Φ_0 по любым двум из величин x должен быть равен нулю.

Так должно быть для всех значений x, которые удовлетворяют соотношениям вида (10), т. е. для всех таких значений, что dF_0/dx_i соизмеримы между собой. В произвольной области, как бы мала она ни была, имеется, следовательно, бесконечное число систем значений x, для которых этот якобиан обращается в нуль, и поскольку этот якобиан — непрерывная функция, то он должен быть тождественным нулем.

Равенство всех якобианов функций F_0 и Φ_0 нулю означает, что Φ_0 есть функция от F_0. Однако это противоречит выводу, сделанному нами в конце предыдущего пункта. Следовательно, мы должны заключить, что уравнения (1) не допускают другого однозначного интеграла, кроме $F = C$, что и требовалось доказать.

Случай, когда B обращается в нуль

83. В предыдущем доказательстве мы предполагали, что коэффициенты B не были равны нулю. Случай, когда один или несколько из этих коэффициентов равны нулю (и особенно, когда бесконечное число этих коэффициентов обращается в нуль), следует изучить подробнее.

Чтобы сформулировать результаты, которые я сейчас получу, я должен ввести новую терминологию.

Каждой системе индексов $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (где m_i — целые числа) соответствует коэффициент B. Я назову этот коэффициент *вековым*, если x_i принимают такие значения, что

$$\sum m_i \frac{dF_0}{dx_i} = 0. \tag{7}$$

Такое наименование может быть оправдано следующим образом.

Когда при вычислении возмущений предполагается, что средние движения соизмеримы между собой, некоторые из членов возмущающей функции перестают быть периодическими, и тогда можно сказать, что они становятся вековыми; совершенно аналогичным образом обстоит дело и в нашем случае.

Я скажу, что две системы индексов $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ и $(m_1', m_2', \ldots, m_n')$ принадлежат одному и тому же классу, если

$$\frac{m_1}{m_1'} = \frac{m_2}{m_2'} = \ldots = \frac{m_n}{m_n'},$$

и что *два коэффициента B принадлежат одному и тому же классу*, когда они соответствуют двум системам индексов, принадлежащим одному и тому же классу.

Чтобы доказать теорему предыдущего пункта, мы предположили, что ни один из коэффициентов B не обращается в нуль, становясь вековым.

Для справедливости этой теоремы достаточно, чтобы в каждом из классов имелся *по меньшей мере один* коэффициент B, который не обращается в нуль, становясь вековым.

Действительно, предположим, что коэффициент B, который соответствует системе $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, обращается в нуль, но что коэффициент B', который соответствует системе $(m_1', m_2', \ldots, m_n')$, не равен нулю.

Если давать x такие значения, что

$$\sum m_i \frac{dF_0}{dx_i} = 0,$$

то также будут выполняться соотношения

$$\sum m_i' \frac{dF_0}{dx_i} = 0$$

и, следовательно,

$$B\sum m_i \frac{d\Phi_0}{dx_i} = 0, \qquad B'\sum m_i' \frac{d\Phi_0}{dx_i} = 0.$$

Первое из этих равенств не позволяет еще утверждать, что

$$\sum m_i \frac{d\Phi_0}{dx_i} = 0,$$

потому что B равен нулю; но, поскольку B' не равен нулю, второе равенство нам дает

$$\sum m_i' \frac{d\Phi_0}{dx_i} = 0$$

и, следовательно

$$\sum m_i \frac{d\Phi_0}{dx_i} = 0.$$

Остальные рассуждения проводятся так же, как в предыдущем пункте.

Прежде чем идти дальше, рассмотрим сначала частный случай, когда степеней свободы всего лишь две.

Мы будем иметь тогда лишь два индекса m_1 и m_2 и класс будет полностью определен отношением этих индексов. Пусть λ — некоторое рациональное число; пусть C — класс индексов, для которых $m_1/m_2 = \lambda$. Я скажу для краткости, что этот класс C принадлежит к области D или *находится в этой области*, если можно дать x_i такую систему значений, принадлежащих этой области, что

$$\lambda \frac{dF_0}{dx_1} + \frac{dF_0}{dx_2} = 0.$$

Я назову класс *особым*, если все коэффициенты этого класса обращаются в нуль, становясь вековыми, и *обыкновенным* в противном случае.

Я утверждаю, что теорема останется верной, если предположить лишь, что во всякой области δ, составляющей часть D, можно найти бесконечное число обыкновенных классов.

Действительно, пусть имеется некоторая система значений x_1 и x_2, такая, что в этой точке

$$\lambda \frac{dF_0}{dx_1} + \frac{dF_0}{dx_2} = 0.$$

Предположим, что λ рационально и что класс, соответствующий этому значению λ, обыкновенный. Рассуждения предыдущего пункта можно тогда применить к этой системе значений и мы найдем, что для этих значений x_1 и x_2 якобиан F_0 и Φ_0 по x_1 и x_2 обращается в нуль. Но по предположению в любой сколь угодно малой области δ, составляющей часть D, су-

ществует бесконечное число подобных систем значений x_1 и x_2. Следовательно, наш якобиан должен обращаться в нуль во всех точках D, а это показывает, что Φ_0 есть функция от F_0.

Отсюда можно заключить, как и в предыдущем пункте, что не существует однозначного интеграла, отличного от F.

Дело обстояло бы иначе, если бы нашлась область D, все классы которой особые. Тогда можно было бы спросить, не может ли существовать интеграл, который остается однозначным не для всех значений x, а только когда эти переменные не выходят из области D. Мы бы увидели, что вообще это не так; чтобы убедиться в этом, достаточно было бы рассмотреть в уравнении

$$[F, \Phi] = 0$$

не только член, не зависящий от μ, и член с μ, но также член с μ^2 и следующие члены.

Я не останавливаюсь на этом, так как это не представляет интереса, поскольку я не думаю, чтобы в какой-либо естественно возникающей задаче динамики все классы области D были бы особыми тогда, когда не все коэффициенты B обращаются в нуль, становясь вековыми.

Перейдем теперь к случаю, когда число степеней свободы больше двух. Результаты будут аналогичными, хотя их формулировка и сложнее. Пусть

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

— n произвольных целых чисел. Рассмотрим все системы индексов m_1, m_2, ..., m_n, которые удовлетворяют условию

$$m_1 p_1 + m_2 p_2 + \ldots + m_n p_n = 0.$$

Я скажу, что все соответствующие коэффициенты принадлежат одному и тому же *семейству*.

Рассмотрим q классов, определенных следующими системами индексов:

$$\begin{array}{l} m_{1,1}, \quad m_{2,1}, \ldots, m_{n,1}, \\ m_{1,2}, \quad m_{2,2}, \ldots, m_{n,2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{1,q}, \quad m_{2,q}, \ldots, m_{n,q}. \end{array}$$

Если нельзя найти q целых чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_q,$$

таких, что

$$\sum_{i=1}^{q} a_i m_{k,i} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

то я скажу, что эти q классов *независимы*.

Я назову семейство *обыкновенным*, если можно найти в нем $n-1$ независимых обыкновенных классов, и *особым* в противном случае. Семейство будет особым *первого порядка*, если можно найти в нем $n-2$ независимых обыкновенных класса, особым q-го порядка, если можно найти в нем $n-q-1$ независимых обыкновенных классов и нельзя найти больше.

Я скажу, что семейство, определенное целыми числами $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, принадлежит области D, если в этой области существуют такие значения x, что

$$\frac{dF_0}{p_1\,dx_1} = \frac{dF_0}{p_2\,dx_2} = \ldots = \frac{dF_0}{p_n\,dx_n}.$$

Теперь я утверждаю, что если в любой области δ, составляющей часть D, можно найти бесконечное число обыкновенных семейств, то не может существовать никакого однозначного интеграла, отличного от F.

Действительно, рассуждения предыдущего пункта применимы ко всякой системе значений x, соответствующей обыкновенному семейству.

Якобианы F_0 и Φ_0 по любым двум из переменных x должны, следовательно, обращаться в нуль бесконечное число раз в любой области δ, составляющей часть D, что может произойти, лишь если они тождественно равны нулю.

Теперь я утверждаю, что если можно найти во всякой области δ, составляющей часть D, бесконечное число особых классов q-го порядка, то число различных однозначных интегралов, которые может допускать уравнение (1), не превосходит $q+1$ (включая интеграл F).

Действительно, предположим, что имеются $q+2$ различных интеграла; пусть

$$F, \Phi^1, \Phi^2, \ldots, \Phi^{q+1}$$

— эти интегралы, и предположим, что при $\mu = 0$ они сводятся к

$$F_0, \Phi_0^1, \Phi_0^2, \ldots, \Phi_0^{q+1}. \tag{11}$$

Пусть система значений x соответствует особому семейству q-го порядка. Положим

$$n - q - 1 = p.$$

В этом семействе будет существовать p обыкновенных классов. Пусть

$$m_{1,k}, m_{2,k}, \ldots, m_{n,k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

есть системы индексов, соответствующих этим классам.

Для рассматриваемых значений x будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,k} \frac{dF_0}{dx_i} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,k} \frac{d\Phi_0^h}{dx_i} = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p;\ h = 1, 2, \ldots, q+1).$$

Отсюда заключаем, что якобианы от $q+2$ функций (11) по любым $q+2$ переменным x должны обращаться в нуль при рассматриваемых значениях x. И поскольку это должно иметь место бесконечное число раз в каждой области δ, то отсюда вытекает, что эти якобианы тождественно равны нулю, и, следовательно, наши $q+2$ интеграла не могут быть различными.

Впрочем, эти рассмотрения не представляют практического интереса, и я их привожу здесь только для полноты и строгости. Очевидно, можно искусственно построить задачи, в которых встречаются различные подобные ситуации; однако в естественно возникающих задачах динамики всегда оказывается, что либо все классы особые, либо они все обыкновенные, за исключением конечного числа.

Случай, когда гессиан равен нулю

84. Перейдем теперь к случаю, когда F_0 зависит не от всех переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Я предположу, что F_0 зависит только от x_1 и x_2 и его гессиан по этим двум переменным не равен нулю.

Чтобы лучше отметить разницу между этими переменными x_1 и x_2 и их сопряженными переменными y_1 и y_2, с одной стороны, и другими переменными x и y, с другой, мы условимся обозначать

$$x_3,\ x_4,\ \ldots,\ x_n,$$
$$y_3,\ y_4,\ \ldots,\ y_n$$

через

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n-2},$$
$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-2}.$$

Заметим прежде всего, что выводы п. 81 сохраняют силу, и если существует однозначный интеграл Φ, отличный от F, то всегда можно предположить, что Φ_0 не есть функция от F_0.

Теперь мы должны прежде всего показать, что

$$[F_0, \Phi_0] = \frac{dF_0}{dx_1}\frac{d\Phi_0}{dy_1} + \frac{dF_0}{dx_2}\frac{d\Phi_0}{dy_2} = 0.$$

Положим

$$\zeta = e^{\sqrt{-1}(m_1y_1+m_2y_2)};$$

мы можем записать

$$\Phi_0 = \sum A\zeta,$$

где A — коэффициенты, зависящие от x_1, x_2, z и u. Тогда получим

$$\sqrt{-1}\sum A\zeta\left(m_1\frac{dF_0}{dx_1}+m_2\frac{dF_0}{dx_2}\right)=0.$$

Это соотношение должно выполняться тождественно, и с другой стороны, поскольку гессиан функции F_0 не равен нулю, равенство

$$m_1\frac{dF_0}{dx_1}+m_2\frac{dF_0}{dx_2}=0$$

не может выполняться тождественно, если только m_1 и m_2 не равны оба нулю. Из этого можно заключить, как и в п. 82, что Φ_0 не зависит ни от y_1, ни от y_2.

Запишем затем уравнение (3) п. 81, получим

$$-\frac{d\Phi_0}{dx_1}\frac{dF_1}{dy_1}-\frac{d\Phi_0}{dx_2}\frac{dF_1}{dy_2}+\frac{dF_0}{dx_1}\frac{d\Phi_1}{dy_1}+\frac{dF_0}{dx_2}\frac{d\Phi_1}{dy_2}+$$
$$+\sum\left(\frac{dF_1}{dz_i}\frac{d\Phi_0}{du_i}-\frac{dF_1}{du_i}\frac{d\Phi_0}{dz_i}\right)=0.$$

Положим по-прежнему

$$F_1=\sum B\zeta,\qquad \Phi_1=\sum C\zeta.$$

Когда будет необходимо выявить индексы, я буду писать

$$F_1=\sum B_{m_1,m_2}e^{\sqrt{-1}(m_1y_1+m_2y_2)}.$$

Получим

$$-\sum B\zeta\left(\sum m_i\frac{d\Phi_0}{dx_i}\right)+\sum C\zeta\left(\sum m_i\frac{dF_0}{dx_i}\right)+$$
$$+\sum\zeta\sum\left(\frac{dB}{dz_i}\frac{d\Phi_0}{du_i}-\frac{dB}{du_i}\frac{d\Phi_0}{dz_i}\right)=0.$$

Это соотношение должно быть тождеством; следовательно, мы можем приравнять нулю коэффициент при каждой экспоненте ζ. Кроме того, придадим x такие значения, что

$$m_1\frac{dF_0}{dx_1}+m_2\frac{dF_0}{dx_2}=0, \tag{12}$$

чтобы члены, зависящие от C, исчезли.

Получим

$$-B\left(m_1\frac{d\Phi_0}{dx_1}+m_2\frac{d\Phi_0}{dx_2}\right)+\sum\left(\frac{dB}{dz_i}\frac{d\Phi_0}{du_i}-\frac{dB}{du_i}\frac{d\Phi_0}{dz_i}\right)=0. \tag{13}$$

Будем считать, что два коэффициента B_{m_1, m_2} и $B_{m_1', m_2'}$ принадлежат одному классу, если

$$m_1 m_2' - m_2 m_1' = 0,$$

и я скажу для краткости, что коэффициент B_{m_1, m_2} принадлежит классу m_1/m_2. Из этого определения следует, что коэффициент $B_{0,0}$ принадлежит одновременно всем классам.

Как мы видели, если дать x значения, удовлетворяющие соотношению (12), то соотношение (13) должно выполняться для всех коэффициентов B класса m_1/m_2.

Пусть теперь p и q — два взаимно простых целых числа, таких, что

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{p}{q}.$$

Положим

$$\zeta = e^{\sqrt{-1}(py_1 + qy_2)}$$

и

$$D_\lambda = B_{\lambda p, \lambda q} \zeta^\lambda, \qquad -\zeta H = p\frac{d\Phi_0}{dx_1} + q\frac{d\Phi_0}{dx_2}.$$

Если придать x такие значения, что

$$p\frac{dF_0}{dx_1} + q\frac{dF_0}{dx_2} = 0, \tag{12bis}$$

то соотношение

$$H\frac{dD_\lambda}{d\zeta} + \sum\left(\frac{dD_\lambda}{dz_i}\frac{d\Phi_0}{du_i} - \frac{dD_\lambda}{du_i}\frac{d\Phi_0}{dz_i}\right) = 0 \tag{13 bis}$$

должно выполняться при всех целых значениях λ, положительных, отрицательных или нулевых.

Это может иметь место лишь в двух случаях.

1. Либо когда

$$H = 0, \qquad \frac{d\Phi_0}{dz_i} = 0, \qquad \frac{d\Phi_0}{du_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2),$$

откуда

$$\frac{dF_0}{dx_1}\frac{d\Phi_0}{dx_2} - \frac{dF_0}{dx_2}\frac{d\Phi_0}{dx_1} = 0.$$

Отсюда можно вывести с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям п. 82, что Φ_0 является функцией от F_0, что противоречит предположению, сделанному вначале.

2. Либо когда якобиан от любых $2n-3$ функций D_λ по $2n-3$ переменным ζ, z_i и u_i равен нулю.

Отсюда заключаем, что если придать x_1 и x_2 *постоянные* значения, удовлетворяющие условию (12 bis), то это приведет к соотношению между любыми $2n - 3$ функциями D_λ, так что все эти функции можно выразить через $2n - 4$ из них.

Можно сформулировать этот результат иначе.

Рассмотрим следующие выражения:

$$B^{\lambda'}_{\lambda p,\ \lambda q} B^{-\lambda}_{\lambda' p,\ \lambda' q}. \tag{14}$$

Если предположить, что x_1 и x_2 принимают постоянные значения, удовлетворяющие уравнению (12 bis), то эти выражения (14) зависят только от $2n-4$ переменных, а именно от z_i и u_i.

Если существует однозначный интеграл, то все эти выражения являются функциями $2n - 5$ из них, или, другими словами, можно найти соотношение между любыми $2n - 4$ из них.

Каково условие существования трех различных однозначных интегралов

$$F = \text{const}, \qquad \Phi = \text{const}, \qquad \psi = \text{const}?$$

Пусть F_0, Φ_0 и ψ_0 — значения этих трех интегралов при $\mu = 0$. Можно было бы доказать, как и выше, что всегда можно предполагать, что между F_0, Φ_0 и ψ_0 не существует никакого соотношения.

Затем, полагая

$$-H'\zeta = p\frac{d\psi_0}{dx_1} + q\frac{d\psi_0}{dx_2},$$

мы нашли бы

$$H'\frac{dD_\lambda}{d\zeta} + \sum\left(\frac{dD_\lambda}{dz_i}\frac{d\psi_0}{du_i} - \frac{dD_\lambda}{du_i}\frac{d\psi_0}{dz_i}\right) = 0. \tag{13ter}$$

Таким образом, уравнение (12bis) влечет с необходимостью не только уравнение (13bis), но и уравнение (13ter). Рассуждением, подобным предыдущему, можно было бы убедиться, что это может произойти в двух случаях: либо когда имеется соотношение между F_0, Φ_0 и ψ_0, что противоречит только что сделанному предположению; либо когда якобиан от $2n - 3$ любых из функций D_λ равен нулю *вместе со всеми своими минорами первого порядка.*

Отсюда следовало бы, что если x_1 и x_2 удовлетворяют условию (12bis), то между $2n - 3$ функциями D_λ имеется не одно, а *два* соотношения. Другими словами, величины (14) могут быть выражены с помощью $2n - 6$ из них.

Выражения (14), которые зависят от коэффициентов разложения функции F_1, заданы, и всегда можно проверить, имеется ли между $2n - 4$ из них одно или два соотношения.

В общем случае окажется, что таких соотношений нет, и из этого можно заключить, что не существует аналитического и однозначного интеграла, отличного от F.

А что произошло бы, если бы дело обстояло иначе? Чтобы иметь возможность формулировать результат полно и строго, я воспользуюсь терминологией, аналогичной терминологии предыдущего пункта. Я назову класс *обыкновенным*, если между $2n-4$ из выражений (14), образованных с помощью коэффициентов из этого класса, нет соотношений; особым первого порядка, если существует одно такое соотношение; особым второго порядка, если существуют два таких соотношения и т. д. Вообще, класс будет особым q-го порядка, если существуют q соотношений между любыми $2n-3$ из величин D_λ.

Пусть δ — некоторая область, содержащая бесконечное число систем значений x_1, x_2, z и u.

Если можно найти в области δ значения x_1 и x_2, удовлетворяющие условию (12bis), то я назову класс p/q принадлежащим этой области. Я говорил о значениях x_1 и x_2, а не о значениях x_1, x_2, u и z, потому что левая часть (12bis) зависит лишь от x_1 и x_2.

Я могу теперь сформулировать следующий результат.

Обозначим через D область, содержащую бесконечное число систем значений x_1, x_2, z и u.

Если в любой области δ, составляющей часть D, можно найти бесконечное число обыкновенных классов, то можно быть уверенным, что, кроме F, не существует другого интеграла, который был бы аналитическим и однозначным по x, y, z и u, периодическим по y_1 и y_2 и который оставался бы таковым при всех действительных значениях y_1 и y_2, при достаточно малых μ и при значениях x_1, x_2, z и u, принадлежащих области D.

Если в любой области δ, составляющей часть D, можно найти бесконечное число особых классов q-го порядка, то не могут существовать более q^2+q+1 различных однозначных интегралов, включая F.

Приложение к задаче трех тел

85. Теперь я займусь приложениями предыдущих понятий к различным случаям задачи трех тел.

Начнем с частного случая, определенного в п. 9. В этом случае мы имеем всего две степени свободы и четыре переменных

$$x_1 = L, \qquad x_2 = G,$$
$$y_1 = l, \qquad y_2 = g - t$$

(ср. п. 9,); кроме того,

$$F_0 = \frac{1}{2x_1^2} + x_2.$$

Гессиан функции F_0 равен нулю, однако можно с помощью приемов п. 43 свести задачу к случаю, когда этот гессиан не равен нулю.

Итак, если бы существовал однозначный интеграл, то в разложении F_1 (которая является возмущающей функцией в астрономии) по синусам и косинусам углов, кратных y_1 и y_2, все коэффициенты должны были бы обращаться в нуль, становясь вековыми.

Изучение хорошо известного разложения возмущающей функции показывает, что это не так.

Следовательно, мы должны заключить, что в этом частном случае задачи трех тел нет отличных от F однозначных интегралов [22].

В моем мемуаре из «Acta mathematica» (т. XIII) [23] я воспользовался для доказательства того же утверждения существованием периодических решений и тем фактом, что характеристические показатели не равны нулю. Доказательство, которое я даю здесь, отличается от доказательства в «Acta» лишь по форме, но оно больше подходит для обобщения, которое будет проведено в дальнейшем.

Рассмотрим теперь немного более общий случай задачи трех тел, а именно случай, когда движение происходит в плоскости, и предположим, что мы свели число степеней свободы к трем, как это было показано в п. 15.

Тогда мы имеем шесть сопряженных переменных, а именно

$$\begin{gathered}\beta L,\ \beta' L',\ \beta\Pi = H,\\ l,\quad l',\quad h = \varpi - \varpi'.\end{gathered}$$

Предположим, что мы разлагаем возмущающую функцию F_1 следующим образом:

$$F_1 = \sum B_{m_1, m_2} e^{\sqrt{-1}(m_1 l + m_2 l')},$$

причем коэффициенты B_{m_1, m_2} будут функциями от βL, $\beta' L'$, H и h.

Пусть p и q — любые два взаимно простых целых числа; образуем выражения (14) п. 84

$$B^{\lambda'}_{\lambda p, \lambda q} B^{-\lambda}_{\lambda' p, \lambda' q} \qquad (\lambda, \lambda' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ до беск.}).$$

Дадим L и L' значения, удовлетворяющие условию (12bis), т. е. такие, что отношение средних движений будет равно $-q/p$.

Чтобы задача допускала однозначный интеграл, отличный от интеграла живых сил, было бы нужно, чтобы любые два ($n=3$, $2n-4=2$) из них были связаны соотношением, т. е. чтобы все выражения (14) были функциями от $B_{0,0}$, т. е. от вековой части возмущающей функции. Однако изучение хорошо известного разложения этой функции показывает, что это не так.

Следовательно, мы должны заключить, что, кроме интеграла живых сил, задача не допускает однозначного интеграла следующего вида:

$$\Phi(L, L', H, l, l', h) = \text{const},$$

периодического по l и l'.

Но этого нам не достаточно, надо еще доказать, что задача не допускает и интеграла следующего вида:

$$\Phi(L, L', \Pi, \Pi', l, l', \mathfrak{S}, \mathfrak{S}') = \text{const},$$

где функция Φ зависит произвольным образом и от $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$, а не только разности $\mathfrak{S} - \mathfrak{S}'$.

Для этого надо взять задачу с четырьмя степенями свободы, как мы это делали в п. 16.

Тогда мы будем иметь восемь сопряженных переменных

$$\begin{gathered} \beta L,\ \beta' L',\ \beta\Pi,\ \beta'\Pi', \\ l,\quad l',\quad \mathfrak{S},\quad \mathfrak{S}'. \end{gathered}$$

Коэффициенты B_{m_1, m_2} и выражения (14) п. 84 зависят тогда от L, L', Π, Π, $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$. Когда L и L' получат постоянные значения, при которых отношение средних движений будет равно $-q/p$, выражения (14) предыдущего пункта будут зависеть только от четырех переменных Π, Π', $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$.

Для того чтобы имелся однозначный интеграл, отличный от интеграла живых сил, необходимо, чтобы любые четыре ($2n - 4 = 4$, $n = 4$) выражения из (14) предыдущего пункта были связаны между собой, что имеет место на самом деле, поскольку все эти выражения являются функциями лишь трех переменных: Π, Π', $\mathfrak{S} - \mathfrak{S}'$.

Таким образом, ничто не препятствует существованию интеграла, отличного от интеграла живых сил, и он действительно существует, а именно интеграл площадей.

Для наличия двух интегралов было бы нужно, чтобы между любыми тремя из этих выражений имелось соотношение, т. е. чтобы все эти выражения зависели лишь от двух из них. А это не так.

Таким образом, кроме интегралов живых сил и площадей, задача не допускает других однозначных интегралов.

Перейдем, наконец, к наиболее общему случаю задачи трех тел и поставим задачу как в п. 11, т. е. с шестью степенями свободы и двенадцатью переменными

$$\begin{gathered} \beta L,\ \beta G,\ \beta\Theta,\ \beta' L',\ \beta' G',\ \beta'\Theta', \\ l,\quad g,\quad \theta,\quad l',\quad g',\quad \theta'. \end{gathered}$$

Выражения (14) п. 84, когда L и L' получают постоянные значения, выбранные подходящим образом, как и выше, зависят снова от восьми переменных G, G', Θ, Θ', g, g', θ, θ'.

Для существования q однозначных интегралов, отличных от F, было бы нужно, чтобы между любыми $2n - 3 - q = 9 - q$ из указанных выражений (14) существовало соотношение.

Легко убедиться в том, что эти выражения зависят только от пяти переменных, а именно от

$$G,\ G',\ g,\ g'$$

и от угла плоскостей двух оскулирующих орбит.

Следовательно, между любыми $6 = 9 - 3$ из наших выражений (14) имеется соотношение. Поэтому ничто не препятствует существованию трех новых интегралов, и они на самом деле существуют: это интегралы площадей.

Но между произвольными $5 = 9 - 4$ из выражений (14) не существует соотношения. Следовательно, *задача трех тел не допускает другого однозначного интеграла, кроме интегралов живых сил и площадей.*

Чтобы не прерывать изложения, я ограничился простым утверждением, что соотношений между выражениями (14) не существует; я вернусь к этому вопросу позднее. Известно, что Брунс доказал («Acta mathematica», т. II), что задача трех тел не допускает нового алгебраического интеграла, кроме уже известных.

Предыдущая теорема в некотором смысле более общая, чем теорема Брунса, так как я доказал не только то, что не существует алгебраического интеграла, но и что не существует даже однозначного трансцендентного интеграла, и не только что интеграл не может быть однозначным при всех значениях переменных, но что он не может даже оставаться однозначным в ограниченной области, определенной выше.

Но в другом смысле теорема Брунса более общая, чем моя; действительно, я установил лишь, что алгебраический интеграл не может существовать при достаточно малых значениях масс; Брунс же доказал, что он не существует ни для какой системы значений масс.

Задачи динамики, в которых существует однозначный интеграл

86. Имеются задачи, о которых известно, что однозначный интеграл существует, и можно попробовать проверить, что условия, сформулированные в предыдущем пункте, действительно выполнены.

Возьмем в качестве примера задачу движения подвижной точки M, притягиваемой двумя неподвижными центрами A и B.

Я предположу для простоты, что движение происходит в плоскости; кроме того, я предположу, что масса A велика, тогда как масса B равна очень малой величине μ, так что притяжение точки B можно рассматривать как возмущающую силу.

Мы определим теперь положение точки M с помощью оскулирующих элементов ее орбиты относительно A и обозначим эти элементы буквами L, Π, l и ϖ, как в п. **10**. Тогда получим

$$F = \frac{1}{2L^2} + \frac{\mu}{MB}, \qquad \text{откуда} \qquad F_0 = \frac{1}{2L^2}, \qquad F_1 = \frac{1}{MB};$$

F_1 разлагается в ряд следующего вида:

$$F_1 = \sum B_m e^{\sqrt{-1}ml}.$$

Коэффициенты B_m зависят от L, Π и $\mathfrak{w}$; для того чтобы существовал интеграл, необходимо, чтобы между двумя произвольными коэффициентами одного класса имелось соотношение ($n=2$, $2n-2=2$; я говорю, $2n-2$, вместо $2n-4$, потому что F_0 зависит не от двух переменных x_1 и x_2, как в пунктах 84 и 85, а от одной переменной), когда L принимает значение, удовлетворяющее соотношению (12bis) п. 84.

Но здесь все коэффициенты B_m (у которых теперь всего один индекс) принадлежат одному классу, и соотношение (12 bis) записывается просто так

$$m\frac{dF_0}{dL} = 0$$

или $L = \infty$. Следовательно, трудность могла бы возникнуть лишь при бесконечных значениях L. Поэтому если мы вернемся к сокращенной терминологии предыдущих пунктов и обозначим через D произвольную область, образованную бесконечным числом систем значений L, Π и $\mathfrak{w}$, но такую, что для всех этих систем значение L конечно, то класс, к которому принадлежат все эти коэффициенты B, не будет принадлежать области D. Итак, ничто не будет препятствовать существованию интеграла, однозначного в этой области D.

Перейдем к другой задаче, а именно задаче движения тяжелого тела вокруг неподвижной точки.

Эта задача была проинтегрирована в трех различных частных случаях Эйлером, Лагранжем и Ковалевской (см. «Acta mathematica», т.XII). Как мне кажется, Ковалевская открыла еще новые случаи интегрируемости [24].

Итак, можно спросить, препятствуют ли существованию однозначного интеграла, отличного от интегралов живых сил и площадей, соображения, изложенные в этой главе.

Я предположу, что произведение веса тела на расстояние от центра тяжести до точки подвеса очень мало, так что можно записать уравнения задачи в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i},$$

$$F = F_0 + \mu F_1.$$

Переменные x_i и y_i образуют три пары сопряженных переменных; F обозначает полную энергию системы, F_0 — половина живой силы, μ — очень малая величина, а μF_1 представляет собой произведение веса тела на расстояние от центра тяжести до горизонтальной плоскости, проходящей через точку подвеса.

В случае, когда μ равно нулю (т. е. когда центр тяжести совпадает с точкой подвеса), движение твердого тела сводится к движению по Пуансо. Поскольку мы предполагали μ очень малым, то это движение Пуансо будет служить нам первым приближением подобно кеплеровскому движению при изучении задачи трех тел с помощью последовательных приближений.

Прежде чем идти дальше, я должен определить величины n и n', которые я назову двумя средними движениями и которые будут играть важную роль в последующих рассмотрениях. В движении по Пуансо эллипсоид инерции катится по неподвижной плоскости. Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из точки подвеса на эту неподвижную плоскость, и Q — точка касания. Эта точка касания принадлежит кривой, неподвижной относительно эллипсоида и называемой *полодией*. По истечении некоторого времени T та же точка полодии снова коснется неподвижной плоскости в точке Q'. Пусть α — угол QPQ'. Мы положим

$$n = \frac{2\pi}{T}, \qquad n' = \frac{\alpha}{T};$$

n и n' будут средними движениями.

Теперь уравнения движения по Пуансо можно записать следующим образом.

Пусть x, y и z — координаты произвольной точки твердого тела, а за начало координат взята точка подвеса, причем ось z вертикальна.

Положим

$$l = nt + \varepsilon, \qquad l' = n't + \varepsilon',$$

где ε и ε' — две постоянные интегрирования.

Тогда имеем

$$x = \cos\theta\,(\xi\cos l' - \eta\sin l') - \sin\theta\,\cos\varphi\,(\xi\sin l' + \eta\cos l') + \psi\sin\theta\,\sin\varphi,$$

$$y = \sin\theta\,(\xi\cos l' - \eta\sin l') + \cos\theta\,\cos\varphi\,(\xi\sin l' + \eta\cos l') - \psi\cos\theta\,\sin\varphi,$$

$$z = \sin\varphi\,(\xi\sin l' + \eta\cos l') + \psi\cos\varphi,$$

где ξ, η и ψ — три периодические по l функции от n, n' и l с периодом 2π (эти функции, как известно, выражаются через эллиптические функции); θ и φ — две новые постоянные интегрирования.

Если предположить, что точка (x, y, z) — центр тяжести твердого тела, то F_1 сводится с точностью до постоянного множителя к z, так что мы сможем записать

$$F_1 = \Sigma B_{m,1} e^{\sqrt{-1}\,(ml+l')} + \Sigma B_{m,0} e^{\sqrt{-1}\,(ml)} + \Sigma B_{m,-1}\, e^{\sqrt{-1}\,(ml-l')},$$

где коэффициенты B зависят только от n, n' и φ.

Как только мы дадим n и n' постоянные значения, удовлетворяющие условию (12bis) п. 84, коэффициенты B будут зависеть лишь от φ, так что

любые два из них будут связаны соотношениями. D_λ будут зависеть только от φ и ζ, если положить, как и в предыдущих пунктах,

$$D_\lambda = B_{\lambda_p, \lambda_q} \zeta^\lambda.$$

Следовательно, любые $2n - 3 = 3$ из D_λ связаны соотношением. Таким образом, любой класс будет особым первого порядка.

Итак, ничто не препятствует существованию одного однозначного интеграла, отличного от интеграла живых сил; и действительно, нам известно, что существует один такой интеграл, а именно интеграл площадей. Но вопрос состоит в том, чтобы узнать, существует ли третий интеграл.

С этой целью посмотрим, какие классы будут особыми второго порядка. Для этого необходимо и достаточно, чтобы между любыми тремя из D_λ было два соотношения и, следовательно, чтобы все D_λ были функциями одной из них. Таким образом, мы должны различать несколько разновидностей классов.

1. Класс 1/0, содержащий все коэффициенты $B_{m,0}$. Он является особым второго порядка. Действительно, имеем

$$B_{m,0} = C_{m,0} \cos \varphi,$$

где $C_{m,0}$ зависит лишь от n и n' и должна, следовательно, рассматриваться как постоянная, потому что мы предположили, что значения n и n' постоянные. Тогда имеем

$$D_\lambda = C_{\lambda,0} \cos \varphi \zeta^\lambda.$$

Для того чтобы D_λ были функциями от одной из них, необходимо, чтобы все $C_{\lambda,0}$, за исключением одной, обращались в нуль, т. е., чтобы функция ψ сводилась к экспоненте

$$e^{\sqrt{-1}\, ml}.$$

Но чтобы удовлетворить условию (12bis) п. 84, необходимо дать n значение 0; каково же то движение Пуансо, для которого $n = 0$? Несколько более внимательное рассмотрение показывает, что это то, которое соответствует равномерному вращению вокруг одной из осей инерции. В подобном движении функция ψ является постоянной, не зависящей от l. Это доказывает, что все $C_{\lambda,0}$, за исключением $C_{0,0}$, равны нулю для всех особых значений n и n'.

Следовательно, этот класс особый второго порядка.

2. Классы вида $m/1$, которые содержат лишь три коэффициента

$$B_{m,1},\ B_{0,0},\ B_{-m,-1}.$$

Эти классы могут быть особыми второго порядка лишь в случае, когда

$$B_{m,1} = B_{-m,-1} = 0,$$

или, что то же самое, когда в разложении $\xi + i\eta$ и $\xi - i\eta$ по положительным и отрицательным степеням e^{il} нет члена с e^{+mil} (в предположении, что ξ и η действительны).

Это не так, вообще говоря, когда эллипсоид инерции не является эллипсоидом вращения, но если этот эллипсоид является эллипсоидом вращения, мы получим

$$\xi = A\cos l + B\sin l + C, \qquad \eta = A'\cos l + B'\sin l + C',$$

где A, B, C, A', B', C' — постоянные. Отсюда следует, что

$$B_{m,1} = -B_{-m,-1} = 0,$$

исключая случаи $m = 1$, 0 или -1.

Все классы $m/1$ будут тогда особыми второго порядка, за исключением классов $\frac{1}{1}$, $\frac{0}{1}$ и $\frac{-1}{1}$.

3. Все другие классы, которые сводятся к единственному коэффициенту $B_{0,0}$, будут особыми второго порядка.

Итак, если эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения, то все классы особые второго порядка, за исключением классов $\frac{1}{1}$, $\frac{0}{1}$ и $\frac{-1}{1}$.

Поэтому ничто не препятствует существованию третьего однозначного интеграла и даже тому, чтобы он был алгебраическим, если только якобиан трех интегралов обращается в нуль при $n' = 0$ или $n' = \pm n$. (Это последнее условие не является необходимым в случае Лагранжа, т. е. если точка подвеса находится на оси вращения, потому что тогда ξ и η сводятся к постоянным).

Если, напротив, эллипсоид инерции не есть эллипсоид вращения, то имеется бесконечное число классов, не являющихся особыми второго порядка, а именно классы $m/1$; но рассмотрим область D, включающую бесконечное число систем значений n, n', φ и θ, и предположим, что ни для одной из этих систем n' не кратно n, ни один из классов $m/1$ тогда не будет принадлежать этой области. Теперь ничто не препятствует существованию третьего однозначного интеграла, если только якобиан трех интегралов обращается в нуль, как только n' становится кратным n; отсюда следует, что этот третий интеграл не может в общем случае быть алгебраическим.

Поскольку сформулированные в этой главе условия являются необходимыми, но не достаточными, ничто не доказывает, что этот третий интеграл существует; прежде чем высказывать суждение по этому поводу, следует дождаться полной публикации результатов исследований Ковалевской *.

* После того как были написаны эти строки, ученый мир с прискорбием узнал о безвременной кончине Ковалевской. Найденные у нее заметки оказались, к несчастью, недостаточными для того, чтобы можно было восстановить ее доказательства и вычисления.

Интегралы, не голоморфные относительно μ

87. До сих пор мы предполагали, что наш однозначный интеграл разлагается в ряд по целым степеням μ. Легко распространить результат на случай, когда мы отказываемся от этого предположения.

Предположим, например, что Φ разлагается в ряд по целым степеням $\sqrt{\mu}$; мы сможем записать

$$\Phi = \Phi' + \sqrt{\mu}\,\Phi'',$$

где Φ' и Φ'' разлагаются в ряды по целым степеням μ.

Если Φ — интеграл, то должно тождественно выполняться равенство

$$[F, \Phi] = [F, \Phi'] + \sqrt{\mu}\,[F, \Phi''] = 0.$$

Поскольку $[F, \Phi']$ и $[F, \Phi'']$ разлагаются в ряды по целым степеням μ, должны отдельно выполняться равенства

$$[F, \Phi'] = [F, \Phi''] = 0.$$

Следовательно, Φ' и Φ'' оба должны быть интегралами. Итак, если доказано, что не может существовать однозначного интеграла, разложимого в ряд по целым степеням μ, то тем самым доказано, что не может существовать и однозначный интеграл, разложимый в ряд по целым степеням $\sqrt{\mu}$.

Более общим образом пусть

$$\theta_1(\mu),\ \theta_2(\mu), \ldots, \theta_p(\mu) \tag{1}$$

— p любых функций от μ.

Предположим, что Φ имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi = {} & A_{0,1}\theta_1(\mu) + A_{1,1}\mu\theta_1(\mu) + A_{2,1}\mu^2\theta_1(\mu) + \ldots \\ & + A_{0,2}\theta_2(\mu) + A_{1,2}\mu\theta_2(\mu) + \ldots + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + A_{0,p}\theta_p(\mu) + A_{1,p}\mu\theta_p(\mu) + \ldots,\end{aligned} \tag{2}$$

где A — функции от x и y, не зависящие от μ.

Мы всегда можем предположить, что между p функциями (1) нет соотношений вида

$$\varphi_1\theta_1 + \varphi_2\theta_2 + \ldots + \varphi_p\theta_p = 0, \tag{3}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ разлагаются в ряды по степеням μ.

Действительно, если бы имело место соотношение (3), то одна из функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ не содержала μ в качестве множителя, поскольку если бы все эти функции содержали множитель μ, то мы разделили бы левую часть (3) на μ.

Предположим, например, что φ_1 не обращается в нуль вместе с μ; тогда можно разрешить уравнение (3) относительно θ_1 и мы получим

$$\theta_1 = -\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\theta_2 - \frac{\varphi_3}{\varphi_1}\theta_3 - \ldots - \frac{\varphi_p}{\varphi_1}\theta_p,$$

где $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$, $\frac{\varphi_3}{\varphi_1}$, ... разлагаются в ряды по степеням μ. Если заменить в выражении (2) θ_1 полученным значением, то мы сократим на единицу число функций (1).

Итак, предположим, что эти функции не связаны соотношением вида (3).

Мы сможем записать

$$\Phi = \Phi_1\theta_1 + \Phi_2\theta_2 + \ldots + \Phi_p\theta_p,$$

где $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ разлагаются в ряды по степеням μ. Если Φ — интеграл, то

$$[F, \Phi] = \theta_1[F, \Phi_1] + \theta_2[F, \Phi_2] + \ldots + \theta_p[F, \Phi_p] = 0. \qquad (4)$$

Я утверждаю, что по отдельности

$$[F, \Phi_1] = [F, \Phi_2] = \ldots = [F, \Phi_p] = 0. \qquad (5)$$

Действительно, в противном случае, поскольку величины $[F, \Phi_i]$ ($i = 1, 2, \ldots, p$) разлагаются в ряды по степеням μ, соотношение (4) имело бы вид (3), а это противоречит только что сделанному предположению.

Следовательно, соотношения (5) имеют место.

Итак, $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ — интегралы.

Таким образом, если бы мы показали, что не может быть однозначного интеграла, разлагающегося в ряд по степеням μ, то мы бы доказали, что нет также однозначного интеграла вида (2).

Я добавлю, что это рассуждение можно применить, когда имеется бесконечное число функций (1).

Исследование выражений (14) п. 84

88. Я возвращаюсь к вопросу, который выше был временно оставлен без рассмотрения, а именно к доказательству того факта, что в случае задачи трех тел не существует соотношения между произвольными $2n - 4$ из выражений (14) п. 84.

Для определения упомянутых только что выражений мы предположили, что возмущающая функция F_1 разложена в ряд следующего вида:

$$F_1 = \Sigma B_{m_1 m_2} e^{\sqrt{-1}(m_1 l + m_2 l')}, \qquad (1)$$

где коэффициенты B_{m_1,m_2} — функции остальных переменных

$$L,\ L',\ \Pi,\ \Pi',\ \mathfrak{Q},\ \mathfrak{Q}'$$

или

$$L,\ L',\ G,\ G',\ g,\ g',\ \Theta,\ \Theta',\ \theta,\ \theta'.$$

Обычно в небесной механике возмущающую функцию разлагают иначе. За переменные берут большие оси, эксцентриситеты, наклонения, средние долготы и долготы перигелиев и узлов.

Однако легко видеть, что это сводится к тому же.

Если мы положим

$$B_{m_1,\,m_2} = C_{m_1,\,m_2}\, e^{\sqrt{-1}\,(m_1 g + m_2 g' + m_1\theta + m_2\theta')},$$

то получим

$$F_1 = \Sigma\, C_{m_1,\,m_2}\, e^{\sqrt{-1}\,[m_1(l+g+\theta)+m_2(l'+g'+\theta')]}. \qquad (2)$$

Экспоненциальный множитель зависит лишь от средних долгот

$$l+g+\theta,\quad l'+g'+\theta'$$

и множитель C_{m_1,m_2} зависит лишь от остальных переменных: больших осей, эксцентриситетов, наклонений, долгот перигелиев и узлов. Таким образом, мы снова придем к обычному разложению возмущающей функции.

Выражения (3) п. 84 можно тогда записать в виде

$$B^{\lambda'}_{\lambda p,\,\lambda q}\, B^{-\lambda}_{\lambda' p,\,\lambda' q} = C^{\lambda'}_{\lambda p,\,\lambda q}\, C^{-\lambda}_{\lambda' p,\,\lambda' q}.$$

Следовательно, чтобы в этом случае существовал однозначный интеграл, необходимо, чтобы между произвольными $2n-4$ ($n=4$ в плоскости, $n=6$ в пространстве) из выражений

$$C^{\lambda'}_{\lambda p,\,\lambda q}\, C^{-\lambda}_{\lambda' p,\,\lambda' q}\quad (\lambda,\ \lambda' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ до беск.}), \qquad (14\text{bis})$$

образованных при помощи коэффициентов разложения (2), существовало соотношение.

Таким образом, чтобы применить принципы настоящей главы, не обязательно находить новое разложение возмущающей функции с помощью новых переменных, а именно разложение (1). Можно воспользоваться разложением, уже употреблявшимся астрономами, т. е. разложением (2).

Коэффициенты C_{m_1,m_2} разлагаются в ряды по возрастающим степеням эксцентриситетов и наклонений. Рассмотрим теперь разложение одного из этих коэффициентов в ряд по степеням эксцентриситетов и наклонений. Известно (см. п. 12), что все члены этого разложения будут по меньшей мере степени $|m_1 + m_2|$ относительно этих величин, и если их степень отличается от $|m_1 + m_2|$, то отличается на четное число.

Следовательно, мы сможем записать

$$C_{m_1, m_2} = C^0_{m_1, m_2} + C^1_{m_1, m_2} + \ldots + C^p_{m_1, m_2} + \ldots,$$

где $C^p_{m_1, m_2}$ представляет собой множество членов разложения степени

$$|m_1 + m_2| + 2p$$

относительно эксцентриситетов и наклонений.

Мы скажем, что $C^0_{m_1 m_2}$ — *главный* член $C_{m_1 m_2}$ и что остальные его члены *второстепенные*.

Исключение составляет коэффициент $C_{0,0}$; в этом случае

$$C_{0,0} = C^0_{0,0} + C^1_{0,0} + \ldots.$$

$C^0_{0,0}$ зависит лишь от больших осей, если эти большие оси временно считать постоянными, как мы это делали в предыдущих пунктах [действительно, существование однозначного интеграла влечет за собой соотношение между $2n - 4$ выражениями (14) п. 84 в предположении, что большие оси постоянны]. Итак, если большие оси постоянны, то $C^0_{0,0}$ будет также постоянной, не играющей никакой роли в вычислениях.

Поэтому главным членом $C_{0,0}$ условимся называть член второй степени относительно эксцентриситетов и наклонений $C^1_{0,0}$.

Тогда если заменим разложение (2) следующим:

$$C^0_{0,0} + C^1_{0,0} + \Sigma C^0_{m_1 m_2} e^{\sqrt{-1}\,[m_1 (l+g+\theta)+m_2 (l'+g'+\theta')]}, \tag{3}$$

мы скажем, что записали разложение возмущающей функции F_1, приведенное к главным членам.

Найдем теперь условие, при котором между любыми $2n - 4$ из выражений

$$C^{\lambda'}_{\lambda p,\, \lambda q} C^{-\lambda}_{\lambda' p\, \lambda' q} \qquad (\lambda,\ \lambda' = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots) \tag{14}$$

имеется соотношение.

Образуем таблицу, составленную из бесконечного числа строк, следующего вида. Различные строки соответствуют различным целым значениям индекса λ, положительным, отрицательным или нулевым. Первый элемент строки с индексом λ будет

$$\lambda C_{\lambda p,\, \lambda q},$$

другие будут производными от $C_{\lambda p,\, \lambda q}$ по переменным

$$e,\ e',\ \varpi,\ \varpi',\ i,\ i',\ \theta,\ \theta',$$

т. е. по эксцентриситетам, долготам перигелиев, наклонениям и долготам узлов.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы существовало соотношение между $2n - 4 = 8$ ($n = 6$ в пространственном случае) выражениями из (14), является равенство нулю определителей, составленных из девяти произвольных строк описанной выше таблицы.

Само собой разумеется, что в более простых случаях, например, когда три тела движутся в плоскости, число столбцов и строк в этих определителях меньше девяти.

Мы видели, что все члены разложения C_{m_1, m_2} имеют степень по меньшей мере $|m_1 + m_2|$. Следовательно, первый среди элементов строки с номером λ (которые предполагаются разложенными по степеням эксцентриситетов и наклонений), $\lambda C_{\lambda p, \lambda q}$, начинается членом степени

$$|\lambda_p + \lambda_q|.$$

То же самое можно сказать о производных $C_{\lambda p, \lambda q}$ по $\bar{\omega}$ и θ, тогда как производные $C_{\lambda p, \lambda q}$ по e и i начинаются членами степени

$$|\lambda_p + \lambda_q| - 1.$$

Для строки с номером 0 первый член сводится к нулю; разложения производных $C_{0,0}$ по $\bar{\omega}$ и по θ начинаются членами второй степени, а разложения $C_{0,0}$ по e и i начинаются членами первой степени.

Наши определители в свою очередь можно разложить в ряды по степеням e и i. Если определитель Δ образован из строк с номерами

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_9,$$

то все члены его разложения будут по меньшей мере степени

$$|p + q|\,(|\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_8| + |\lambda_9|) - 4.$$

Я буду обозначать эту величину через α.

Случай, когда $\lambda_9 = 0$, представляет собою исключение: все члены тогда имеют по меньшей мере степень

$$|p + q|\,(|\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_8|) - 2.$$

И эту величину я буду обозначать через α.

Поскольку определитель Δ должен быть тождественно равен нулю, совокупность членов степени α тоже должна быть тождественно равна нулю. Но мы получим эти члены степени α, заменив в определителе Δ каждый из коэффициентов $C_{\lambda p, \lambda q}$ его главным членом $C^1_{\lambda p, \lambda q}$ (или $C^1_{0,0}$, если $\lambda = 0$).

Полученный таким образом определитель Δ_0 должен, следовательно, быть тождественно равным нулю; но что же означает условие

$$\Delta_0 = 0?$$

Образуем выражения

$$(C^0_{\lambda p,\,\lambda q})^{\lambda'}\,(C^0_{\lambda' p,\,\lambda' q})^{-\lambda}, \qquad (\lambda,\ \lambda' = \pm 1,\ \pm 2, \ldots), \tag{14bis}$$

полученные заменой каждого коэффициента C в выражениях (14) его главным членом.

Если мы положим $\lambda = 0$ в выражении (14), то это выражение сведется к

$$C_{0,0},$$

главный член которого есть $C^1_{0,0}$.

Мы прибавим к таблице выражений (14bis) выражение $C^1_{0,0}$, являющееся целым многочленом второй степени относительно e и i.

Итак, условие $\Delta_0 = 0$ означает, что любые восемь выражений из (14 bis), содержащиеся в дополненной таким образом таблице, связаны соотношением.

Итак, для того чтобы имелся однозначный интеграл, необходимо чтобы любые восемь из выражений (14bis) были связаны соотношением.

Коэффициенты C были бесконечными рядами, а выражения (14) были представлены в виде отношения двух таких рядов.

Напротив, выражения (14bis) *рациональны* относительно e и i, синусов и косинусов ω и θ.

Следовательно, проверка облегчается заменой коэффициентов их главными членами. Она становится даже легкой для малых значений целых чисел p и q.

Убедившись таким образом, что определители, соответствующие малым значениям целых p и q, не равны нулю, трудно надеяться, что определители, соответствующие большим значениям этих целых чисел, могут обращаться в нуль и допускать таким образом существование однозначного интеграла.

Тем не менее некоторое сомнение могло бы еще сохраниться.

Можно было бы предположить, как бы это ни показалось неправдоподобным, что среди классов (в терминологии п. 84) имеется конечное число обыкновенных и что это именно те классы, которые мы проверяли; но что имеется также бесконечное число особых классов.

Чтобы окончательно разрешить это сомнение, надо было бы иметь общее выражение функций (14) и (14bis) для всех целых значений λ, λ', p и q, и это выражение не могло не быть крайне сложным.

К счастью, Фламм в недавней диссертации* дал приближенное выражение членов высокого порядка в разложении возмущающей функции, и этого приближенного выражения гораздо более простого чем полное, достаточно для наших целей.

Однако вид, который Фламм дал этому разложению, не самый удобный для интересующей нас задачи; мы будем вынуждены дополнить его результаты и значительно их преобразовать.

---

* Paris, Gautier-Villars, 1887.

Я вернусь к этому вопросу в следующей главе, после того, как будет рассмотрено приближенное вычисление различных членов возмущающей функции, потому что, хотя предыдущие рассмотрения и могли убедить любого скептика, они все же не составляют строгого математического доказательства.

89. Проверку в некоторой степени может облегчить еще одно замечание.

Рассмотрим вновь соотношение (13) из п. 84, имеющее вид

$$-B_{m_1,\,m_2}\left(m_1\frac{d\Phi_0}{dx_1}+m_2\frac{d\Phi_0}{dx_2}\right)+\sum\left(\frac{dB_{m_1,\,m_2}}{dz_i}\frac{d\Phi_0}{du_i}-\frac{dB_{m_1,\,m_2}}{du_i}\frac{d\Phi_0}{dt_i}\right)=0.$$

Положив в этом соотношении $m_1=\lambda p$, $m_2=\lambda q$, я получу частное соотношение, которое я обозначу (13bis); положив в нем $m_1=\lambda' p$, $m_2=\lambda' q$, я получу другое частное соотношение, которое я назову (13ter).

Пусть далее

$$M_{\lambda,\,\lambda'}=B^{\lambda'}_{\lambda p,\,\lambda q}B^{-\lambda}_{\lambda' p,\,\lambda' q},$$

где $M_{\lambda,\lambda'}$ будет одним из выражений (14), которые играли столь большую роль в предыдущем пункте.

Умножим (13bis) и (13ter) соответственно на

$$\frac{\lambda'}{B_{\lambda p,\,\lambda q}}\text{ и }\frac{-\lambda}{B_{\lambda' p,\,\lambda' q}},$$

сложим и получим

$$\sum\left(\frac{d\log M_{\lambda,\,\lambda'}}{dz_i}\frac{d\Phi_0}{du_i}-\frac{d\log M_{\lambda,\,\lambda'}}{du_i}\frac{d\Phi_0}{dz_i}\right)=0$$

или, принимая обозначения Якоби для скобок Пуассона,

$$[\log M_{\lambda,\,\lambda'},\,\Phi_0]=0,$$

или же

$$[M_{\lambda,\,\lambda'},\,\Phi_0]=0.$$

Итак, если M и M'—два выражения из (14) предыдущего пункта, принадлежащие одному и тому же классу, то мы должны иметь

$$[M,\,\Phi_0]=[M',\,\Phi_0]=0$$

или по теореме Пуассона

$$[[M,\,M'],\,\Phi_0]=0,$$

откуда можно заключить, что $[M,\,M']$ — функция $2n-4$ из выражений (14).

Не следует забывать, что скобки должны быть вычислены в предположении, что x_1 и x_2 (т. е. в случае задачи трех тел βL и $\beta' L'$) являются постоянными.

Глава VI

ПРИБЛИЖЕННОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Формулировка задачи

90. Как я уже говорил, Фламм дал замечательное приближенное выражение членов высокого порядка возмущающей функции. Ему удалось это сделать с помощью метода Дарбу, позволяющего найти коэффициенты высокого порядка ряда Фурье или же ряда Тейлора, если известны аналитические свойства функции, представленной этими рядами.

Но метод Дарбу применим только к функциям одной переменной, в то время как возмущающая функция должна быть разложена по синусам и косинусам углов, кратных двум средним аномалиям. Вот к какой уловке прибегнул Фламм: он получил сначала обычным способом первое разложение возмущающей функции, члены которого имеют вид

$$A\rho^{\alpha} e^{i(\beta v+\gamma u)},\ \rho'^{\alpha'} e^{i(\beta' v'+\gamma' u')},$$

где ρ — радиус-вектор первой планеты; v — истинная аномалия; u — эксцентрическая аномалия; ρ', v' и u' — аналогичные величины, соответствующие второй планете.

Тогда два множителя $\rho^{\alpha} e^{i(\beta v+\gamma u)}$ и $\rho'^{\alpha'} e^{i(\beta' v'+\gamma' u')}$ зависят только от одной переменной, а именно: первый — от средней аномалии ξ первой планеты, второй — от другой средней аномалии ζ'. Фламм применил к каждому из этих двух сомножителей метод Дарбу.

Этот прием недостаточен для наших целей; нам необходимо, напротив, применять метод Дарбу непосредственно к возмущающей функции и для этого распространить этот метод на случай функций двух переменных[25].

91. Функцию, которую надо разложить, мы обозначили через F_1; я напомню ее выражение, приняв снова обозначения п. **11**. Мы имеем

$$F = \frac{y_1^2+y_2^2+y_3^2}{2\beta} + \frac{y_4^2+y_5^2+y_6^2}{2\beta'} - \frac{m_2m_3}{\mu\, BC} - \frac{m_3m_1}{\mu\, AC} - \frac{m_1m_2}{\mu\, AB}.$$

Определенная таким образом функция F зависит от переменных (4) из п. **11**, от m_1, m_2, m_3 и от μ. Если мы предположим, что m_1, m_2 и m_3 — известные функции параметра μ и разлагаются в ряд по возрастающим степеням этого параметра, то F будет зависеть лишь от переменных (4) и от μ и будет разлагаться в ряд по возрастающим степеням μ.

Здесь возможно бесконечное число вариантов; мы предположим, например, что m_1, β и β' есть постоянные, не зависящие от μ.

Переменные (4) являются кеплеровскими переменными, соответствующими двум оскулирующим орбитам, определенным в п. 11. Радиус-вектор первой оскулирующей орбиты есть AB, радиус-вектор второй орбиты есть CD. Угол между этими двумя радиусами-векторами (который является не чем иным, как разностью двух истинных долгот двух оскулирующих орбит, если эти орбиты находятся в одной плоскости) — это угол BDC, который я буду обозначать через D.

Величины $(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$, $(y_4^2+y_5^2+y_6^2)$ и AB зависят только от переменных (4) и не зависят от μ. Напротив, α_1, α_3, AC и BC зависят не только от переменных (4), но еще и от μ. Следовательно, мы можем попытаться разложить α_2, α_3, $1/AC$ и $1/BC$ по степеням μ. Таким образом, мы найдем

$$\alpha_2 = \beta + \frac{\mu\beta^2}{m_1} + \text{члены, делящиеся на } \mu^2,$$

$$\alpha_3 = \beta' + \frac{\mu\beta'^2}{m_1} + \text{члены делящиеся на } \mu^2,$$

$$\frac{1}{BC} = \frac{1}{\sqrt{AB^2+CD^2-2AB\cdot CD\cos D}} + \text{члены, делящиеся на } \mu,$$

$$\frac{1}{AC} = \frac{1}{CD} - \frac{\beta\mu}{m_1}\cdot\frac{AB\cos D}{CD^2} + \text{члены, делящиеся на } \mu^2.$$

Тогда если положить

$$F = F_0 + \mu F_1 + \ldots,$$

то получим

$$F_0 = \frac{y_1^2+y_2^2+y_3^2}{2\beta} + \frac{y_4^2+y_5^2+y_6^2}{2\beta'} - \frac{\beta' m_1}{CD} - \frac{\beta m_1}{AB},$$

$$F_1 = -\frac{\beta^2}{AB} - \frac{\beta'^2}{CD} - \frac{\beta\beta'}{\sqrt{AB^2+CD^2-2AB\cdot CD\cos D}} + \frac{\beta\beta'\,AB\cos D}{CD^2}.$$

Рассмотрим последовательно различные члены возмущающей функции F_1.

Прежде всего первый член

$$-\frac{\beta^2}{AB} = -\frac{\beta^2}{r}$$

зависит только от средней аномалии l и не зависит от средней аномалии l'; следовательно, в разложении не будет членов с $\sin(ml+nl')$ или $\cos(ml+nl')$, где $n \neq 0$.

Также второй член

$$-\frac{\beta'^2}{CD} = -\frac{\beta'^2}{r'}$$

не сможет дать в разложении членов с $\sin(ml + nl')$ или $\cos(ml + nl')$, где $m \neq 0$.

Следовательно, вообще мы сможем отбросить эти два члена.

Последний член

$$\frac{\beta\beta' AB\cos D}{CD^2}$$

может быть представлен в другой форме.

Если я обозначу через i наклонение орбит, а через v и v' — истинные долготы, *отсчитанные от линии узлов*, то получим

$$\cos D = \cos v\,\cos v' + \cos i\,\sin v\,\sin v',$$

откуда

$$\frac{AB\cos D}{CD^2} = (AB\cos v)\frac{\cos v'}{CD^2} + \cos i\,(AB\sin v)\frac{\sin v'}{CD^2}.$$

Метод Фламма непосредственно применим к четырем множителям

$$AB\cos v, \quad \frac{\cos v'}{CD^2}, \quad AB\sin v, \quad \frac{\sin v'}{CD^2}.$$

Остается, таким образом, разложить третий член

$$F_1^0 = \frac{\beta\beta'}{\sqrt{AB^2 + CD^2 - 2AB\cdot CD\cos D}},$$

который известен под названием главной части возмущающей функции. Разложением этой главной части мы сейчас и займемся.

Отступление об одном свойстве возмущающей функции

92. Можно было бы попытаться избежать разложения главной части возмущающей функции, используя следующий искусственный прием.

Мы нашли

$$F_1 = -\frac{\beta^2}{r} - \frac{\beta'^2}{r'} + \beta\beta' F_1^0 + \frac{\beta\beta' r\cos\omega}{r'^2},$$

обозначив через r и r' два радиуса-вектора и через ω — угол между этими радиусами-векторами.

Чтобы достигнуть этого результата, мы взяли, как и в п. 11, за оскулирующие орбиты орбиту B относительно A и орбиту C относительно D, центра тяжести A и B. Но ясно, что было бы можно равным образом выбрать за оскулирующие орбиты орбиту C относительно A и орбиту B относительно E, центра тяжести A и C.

Это равносильно перестановке планет B и C; таким образом мы бы получили в качестве новой возмущающей функции

$$F_1' = -\frac{\beta^2}{r} - \frac{\beta'^2}{r'} + \beta\beta' F_1^0 + \frac{\beta\beta' r' \cos\omega}{r^2},$$

откуда

$$F_1' - F_1 = \beta\beta'\left(\frac{r'\cos\omega}{r^2} - \frac{r\cos\omega}{r'^2}\right).$$

Если существует интеграл

$$\Phi = \text{const},$$

то его можно записать, взяв в качестве переменных оскулирующие элементы двух первых орбит [переменные (4) п. 11], и мы получим

$$\Phi_0 + \mu\Phi_1 + \ldots = \text{const}.$$

Его можно записать также, выбирая в качестве переменных оскулирующие элементы двух новых орбит (орбиты C относительно A и B относительно E); тогда получим

$$\Phi_0' + \mu\Phi_1' + \ldots = \text{const},$$

где Φ_0' будет образовано из элементов двух новых орбит так же, как Φ_0 было образовано из соответствующих элементов двух старых орбит, но Φ_1' не будет образовано подобно Φ_1.

Как мы видели в п. 81, мы должны получить

$$[\Phi_0, F_1] + [\Phi_1, F_0] = 0,$$

а также

$$[\Phi_0', F_1'] + [\Phi_1', F_0] = 0;$$

поскольку Φ_0' образовано так же, как Φ_0, то я могу опустить штрих и написать

$$[\Phi_0, F_1'] + [\Phi_1', F_0] = 0,$$

откуда

$$[\Phi_0, F_1' - F_1] + [\Phi_1' - \Phi_1, F_0] = 0. \tag{1}$$

Мы видели, что если существует однозначный интеграл и если, после того как мы разложили F_1, образовать выражения (14) из п. 84, то между этими выражениями должно существовать некоторое число соотношений.

Но, рассуждая относительно уравнения (1) аналогично тому, как мы это делали относительно уравнения (3) из п. 81, мы пришли бы к аналогичному результату.

Разложим $F_1' - F_1$ и образуем с помощью этого разложения выражения (14) п. 84; если существует однозначный интеграл, то между этими выражениями должно существовать некоторое число соотношений.

Итак, если можно было бы установить, что этих соотношений не существует, то мы бы установили, что не может существовать однозначный интеграл. Поскольку разложение разности $F_1' - F_1$ несравненно проще, чем разложение F_1, то, по-видимому, этот способ должен сильно облегчить нашу задачу.

Но он настолько искусствен, что можно a priori почувствовать сомнение относительно эффективности этого метода и задать себе вопрос, не является ли он иллюзорным. Это на самом деле так, поскольку выражения (14), образованные с помощью $F_1' - F_1$, равны нулю или же не определены.

Предположим, что мы разложили $F_1' - F_1$ в ряд вида

$$F_1' - F_1 = \Sigma B_{m_1, m_2} e^{\sqrt{-1}(m_1 l + m_2 l')}.$$

Коэффициенты B_{m_1,m_2} будут функциями от βL, $\beta' L'$ и других оскулирующих элементов (за исключением l и l'). Дадим L и L' такие значения, что

$$m_1 n + m_2 n' = 0$$

(обозначая через n и n' средние движения).

Я утверждаю, что для этих значений L и L коэффициент B_{m_1,m_2} обратится в нуль.

Для этого я воспользуюсь следующей леммой.

Пусть

$$x_1, x_2, \ldots, x_n; \qquad y_1, y_2, \ldots, y_n \tag{2}$$

— система попарно сопряженных переменных, пусть

$$x_1', x_2', \ldots, x_n'; \qquad y_1', y_2', \ldots, y_n' \tag{3}$$

— другая система сопряженных переменных. Предположим, что эти две системы связаны такими соотношениями, что от одной к другой можно перейти, не изменяя канонического вида уравнений. Тогда согласно п. 5, должно иметь место соотношение

$$\Sigma (dx_i\, \delta y_i - dy_i\, \delta x_i) = \Sigma (dx_i'\, \delta y_i' - dy_i'\, \delta x_i'). \tag{4}$$

Предположим, что x_i' и y_i' зависят от некоторого параметра μ и разлагаются в ряды по степеням μ; кроме того, при $\mu = 0$ x_i' и y_i' совпадают с x_i и y_i.

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i + \mu \xi_i + \ldots, \\ y_i' &= y_i + \mu \eta_i + \ldots, \end{aligned} \tag{5}$$

где ξ_i и η_i — функции от x_i и y_i.

Тогда выражение

$$\Sigma (\xi_i dy_i - \eta_i dx_i) = dS$$

будет полным дифференциалом. Это с необходимостью вытекает из тождества (4), из которого, очевидно, вытекает следующее тождество:

$$\Sigma (d\xi_i \delta y_i - dy_i \delta\xi_i + dx_i \delta\eta_i - d\eta_i \delta x_i) = 0.$$

Рассмотрим теперь канонические уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i},$$

где

$$F = F_0(x_i, y_i) + \mu F_1(x_i, y_i) + \ldots,$$

Сделаем замену переменных и за новые переменные возьмем (3); получим

$$F = F_0'(x_i' y_i') + \mu F_1'(x_i', y_i') + \ldots.$$

Если мы заменим x_i' и y_i' их значениями (5), то получим

$$F_0'(x_i', y_i') = F_0'(x_i, y_i) + \mu \sum \left(\frac{dF_0'}{dx_i} \xi_i + \frac{dF_0'}{dy_i} \eta_i \right) + \text{члены, делящиеся на } \mu^2,$$

$$F_1'(x_i', y_i') = F_1'(x_i, y_i) + \text{члены, делящиеся на } \mu,$$

откуда, приравнивая оба разложения, получим

$$F_0(x_i, y_i) = F_0'(x_i, y_i),$$

$$F_1(x_i, y_i) = F_1'(x_i, y_i) + \sum \left(\frac{dF_0'}{dx_i} \xi_i + \frac{dF_0'}{dy_i} \eta_i \right).$$

Если заметить, что $F_0(x_i, y_i) = F_0'(x_i, y_i)$ и что

$$\xi_i = \frac{dS}{dy_i}, \quad \eta_i = -\frac{dS}{dx_i},$$

то можно записать

$$F_1 - F_1' = [F_0, S]. \tag{6}$$

Предположим, что F_0 зависит лишь от двух переменных x_1 и x_2 и что F_1, F_2 — периодические функции с периодом 2π по y_1 и y_2. Так обстоит дело во всех задачах, которые мы до сих пор рассматривали.

Предположим, кроме того, что S периодична по y_1 и y_2 и пусть

$$S = \Sigma A e^{\sqrt{-1}(m_1 y_1 + m_2 y_2)},$$

где A зависит от $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_3, y_4, \ldots, y_n$.

Предположим, что мы желаем разложить F_i' и $F_1 - F_i'$ в ряды того же вида и пусть

$$F_1 - F_1' = \Sigma B e^{\sqrt{-1}(m_1 y_1 + m_2 y_2)}.$$

Уравнение (6) показывает, что

$$B = \sqrt{-1}\, A\left(m_1 \frac{dF_0}{dx_1} + m_2 \frac{dF_0}{dx_2}\right).$$

Итак, если мы даем x_1 и x_2 такие значения, что

$$m_1 \frac{dF_0}{dx_1} + m_2 \frac{dF_0}{dx_2} = 0,$$

то получаем также

$$B = 0.$$

Применим этот результат к случаю, который нас интересует.

Пусть

$$\begin{matrix} \beta L, & \beta G, & \beta\Theta, & \beta' L', & \rho' G', & \beta'\Theta'; \\ l, & g, & \theta, & l', & g', & \theta' \end{matrix} \tag{7}$$

есть переменные (4) из п. 11, соответствующие двум старым оскулирующим орбитам: B относительно A и C относительно D.

Пусть

$$\begin{matrix} \beta_1 L_1, & \beta_1 G_1, & \beta_1 \Theta_1, & \beta_1' L_1', & \beta_1' G_1', & \beta_1' \Theta_1'; \\ l_1, & g_1, & \theta_1, & l_1', & g_1', & \theta_1' \end{matrix} \tag{8}$$

есть переменные (4) из п. 11, соответствующие двум новым орбитам (B относительно E, C относительно A).

Эти переменные (8) смогут заменить переменные (7) так, чтобы канонический вид уравнений не нарушился; они будут зависеть от переменных (7) и от μ; они будут разлагаться в ряды по степеням μ и сведутся к переменным (7) при $\mu = 0$.

Таким образом, мы окажемся в условиях, когда применим предыдущий результат, и мы должны заключить, что если положить

$$F_1' - F_1 = \Sigma B_{m_1, m_2} e^{\sqrt{-1}(m_1 l + m_1' l')},$$

то B_{m_1, m_2} обращается в нуль при

$$m_1 \frac{dF_0}{dx_1} + m_2 \frac{dF_0}{dx_2} = 0.$$

Этот результат легко можно проверить непосредственно. Действительно, обратимся к выражениям, данным Тиссераном в книге «Mécanique céleste» (t. I, p. 312).

Результат, который нам надо проверить, в терминологии Тиссерана может быть сформулирован следующим образом (я напоминаю, что Тиссеран обозначает через σ косинус угла между радиусами-векторами).

Если положить

$$\sigma\left(\frac{r}{r'^2}-\frac{r'}{r^2}\right)=\sum B_{n,n'}\, e^{\sqrt{-1}\,(n\zeta+n'\zeta')},$$

то $B_{n,n'}$ обращается в нуль при

$$\frac{n}{a^{3/2}}+\frac{n'}{a'^{3/2}}=0.$$

Действительно, обращаясь к выражениям цитированной страницы, находим

$$B_{n,n'}=\left(\frac{n'a}{na'^2}-\frac{na'}{n'a^2}\right)C,$$

где C зависит только от эксцентриситетов, наклонений, долгот перигелиев и узлов; следовательно, это выражение обратится в нуль при

$$\frac{n^2}{a^3}=\frac{n'^2}{a'^3}$$

и, следовательно, при

$$\frac{n}{a^{3/2}}+\frac{n'}{a'^{3/2}}=0,$$

что и требовалось доказать.

Я счел себя обязанным тем не менее связать эту теорему с более общей теорией, которая позволит, быть может, открыть новые аналогичные предложения.

Основы метода Дарбу

93. После этого отступления я возвращаюсь к своей основной теме. Прежде всего следует напомнить результаты Дарбу, из которых мы будем исходить.

1. Пусть ряд

$$\varphi(x)=\Sigma a_n x^n$$

имеет радиус сходимости r.

Если n бесконечно возрастает, то

$$\lim a_n\rho^n=0, \qquad \text{если} \qquad \rho<r,$$
$$\lim a_n\rho^n=\infty, \qquad \text{если} \qquad \rho>r.$$

2. Представим себе теперь, что функция

$$\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$$

остается конечной на окружности радиуса r вместе с p первыми производными; тогда произведение $n^{p+1} a_n r^n$ не будет неограниченно расти с ростом n.

3. Если имеет место равенство

$$\varphi(x) = (1 - \alpha x)^k = \Sigma a_n x^n,$$

то приближенно выполняется

$$a_n = \frac{n^{-1-k}\alpha^n}{\Gamma(-k)}; \tag{1}$$

я хочу сказать, что отношение обеих частей равенства (1) стремится к 1 при неограниченном возрастании n.

4. Предположим теперь, что функция $\varphi(x)$ имеет на окружности радиуса r две особые точки $x = \alpha$ и $x = \beta$; что в окрестности точки $x = \alpha$ мы имеем

$$\varphi(x) = A_1\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma_1} + A_2\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma_2} + \ldots + A_h\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma_h} + \psi(x),$$

а в окрестности точки β

$$\varphi(x) = B_1\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)^{\delta_1} + B_2\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)^{\delta_2} + \ldots + B_k\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)^{\delta_k} + \psi_1(x),$$

где $\psi(x)$ и $\psi_1(x)$ остаются конечными вместе со своими первыми производными. Тогда получаем при $n = \infty$

$$\lim n^{p+1} r^n \left[a_n - \sum A_i \frac{n^{-1-\gamma_i}}{\alpha^{\gamma_i}} \frac{1}{\Gamma(-\gamma_i)} - \sum B_i \frac{n^{-1-\delta_i}}{\beta^{\delta_i}} \frac{1}{\Gamma(-\delta_i)}\right] = 0,$$

откуда выводится приближенное значение a_n.

5. Если мы имеем

$$\varphi(x) = \log(1 - x),$$

то

$$a_n = -\frac{1}{n},$$

если

$$\varphi(x) = \log(1 - x)(1 - x)^k,$$

то мы будем приближенно иметь

$$a_n = \frac{-n^{1-k}\log n}{\Gamma(-k)}.$$

Последняя формула применима лишь в случае, если k не есть целое положительное число, в этом случае

$$a_n = \frac{(-1)^{k+1} k!}{n(n-1)\ldots(n-k)}.$$

6. Пусть

$$\varphi(x) = \Sigma a_n x^n + \Sigma a_{-n} x^{-n}$$

— ряд, содержащий положительные и отрицательные степени и сходящийся при

$$|x| < R, \qquad |x| > r.$$

Пусть α и β — две особые точки функции $\varphi(x)$, расположенные на окружности $|x| = R$; пусть γ и δ — две особые точки $\varphi(x)$ на окружности $|x| = r$. Предположим, что $\varphi(x)$ не имеет на этих окружностях других особых точек.

Пусть

$$\psi(x) = \Sigma b_n x^n, \qquad \psi_1(x) = \Sigma c_n x^n$$

— два ряда, сходящиеся при

$$|x| < R.$$

Пусть

$$\psi_2(x) = \Sigma b_{-n} x^{-n}, \qquad \psi_3(x) = \Sigma c_{-n} x^{-n}$$

— два ряда, сходящиеся при

$$|x| > r.$$

Если разности $\varphi - \psi$, $\varphi - \psi_1$, $\varphi - \psi_2$, $\varphi - \psi_3$ и их первые p производные конечны, причем первая из них в окрестности точки $x = \alpha$, вторая — около точки $x = \beta$, третья — возле точки $x = \gamma$, а четвертая — когда x находится вблизи точки δ, то мы будем иметь

$$\lim n^{p+1} R^n (a_n - b_n - c_n) = 0,$$
$$\lim n^{p+1} r^{-n} (a_{-n} - b_{-n} - c_{-n}) = 0, \qquad \text{при } n = \infty.$$

Приближенные значения коэффициентов a_n, следовательно, зависят лишь от особенностей, которые имеет функция $\varphi(x)$ на окружностях, ограничивающих сходимость.

Обобщение на случай нескольких переменных

94. Применим эти принципы к интересующему нас случаю.

Речь идет о разложении некоторой функции F_1^0 двух средних аномалий l и l' в ряд следующего вида:

$$F_1^0 = \Sigma A_{m_1, m_2} e^{\sqrt{-1}(m_1 l + m_2 l')}.$$

Мы имеем, следовательно

$$4\pi^2 A_{m_1, m_2} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1^0 \; e^{-\sqrt{-1}(m_1 l + m_2 l')}\, dl dl'.$$

Нам надо найти приближенное значение коэффициента A_{m_1,m_2} в случае, когда отношение m_1/m_2 дано и конечно, а два числа m_1 и m_2 очень велики или же, более общим образом, когда

$$m_1 = an + b, \qquad m_2 = cn + d,$$

где a, b, c, d — конечные целые числа, а n — очень большое целое число, a и c взаимно просты.

Если я утверждаю далее, что приближенно выполняется равенство

$$A_{m_1, m_2} = \varphi(n), \qquad (m_1 = an + b,\ m_2 = cn + d),$$

то это будет означать, что отношение

$$\frac{A_{m_1, m_2}}{\varphi(n)}$$

стремится к единице, когда n неограниченно возрастает, а a, b, c, d остаются конечными.

Сформулировав таким образом задачу, я введу следующие обозначения.

Положим

$$e^{\sqrt{-1}l} = t^c, \quad e^{\sqrt{-1}l'} = t^{-a}\, z^{\frac{1}{c}};$$

тогда

$$F_1^0 = \Sigma A_{m_1, m_2}\, t^{m_1 c - m_2 a} z^{\frac{m_2}{c}}.$$

Если мы затем положим для краткости

$$F(z, t) = F_1^0 t^{ad-bc-1} z^{-\frac{d}{c}},$$

то найдем

$$F(z, t) = \Sigma A_{m_1, m_2} t^{\alpha} z^{\frac{m_2 - d}{c}},$$

полагая для краткости

$$\alpha = m_1 c - m_2 a + ad - bc - 1.$$

Пусть теперь

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi}\int F(z, t)\, dt;$$

интеграл берется по t вдоль окружности $|t| = 1$. Мы будем иметь

$$\Phi(z) = \sum \frac{A_{m_1, m_2}}{2i\pi} z^{\frac{m_2-d}{c}} \int t^{\alpha} dt.$$

Все интегралы равны нулю, кроме тех, для которых $\alpha = -1$ и которые равны $2i\pi$.

Если $\alpha = -1$, мы будем иметь

$$m_1 = an + b, \quad m_2 = cn + d, \quad \frac{m_2 - d}{c} = n.$$

Теперь получаем

$$\Phi(z) = \Sigma A_{m_1, m_2} z^n.$$

Поэтому если мы разлагаем $\Phi(z)$ в ряд вида

$$\Phi(z) = \Sigma a_n z^n + \Sigma a_{-n} z^{-n},$$

то коэффициент A_{m_1, m_2} есть не что иное, как a_n при

$$m_1 = an + b, \; m_2 = cn + d.$$

Итак, нам нужно искать приближенное выражение для a_n при очень больших n и, следовательно, изучать особенности функции $\Phi(z)$.

95. Функция $\Phi(z)$ определена как интеграл по t вдоль окружности $|t| = 1$. Можно заменить эту окружность произвольным контуром C, удовлетворяющим все же некоторому условию.

Зафиксируем временно z и будем рассматривать $F(z, t)$ как функцию от t. Эта функция будет иметь некоторое число особых точек.

Необходимо, чтобы между окружностью $|t| = 1$ и контуром C не оказалось ни одной из этих особых точек.

Будем теперь изменять z непрерывным образом; эти особые точки будут непрерывно перемещаться. Если в то же время непрерывно деформировать контур C так, чтобы он никогда не проходил ни через одну особую точку, то функция $\Phi(z)$ останется голоморфной.

Следовательно, функция $\Phi(z)$ сможет перестать быть непрерывной только тогда, когда станет невозможным деформировать контур так, чтобы он не проходил ни через одну особую точку. Вот как это может произойти: представим себе, что при некотором значении z мы имеем две особые точки α и β, одну вне, а другую внутри контура C. Если при непрерывном изменении z одна из них, например α, попадает на контур C, то мы можем деформировать C, заставляя его, так сказать, убегать от этой подвижной особой точки, так что эта точка α не сможет никогда достигнуть контура. Таким образом, α останется всегда вне C, а β — внутри C. Но предположим теперь, что α и β неограниченно сближаются; контур C, так сказать, по-

павший между двух огней, не сможет больше отступать перед этими двумя подвижными точками, и функция $\Phi(z)$ не будет больше голоморфной.

Следовательно, чтобы получить все особые точки функции $\Phi(z)$, достаточно записать условие совпадения двух особых точек функции $F(z, t)$, рассматриваемой как функция t.

Ряд

$$\Phi(z) = \Sigma a_n z^n + \Sigma a_{-n} z^{-n}$$

будет сходящимся в области, ограниченной двумя окружностями

$$|z| = R, \qquad |z| = r,$$

причем эти две окружности будут проходить через одну или несколько особых точек, которые я только что определил.

Но если мы хотим знать, какие из этих особых точек находятся на этих окружностях и определяют, следовательно, пределы сходимости нашего ряда, то необходимо более углубленное исследование.

Действительно, нам подходят не все особые точки и тому есть несколько причин.

Во-первых, функция $F(z, t)$ неоднозначна; если две особые точки α и β функции F, рассматриваемой как функции t, сливаются при некотором значении z, то для того, чтобы это значение было действительно особой точкой $\Phi(z)$, необходимо, чтобы α и β принадлежали одной и той же ветви F и, кроме того, чтобы эта ветвь была той же, которая фигурирует в интеграле вдоль C,

$$\frac{1}{2i\pi}\int F dt,$$

определяющем функцию Φ.

Кроме того, надо, чтобы эти две точки α и β, перед тем как слиться в одну, не находились по одну сторону от контура C.

Пусть H — путь, проведенный в плоскости z и идущий от точки z_0 модуля 1 к особым точкам z_1, определенным выше. Предположим, что мы следуем по этому пути из z_0 в z_1 и изучаем изменения $\Phi(z)$, беря за начальное значение

$$\Phi(z_0) = \Sigma a_n z_0^n + \Sigma a_{-n} z_0^{-n}.$$

Хотя функция $\Phi(z)$ может не быть и, вообще говоря, не является однозначной, частная ветвь $\Phi(z)$, которую мы имеем в виду, полностью определена, так как мы задали начальное значение и пройденный путь.

Теперь требуется узнать, является ли точка z_1 в действительности особой точкой *для этой частной ветви функции* $\Phi(z)$.

Поскольку функция $F(z, t)$ неоднозначна, надо изменять t не на плоскости, а на римановой поверхности S, имеющей столько же листов, сколько ветвей имеется у функции F (это число может быть бесконечным).

Когда z будет изменяться, следуя по пути H, особые точки будут перемещаться и риманова поверхность будет деформироваться. Контур C следует считать проведенным на этой римановой поверхности.

Этот контур при $z = z_0$ сведется к окружности $|t| = 1$, проведенной на одном из листов S; когда поверхность S деформируется, то надо также деформировать контур C так, чтобы на него не попадало ни одной особой точки. Тогда специальное, иногда весьма тонкое исследование позволит увидеть, находятся ли для значения z, близкого к z_1, две особые точки функции $F(z, t)$, сливающиеся в одну при $z = z_1$, по разные стороны от контура C, что является необходимым и достаточным условием того, чтобы точка $z = z_1$ была особой для рассматриваемой нами частной ветви функции $\Phi(z)$.

Как определить теперь, находится ли точка z_1 на одной из окружностей

$$|z| = R, \qquad |z| = r,$$

которые ограничивают область сходимости ряда

$$\Sigma a_n z^n + \Sigma a_{-n} z^{-n},$$

и, таким образом, от нее ли зависит приближенное значение, которое мы ищем?

Проведем путь H, идущий из точки z_0 модуля 1 в точку z_1, так что модуль z изменяется монотонно. Если точка принадлежит одной из двух наших окружностей, то она должна быть особой точкой для ветви $\Phi(z)$, определенной путем H, и это выясняется способом, который я только что объяснил.

Если точка z_1 удовлетворяет этому условию, то я скажу, что эта особая точка *допустимая*.

Теперь среди всех допустимых особых точек модуля, большего 1, те будут находиться на окружности $|z| = R$, у которых модуль будет самым маленьким.

Точно так же среди всех допустимых особых точек модуля, меньшего единицы, те будут находиться на окружности $|z| = r$, у которых модуль самый большой.

Я добавлю в заключение, что функция $\Phi(z)$ имеет несколько ветвей, которые переходят одна в другую, либо когда две ветви функции $F(z, t)$ переходят одна в другую, либо когда две из особых точек $F(z, t)$ обходят одна вокруг другой.

Я попытаюсь вначале определить особые точки $\Phi(z)$; я определю затем с помощью специального исследования, какие из них подходят к нашему случаю.

Отыскание особых точек

96. Ограничимся случаем движения в плоскости.

Пусть u и u' — эксцентрические аномалии, $\sin\varphi$ и $\sin\varphi'$ — эксцентриситеты, L^2 и L'^2 — большие оси, ϖ и ϖ' — долготы перигелиев. Будем

иметь

$$l = u - \sin\varphi \sin u, \qquad l' = u' - \sin\varphi' \sin u'.$$

Координаты первой планеты по отношению к большой оси ее эллипса и перпендикуляру, проведенному через фокус, будут

$$L^2(\cos u - \sin\varphi) \text{ и } L^2 \cos\varphi \sin u.$$

Таким образом, это будут вещественная и мнимая части выражения ξL^2, если положить

$$\xi = \cos u - \sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi \sin u.$$

Если положить также

$$\eta = \cos u' - \sin\varphi' + \sqrt{-1}\cos\varphi' \sin u',$$

то координаты второй планеты, отнесенные к тем же осям, что и координаты первой, будут вещественной и мнимой частями выражения

$$\eta L'^2 e^{\sqrt{-1}(\varpi' - \varpi)}.$$

Пусть

$$\beta = L'^2 L^{-2} e^{\sqrt{-1}(\varpi' - \varpi)},$$

пусть

$$\xi_0 = \cos u - \sin\varphi - \sqrt{-1}\cos\varphi \sin u,$$
$$\eta_0 = \cos u' - \sin\varphi' - \sqrt{-1}\cos\varphi' \sin u',$$
$$\beta_0 = L'^2 L^{-2} e^{\sqrt{-1}(\varpi' - \varpi)};$$

получим

$$L^2 F_1^0 = \frac{1}{\sqrt{(\xi - \beta\eta)(\xi_0 - \beta_0\eta_0)}}.$$

Особые точки функции $F(z, t)$ те же, что у функции F_1^0, поскольку $F(z,t)$ отличается от F_1^0 лишь степенью t, и точка $t = 0$, которая, впрочем, не войдет в рассмотрение, является уже особой точкой F_1^0.

Особыми точками F_1^0 будут те точки, для которых u и u' и, следовательно, ξ, η, ξ_0, η_0 перестанут быть однозначными функциями от l и l' и, следовательно, z и t; кроме того, те, для которых

$$\xi = \beta\eta \text{ или } \xi_0 = \beta_0\eta_0.$$

Я полагаю

$$x = e^{iu}, \qquad y = e^{iu'},$$

откуда

$$\cos u = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right), \qquad \cos u' = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right),$$
$$i \sin u = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right), \qquad i \sin u' = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right).$$

Из этого мы получаем

$$l = u - \frac{\sin\varphi}{2i}\left(x - \frac{1}{x}\right), \qquad l' = u' - \frac{\sin\varphi'}{2i}\left(y - \frac{1}{y}\right)$$

и

$$e^{il} = xe^{\frac{\sin\varphi}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)}, \qquad e^{il'} = ye^{\frac{\sin\varphi'}{2}\left(\frac{1}{y} - y\right)}.$$

Затем получим

$$t = e^{\frac{il}{c}} = x^{\frac{1}{c}} e^{\frac{\sin\varphi}{2c}\left(\frac{1}{x} - x\right)}, \qquad z = e^{icl'} t^{ca} = y^c x^a e^{\omega},$$

полагая для краткости

$$\omega = \frac{a\sin\varphi}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right) + \frac{c\sin\varphi'}{2}\left(\frac{1}{y} - y\right).$$

С другой стороны, будем иметь

$$\xi = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - \sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right),$$
$$\eta = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right) - \sin\varphi' + \frac{\cos\varphi'}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right).$$

Особые точки $F(z, t)$ даются уравнениями

$$\frac{dl}{du} = 1 - \sin\varphi\cos u = 0,$$
$$\frac{dl'}{du'} = 1 - \sin\varphi'\cos u' = 0;$$
$$H = \xi - \beta\eta = 0,$$
$$H_0 = \xi_0 - \beta_0\eta_0 = 0.$$

Мы можем переписать эти уравнения, используя переменные x и y; тогда эти уравнения станут алгебраическими; в самом деле, два первых запишутся в виде

$$2x - \sin\varphi\,(x^2 + 1) = 0, \tag{1}$$
$$2y - \sin\varphi'\,(y^2 + 1) = 0, \tag{2}$$

а два последних, после избавления от знаменателей, в виде

$$y\,[(x^2 + 1) - 2x\sin\varphi + \cos\varphi\,(x^2 - 1)] = \beta x\,[(y^2 + 1) - 2y\sin\varphi' + \cos\varphi'\,(y^2 - 1)], \tag{3}$$
$$y\,[(x^2 + 1) - 2x\sin\varphi - \cos\varphi\,(x^2 - 1)] = \beta_0 x\,[(y^2 + 1) - 2y\sin\varphi' - \cos\varphi'\,(y^2 - 1)]. \tag{4}$$

Чтобы найти особые точки $\Phi(z)$, достаточно записать условие совпадения двух особых точек функции $F(z, t)$.

Но это слияние может произойти двумя способами.

Либо особая точка, определенная одним из четырех уравнений $\frac{dl}{du} = 0$, $\frac{dl'}{du'} = 0$, $H = 0$, $H_0 = 0$, сливается с особой точкой, определенной другим из этих четырех уравнений: таким образом, мы получим особые точки первого рода функции $\Phi(z)$.

Либо две из особых точек, определенных одним из этих четырех уравнений, сливаются в одну. Таким образом, мы получим особые точки второго рода функции $\Phi(z)$.

Чтобы получить точки первого рода, достаточно попарно скомбинировать уравнения (1), (2), (3), (4). Мы видим, что эти точки никак не зависят от целых чисел a и c.

Чтобы получить точки второго рода, надо действовать следующим образом.

Пусть $f(z, t) = 0$ — одно из четырех уравнений (1), (2), (3), (4); чтобы выразить совпадение двух особых точек, определенных этим уравнением, достаточно написать

$$f = 0, \qquad \frac{df}{dt} = 0.$$

Если мы заменим переменные, выразив z и t, и, следовательно, f в виде функций от l и l', то получим

$$\frac{df}{dt} = \frac{-i}{\iota}\left(c\frac{df}{dl} - a\frac{df}{dl'}\right),$$

так что уравнение $df/dt = 0$ можно будет заменить уравнением

$$c\frac{df}{dl} - a\frac{df}{dl'} = 0$$

или еще

$$\frac{c}{1 - \sin\varphi\cos u}\frac{df}{du} - \frac{a}{1 - \sin\varphi'\cos u'}\frac{df}{du'} = 0.$$

Левые части уравнений (1) и (2) зависят лишь от u или же от u'; мы их можем не рассматривать; но мы имеем особые точки, которые даются двумя уравнениями

$$H = 0, \qquad \frac{dH}{dt} = 0$$

или двумя уравнениями

$$H_0 = 0, \qquad \frac{dH_0}{dt} = 0.$$

Мы имеем

$$H = \cos u - \sin\varphi + i\cos\varphi\sin u - \beta(\cos u' - \sin\varphi' + i\cos\varphi'\sin u').$$

Уравнение $dH/dt = 0$ может быть, таким образом, заменено следующим:

$$\frac{c(-\sin u + i\cos\varphi\cos u)}{1-\sin\varphi\cos u} + \frac{a\beta(-\sin u' + i\cos\varphi'\cos u')}{1-\sin\varphi'\cos u'} = 0$$

или

$$\frac{c[\cos\varphi(x^2+1)+(x^2-1)]}{2x-\sin\varphi(x^2+1)} + \frac{a\beta[\cos\varphi'(y^2+1)+(y^2-1)]}{2y-\sin\varphi'(y^2+1)} = 0. \qquad (5)$$

Аналогично уравнение $dH_0/dt = 0$ может быть заменено следующим:

$$\frac{c[-\cos\varphi(x^2+1)+(x^2-1)]}{2x-\sin\varphi(x^2+1)} + \frac{a\beta_0[-\cos\varphi'(y^2+1)+(y^2-1)]}{2y-\sin\varphi'(y^2+1)} = 0. \qquad (6)$$

Особые точки второго рода, таким образом, даются уравнениями (3) и (5) или же уравнениями (4) и (6); следовательно, в противоположность точкам первого рода они зависят от отношения целых чисел a и c.

Все особые точки $\Phi(z)$ находятся поэтому с помощью алгебраических уравнений. Эти алгебраические уравнения упрощаются, если предположить, что $\varphi' = 0$. Тогда можно предположить и что $\tilde{\omega}' = \tilde{\omega}$ и, следовательно, что $\beta_0 = \beta$.

Уравнение (1) не изменяется, уравнение (2) сводится к $y = 0$ и его можно больше не учитывать, уравнения (3) и (4) принимают вид

$$(x^2+1) - 2x\sin\varphi + \cos\varphi(x^2-1) = 2\beta xy, \qquad (3)$$

$$y[(x^2+1) - 2x\sin\varphi - \cos\varphi(x^2-1)] = 2\beta x. \qquad (4)$$

Уравнения (5) и (6) становятся следующими:

$$\frac{c[\cos\varphi(x^2+1)+(x^2-1)]}{2x-\sin\varphi(x^2+1)} + a\beta y = 0, \qquad (5)$$

$$\frac{c[-\cos\varphi(x^2+1)+(x^2-1)]}{2x-\sin\varphi(x^2+1)} - \frac{a\beta}{y} = 0. \qquad (6)$$

Комбинация уравнений (3) и (5) дает

$$\frac{2c[\cos\varphi(x^2+1)+(x^2-1)]}{2x-\sin\varphi(x^2+1)} + \frac{a[(x^2+1)-2x\sin\varphi+\cos\varphi(x^2-1)]}{x} = 0, \qquad (7)$$

а комбинация уравнений (4) и (6)

$$\frac{2c[-\cos\varphi(x^2+1)+(x^2+1)]}{2x-\sin\varphi(x^2+1)} - \frac{a[(x^2+1)-2x\sin\varphi-\cos\varphi(x^2-1)]}{x} = 0. \qquad (8)$$

Уравнения (7) и (8) дают значения x, соответствующие точкам второго рода; уравнение (1) дает значения x, соответствующие некоторым точкам первого рода.

Нам остается рассмотреть точки первого рода, определяемые уравнениями (3) и (4), поскольку уравнение (2) становится иллюзорным.

Уравнения (3) и (4) записываются в виде

$$\xi - \beta\eta = \xi_0 - \beta_0\eta_0 = 0.$$

Если они удовлетворяются одновременно, то мы имеем

$$\xi\xi_0 = \beta\beta_0\eta\eta_0 = \beta^2.$$

Но

$$\xi\xi_0 = (1 - \sin\varphi\cos u)^2.$$

Таким образом получаем

$$1 - \sin\varphi\cos u = \pm\beta,$$

так что значения x, соответствующие такому роду особых точек, даются двумя уравнениями

$$2x - \sin\varphi\,(x^2 + 1) = 2\beta x, \tag{9}$$

$$2x - \sin\varphi\,(x^2 - 1) = -2\beta x. \tag{10}$$

Значения x, соответствующие особым точкам, мы будем находить из пяти уравнений (1), (7), (8), (9) и (10). Заметим, что уравнения (1), (9) и (10) возвратны и что уравнения (7) и (8) переходят одно в другое при замене x на $1/x$. Итак, если x — особая точка, то и $1/x$ также будет особой точкой. Это было нетрудно предвидеть.

Если положить $\varphi = 0$, то наши уравнения сведутся к $x = 0$, следовательно, когда φ стремится к нулю, корни уравнений (1), (7) и (8) стремятся к нулю или к бесконечности.

Если положить

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \tau,$$

то уравнения (3) — (8) соответственно принимают вид

$$y = \frac{(x-\tau)^2}{\beta(1+\tau^2)x},$$

$$y = \frac{\beta(1+\tau^2)x}{(1-x\tau)^2},$$

$$\frac{c(x+\tau)}{1-\tau x} + a\beta y = 0,$$

$$\frac{c(1+x\tau)}{x-\tau} + \frac{a\beta}{y} = 0,$$

$$\frac{c(x+\tau)}{1-\tau x} + \frac{a(x-\tau)^2}{(1+\tau^2)x} = 0,$$

$$\frac{c(1+\tau x)}{x-\tau} + \frac{a(1-\tau x)^2}{(1+\tau^2)x} = 0.$$

С другой стороны, уравнение (1) дает нам решение

$$x = \tau, \qquad x = \frac{1}{\tau}.$$

Когда φ и τ очень малы, мы видели, что значения x очень малы или очень велики, и поскольку уравнения не изменяются при замене x на $1/x$, мы должны прийти к выводу, что имеется ровно столько же очень малых значений, сколько и очень больших.

Наши уравнения и соответствующие значения x немного упрощаются, если, предполагая φ очень малым, пренебречь квадратом этой величины.

Уравнения (1), (9) и (10) тогда дают нам соответственно для x три очень малых значения, приближенно равные

$$x = \frac{\varphi}{2}, \qquad x = \frac{\varphi}{2}\frac{1}{1-\beta}, \qquad x = \frac{\varphi}{2}\frac{1}{1+\beta}, \tag{11}$$

и три очень больших значения — приближенно равные

$$x = \frac{2}{\varphi}, \qquad x = \frac{2(1-\beta)}{\varphi}, \qquad x = \frac{2(1+\beta)}{\varphi}. \tag{11bis}$$

Уравнение (7) дает два очень малых значения, определенные приближенно уравнением

$$4x^2(a+c) + 2x\varphi(c-2a) + a\varphi^2 = 0, \tag{12}$$

и одно очень большое значение, равное приближенно

$$x = \frac{2}{\varphi}\frac{a+c}{a}. \tag{13bis}$$

Из уравнения (8) находим два очень больших значения, определяемых уравнением

$$4(a+c) + 2x\varphi(c-2a) + ax^2\varphi^2 = 0, \tag{12bis}$$

и одно очень малое, которое записывается в виде

$$x = \frac{\varphi}{2}\frac{a}{a+c}. \tag{13}$$

Легко проверить, что корни уравнений (12) и (12bis) вещественны при $c/a < 0$. Итак, если c и a имеют противоположные знаки, а φ достаточно мало, то корни уравнений (7) и (8) вещественны.

После того как мы определили таким образом значения x, соответствующие различным особым точкам, остается определить значения y и z.

Прежде всего я замечу, что если имеем особую точку, соответствующую некоторым значениям x, y и z, то обратные величины $1/x$, $1/y$ и $1/z$ будут соответствовать другой особой точке, которую я назову *обратной* к первой. В самом деле, наша система уравнений не изменяется при замене x, y, z на $1/x$, $1/y$, $1/z$, и это, впрочем, легко было предвидеть.

Значения x и y будут определяться следующими парами уравнений: (1), (3); (1), (4); (7), (3); (8), (4); (9), (3) или (4); (10), (3) или (4).

Из этих уравнений мы видим, что если φ очень мало и может рассматриваться как бесконечно малая величина первого порядка, то y очень мало, если x очень мало, и очень велико, если x очень велико.

С другой стороны, мы имеем

$$z = y^c x^a e^{\frac{a \sin \varphi}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)}$$

Если φ — бесконечно малая величина первого порядка, то x бесконечно малая (или бесконечно большая) того же порядка; то же верно и для y; тогда показатель $\frac{a \sin \varphi}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)$ конечен, следовательно, z — бесконечно малая (или бесконечно большая) величина порядка $a + c$.

Среди особых точек я выделю ту, которая определяется равенством $x = \tau$ (решение уравнения (1)) и уравнением (3).

Действительно, для этой точки y и z равны нулю.

Точно так же для точки, обратной предыдущей и определяемой равенством $x = 1/\tau$ (другое решение уравнения (1)) и уравнением (4), значения y и z бесконечны.

Поэтому в дальнейшем мы не будем заниматься исследованием этих двух особых точек.

Исследование

97. Остается разрешить следующий вопрос.

У меня всего четырнадцать особых точек, семь из которых соответствуют очень малым значениям x и y, а семь — очень большим.

С другой стороны, семь из этих точек соответствуют очень малым значениям z, а семь — очень большим. Требуется определить, для какой из семи первых точек модуль z самый большой (это нам в то же время позволит узнать, какой из семи других точек соответствует самый малый модуль z, поскольку значения z попарно обратны, так же как значения x и y).

Если соответствующие особые точки допустимы, то именно они определяют окружности

$$|z'_1| = R, \quad |z| = r \qquad \left(\text{здесь } R = \frac{1}{r}\right).$$

Чтобы не удлинять исследование изучением слишком большого числа различных частных случаев, я сделаю несколько частных предположений. Я предположу, что

$$\beta > 1.$$

Предположу также, что отношение a/c близко к отношению средних движений с противоположным знаком, т. е. что приближенно выполняется равенство

$$an + cn' = 0,$$

где n и n' — средние движения. Действительно, наиболее интересны те члены, которые соответствуют малым делителям.

Таким образом, приближенно имеем

$$\frac{c}{a} = -(\beta)^{\frac{3}{2}};$$

это показывает, что c и a имеют противоположные знаки. Я предположу, например, что c положительно, а a отрицательно; поскольку β больше 1, $c + a$ будет положительно.

Благодаря этим предположениям, все значения x вещественны.

Это позволит нам дать простую геометрическую картину, которая облегчит исследование. Мы представляем каждую особую точку точкой плоскости с прямоугольными координатами x и y.

Я сделал два рисунка (рис. 2 и 3); первый представляет квадрант плоскости, заключенный между положительной частью оси x и положительной частью оси y, а второй — квадрант, заключенный между отрицательными частями оси x и оси y.

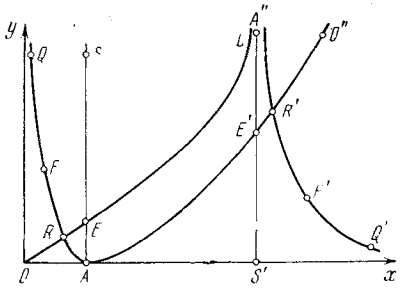


Рис. 2

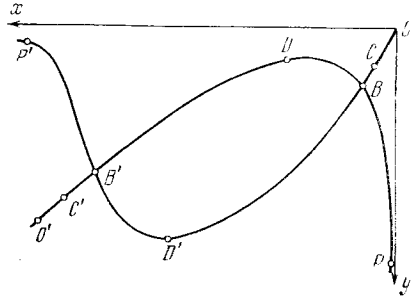


Рис. 3

Прямые AS и $A'S'$ имеют соответственно уравнения

$$x = \tau, \qquad x = \frac{1}{\tau}.$$

Две ветви кривой $C'B'DBP$ и $QFAE'R'$ имеют уравнение

$$y = \frac{(x-\tau)^2}{\beta(1+\tau^2)x},$$

т. е. уравнение (3) предыдущего пункта; две ветви кривой

$$B'D'BCOREL \text{ и } R'F'Q'$$

имеют уравнение (4) предыдущего пункта

$$y = \frac{\beta(1+\tau^2)x}{(1-\tau x)^2}.$$

Различные особые точки представлены на рисунках следующими точками:

A . . . . . уравнения (1) и (3) ($x = \tau$)*
B . . . . . (9), (3), и (4) [2-е уравнение (11)],
C . . . . . (8) и (4) [(13)],
D . . . . . (7) и (3) [(12), отрицательный корень],
E . . . . . (1) и (4) ($x = \tau$),
F . . . . . (7) и (3) [(12), положительный корень],
R . . . . . (10) (3) и (4) [3-е уравнение (11)]

и точками A', B', C', D', E', F' и R', соответственно обратными предыдущим.

Легко проверить, что если φ достаточно мало, то действительно точки расположены в порядке, указанном на рисунках, т. е. их абсциссы возрастают при обходе точек в порядке C', B', D', D, B, C, F, R, E, E', R', F'.

Сравним значения z, соответствующие этим различным точкам. Прежде всего видно, что для точек рис. 2 (где $x > 0$, $y > 0$) z вещественно и положительно и что для точек рис. 3 (где $x < 0$, $y < 0$) аргумент z равен $(c + a)\pi$, а аргумент $z^{\frac{1}{c}}$ равен $(1 + a/c)\pi$. Остается посмотреть, как изменяется модуль z. Если идти вдоль кривой (3) или (4), то максимумы и минимумы $|z|$ соответствуют точкам касания кривых (3) и (4) с кривыми

$$z = y^c x^a e^{\frac{a \sin\varphi}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)} = \text{const},$$

т. е. точкам C', D, F, A для кривой (3) и точкам D', C, F' для кривой (4).

Вот картина изменения $|z|$.

1. Когда мы следуем вдоль кривой (3)

В O'	$\lvert z\rvert = 0$
Из O' в C' . . .	возрастает
В C'	max
Из C' в D . . .	убывает
В D	min
Из D в P . . .	возрастает
В P	$\lvert z\rvert = \infty$

В Q	$\lvert z\rvert = 0$
Из Q в F . . .	возрастает
В F	max
Из F в A . . .	убывает
В A	$\lvert z\rvert = 0$
Из A в O'' . . .	возрастает
В O''	$\lvert z\rvert = \infty$

* Здесь и ниже в этом пункте все обозначения уравнений относятся к п. 96 (*Прим. ред*).

2. Когда мы следуем вдоль кривой (4)

В P' . . . . . $\|z\| = 0$	В O . . . . . $\|z\| = 0$
Из P' в D' . . . возрастает	Из O в L или в A' ... возрастает
В D' . . . . . max	В A' . . . . . $\|z\| = \infty$
Из D' в C . . . убывает	Из A' в F' . . . убывает
В C . . . . . min	В F' . . . . . min
Из C в O . . . возрастает	Из F' в Q' . . . возрастает
В O . . . . . $\|z\| = \infty$	В Q' . . . . . $\|z\| = \infty$

Отсюда заключаем, что z в точке B больше, чем в точке C, а z в точке E больше, чем в точке R.

Точно так же значение z в точке D меньше, чем в точке B, а z в точке R меньше, чем в точке F.

Мы видели, что поскольку функция $F(z, t)$ неоднозначна, то контуры интегрирования надо проводить на соответствующей римановой поверхности с бесконечным числом листов. Чтобы избежать рассмотрения этой римановой поверхности, можно сделать замену переменных. Заметим, в самом деле, что квадрат F_1^0 — однозначная функция x и y и что, следовательно, квадрат $F(z, t)$ — однозначная функция $x^{1/c}$ и $z^{1/c}$.

Итак, если мы условимся придать определенное значение $z^{1/c}$, которое мы рассматриваем временно как постоянное, то одной точке плоскости $x^{1/c}$ будут соответствовать только два противоположных значения $F(z, t)$. Мы сможем тогда провести наши контуры интегрирования на плоскости $x^{1/c}$.

Дадим сперва $z^{1/c}$ начальное значение ζ_0, модуль которого равен 1.

Определяя $\Phi(z)$, мы условились, что контур интегрирования, вдоль которого берется интеграл

$$\Phi(z) = \int F(z, t)\, dt,$$

должен сводиться к окружности $|t| = 1$ для значений z с модулем 1.

Для $z^{1/c} = \zeta_0$ мы должны, следовательно, за контур интегрирования принять в плоскости t окружность $|t| = 1$ и в плоскости $x^{1/c}$ окружность $|x^{1/c}| = 1$.

Итак, вот правило, позволяющее узнать, допустима ли особая точка функции $\Phi(z)$. Пусть α_i — значение $x^{1/c}$ и ζ_i — значение $z^{1/c}$, соответствующие этой особой точке. Предположим, например, что модуль ζ_i меньше 1; как мы знаем, половина особых точек $\Phi(z)$ имеет модуль меньше 1. Мы будем изменять $z^{1/c}$ следующим образом: его аргумент должен оставаться постоянным и равным аргументу ζ_i, а его модуль будет возрастать от $|\zeta_i|$ до 1. Другими словами, точка $z^{1/c}$ опишет отрезок прямой Δ, ограниченный точками ζ_i и $\zeta_i/|\zeta_i|$.

Для каждого из значений $z^{1/c}$ функция $F(z, t)$, рассматриваемая как функция от $x^{1/c}$, имеет некоторое число особых точек; при $z^{1/c} = \zeta_i$ две из этих особых точек сливаются в одну точку α_i. Когда $z^{1/c}$ пробегает пря-

мую Δ, эти две особые точки изменяются непрерывным и вполне определенным образом. Когда $z^{1/c}$ достигает конечного значения $\zeta_i/|\zeta_i|$, то конечные положения этих двух особых точек могут оказаться либо оба внутри, либо оба вне окружности $|x^{1/c}| = 1$, и тогда рассматриваемая точка недопустима; либо же конечное положение одной точки — внутри, а другой — вне этой окружности, и тогда рассматриваемая точка допустима.

Функция $F(z, t)$ умножается на корень c-й степени из единицы, когда $x^{1/c}$ умножается на корень c-й степени из единицы.

Предположим теперь, что для данного значения $z^{1/c}$ точка

$$x^{\frac{1}{c}} = \gamma$$

— особая точка функции $F(z, t)$, рассматриваемой как функция от $x^{1/c}$. Тогда особыми будут также точки

$$x^{\frac{1}{c}} = \gamma e^{\frac{2i\pi}{c}}, \quad x^{\frac{1}{c}} = \gamma e^{\frac{4i\pi}{c}}, \quad \ldots, \quad x^{\frac{1}{c}} = \gamma e^{\frac{2(c-1)i\pi}{c}}.$$

Мы видели, что значения x, соответствующие особым точкам $\Phi(z)$, все вещественны и, следовательно, их аргумент равен 0 или π. Соответствующие значения $x^{1/c}$ будут поэтому иметь аргумент $k\pi/c$, где k — целое число. Итак, если α_i — одно из этих значений, то я могу написать

$$\alpha_i = \alpha_i' e^{\frac{2ki\pi}{c}},$$

где аргумент α_i' равен 0 или π/c, а k — целое число.

Если α_i соответствует особой точке функции $\Phi(z)$, т. е. двум слившимся особым точкам функции $F(z, t)$, то это же верно и для α_i'.

Я утверждаю, что для того, чтобы точка α_i была допустимой, необходимо и достаточно, чтобы точка α_i' была допустимой.

Действительно, применим правило: когда точка $z^{1/c}$ будет пробегать прямую Δ, две особые точки, первоначально слившиеся в α_i, будут иметь конечные положения в γ и γ'; точно так же две особые точки, первоначально слившиеся в α_i', будут иметь конечные положения

$$\gamma e^{-\frac{2ki\pi}{c}} \quad \text{и} \quad \gamma' e^{-\frac{2ki\pi}{c}}.$$

Очевидно, для доказательства сформулированной теоремы достаточно заметить, что

$$|\gamma| = \left|\gamma e^{-\frac{2ki\pi}{c}}\right|, \quad |\gamma'| = \left|\gamma' e^{-\frac{2ki\pi}{c}}\right|.$$

Итак, достаточно будет исследовать особые точки, соответствующие вещественным положительным значениям $x^{1/c}$, т. е. точкам F, R и A ри-

сунка, и особые точки, соответствующие значению π/c аргумента $x^{1/c}$, т. е. точкам B, D и C рисунка.

Точка E недопустима; *действительно, соответствующее значение α_i равно*

$$\alpha_i = \tau^{\frac{1}{c}};$$

когда точка $z^{1/c}$ будет пробегать прямую Δ, две особые точки, первоначально слившиеся в α_i, останутся вещественными. Каждой из них будет соответствовать одно значение x и одно значение y и, следовательно, одна изображающая точка на нашем рисунке.

Одна из этих изображающих точек будет пробегать тогда прямую ES, а другая — кривую EL.

Итак, одна из особых точек останется неподвижной и равной $\tau^{1/c}$ и будет, следовательно, всегда иметь модуль меньше 1.

Начальное значение ζ_i величины $z^{1/c}$ вещественно и положительно; следовательно, прямая Δ будет частью вещественной оси, а конечное значение $\zeta_i/|\zeta_i|$ будет равно 1.

Другая особая точка (соответствующая изображающей точке, которая пробегает кривую EL) имеет положительное вещественное значение, которое я обозначу γ; требуется определить, будет ли γ больше или меньше 1.

Когда эта изображающая точка описывает кривую EL от E до L, модуль z возрастает от некоторого очень малого значения до бесконечности; следовательно, он пройдет в точности один раз через значение единица. Требуется показать, что соответствующее значение γ^2 величины x меньше 1. Для этого достаточно показать, что когда абсцисса x этой изображающей точки достигает значения 1, то $|z|$ будет больше 1.

Но мы находим, что при $x = 1$

$$z = y^c x^a e^{\frac{a \sin\varphi}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)} = y^c.$$

Следовательно, остается доказать, что $y > 1$.

Но очевидно, что

$$y = \frac{\beta(1+\tau^2)}{(1-\tau^2)} > 1.$$

Таким образом, $\gamma < 1$. Итак, точка E недопустима, что и требовалось доказать.

Точка F недопустима; в этом случае прямая Δ также будет частью вещественной оси, поскольку ζ_i будет вещественна. Особые точки, первоначально слившиеся в α_i, не останутся вещественными, но они останутся комплексно-сопряженными, следовательно, они имеют один и тот же модуль, таким образом, невозможно, чтобы, когда $z^{1/c}$ достигнет конечного значе-

ния $\zeta_i/|\zeta_i| = 1$, одна из этих точек была больше 1, а другая — меньше 1 по абсолютной величине, что и требовалось доказать.

Однако нам полезно знать, будет ли общий модуль этих двух особых точек больше или меньше 1, когда $z^{1/c}$ достигнет конечного значения 1. Поскольку он первоначально был меньше 1, то он может перестать быть меньше 1, лишь пройдя через значение 1. Следовательно, необходимо, чтобы для комплексного значения x с модулем 1 величина $z^{1/c}$ имела вещественное положительное значение.

Итак, проведем в плоскости x линии равного аргумента функции

$$z = \frac{(x-\tau)^{2c}}{[\beta(1+\tau^2)x]^c} x^a e^{\frac{a\sin\varphi}{2}\left(\frac{1}{x}-x\right)}.$$

Эти линии представлены на рис. 4, по крайней мере в той части плоскости, которая только нас и интересует — в окрестности точки O.

Замечательными точками являются точка $x = 0$, соответствующая точке O рис. 2, точка $x = \tau$, соответствующая точке A, и две точки, соответствующие точкам D и F. Эти точки, впрочем, обозначены на рис. 4 теми же буквами.

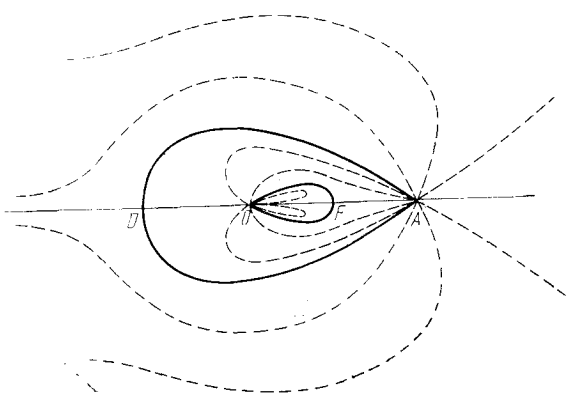


Рис. 4

Некоторые линии равного аргумента, а именно те, которые рассматриваются как замечательные, обозначены сплошной чертой. Это, с одной стороны, вещественная ось и, с другой стороны, линии, идущие из точки O к точке F и из точки A к точке D. Другие линии равного аргумента, которые оканчиваются либо в точке O, либо в точке A, либо в обеих, обозначены пунктиром.

Когда точка $z^{1/c}$ будет пробегать прямую Δ, точка x будет описывать кривую, обозначаемую сплошной линией FO нашего рис. 4.

Вторая изображающая точка описывает DB'; я утверждаю, что конечное значение $|x|$ больше 1. Для этого надо показать, что при $x < 1 |z| = 1$, но при $x = -1$

$$|z| = |y|^c, \qquad |y| = \frac{(1+\tau)^2}{\beta(1+\tau^2)} < 1 \qquad \text{(если } \tau \text{ достаточно мало).}$$

Из наших трех конечных абсолютных величин две меньше 1, а одна больше 1.

Следовательно, точка допустима, что и требовалось доказать. Таким образом, из шести точек B,C,D,E,F,R только точка D допустима.

Точно так же из шести обратных точек B',C',D',E',F',R' лишь точка D' допустима.

Итак, если один из эксцентриситетов достаточно мал, а другой равен нулю, наклонение орбит равно нулю, большая ось круговой орбиты больше, чем большая ось эллиптической орбиты; если отношение $-c/a$ мало отличается от отношения средних движений, то точки D и D' определяют радиусы сходимости r и $R = 1/r$.

Чтобы облегчить понимание этого исследования, я сделал пятый чертеж, где изобразил изменение особых точек, взяв за абсциссу ось x, если x вещественно, и $|x|$, если x комплексно, а за ординату — $|z|$. Я изобразил, однако, лишь те особые точки, которые играют роль в нашем исследовании. Прямые, проведенные штрих-пунктирной линией, — оси координат $x = 0$ и $|z| = 0$ и прямые $x = +1$, $|z| = 1$.

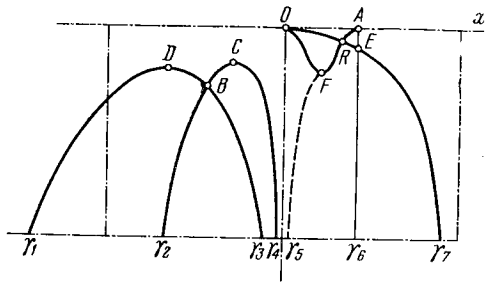


Рис. 5

Кривые, проведенные сплошной линией, изображают изменение вещественных особых точек, а кривые, проведенные пунктиром,— изменение комплексных особых точек. В соответствии со сделанными выше допущениями, каждая из точек этих пунктирных кривых изображает две комплексно-сопряженные особые точки.

Различные замечательные точки обозначены теми же буквами, что и соответствующие точки на предыдущих чертежах. Чтобы найти различные конечные значения, к которым приходим, двигаясь из той или иной осо-

бой точки, надо следовать вдоль сплошных или пунктирных кривых, *двигаясь всегда вниз* (поскольку на чертеже положительная ось $|z|$ направлена вниз) до прямой $|z| = 1$. Таким образом, находим:

Для точки	D	конечные	значения	равны	γ_1, γ_2 и γ_3,
»	»	B	»	»	»	γ_2 и γ_3,
»	»	C	»	»	»	γ_2, γ_3 и γ_4,
»	»	F	»	»	»	γ_5,
»	»	R	»	»	»	γ_5, γ_6 и γ_7,
»	»	E	»	»	»	γ_6 и γ_7.

Я напомню, что γ_5 изображает два комплексно-сопряженных конечных значения. Мы видим, что все найденные конечные значения, кроме γ_1, меньше 1 по абсолютной величине.

Исследование в общем случае

98. Недостаток места не позволяет мне провести исследование в самом общем случае; однако я могу в нескольких словах наметить путь, которым оно должно быть проведено.

Если мы будем изменять элементы орбит непрерывным образом, то особые точки функции $\Phi(z)$ будут также изменяться непрерывным образом. Предположим, что мы изменяем эти элементы так, что орбиты остаются вещественными и ни в какой момент не пересекаются в вещественной точке, так что ни в один момент особые точки функции $\Phi(z)$ не сливаются. Рассмотрим особую точку функции $\Phi(z)$; она будет непрерывно изменяться, и поскольку мы предположили, что она никогда не сливается ни с одной другой точкой, то можно проследить за ее изменениями, не опасаясь неоднозначности.

Я утверждаю, что если эта точка допустима в некоторый момент, то она всегда останется допустимой, и обратно, за исключением одного случая, к которому мы еще вернемся.

Действительно, допустимость особой точки равносильна тому, что среди конечных значений x, соответствующих этой точке, имеются такие, модуль которых больше 1, и другие, модуль которых меньше 1.

Здесь, однако, необходимо некоторое уточнение. Действительно, в частном случае, рассмотренном в предыдущем пункте, $F(z, t)$ была однозначной функцией $z^{1/c}$ и $x^{1/c}$, что позволило нам изобразить особые точки $F(z, t)$ на плоскости $x^{1/c}$.

В общем случае дело обстоит иначе, и такое простое представление становится невозможным. Надо изображать особые точки функции $F(z, t)$ (рассматриваемой как функция от t) на специальной римановой поверхности, обозначенной мною выше через S.

Эту поверхность можно определить следующим образом. Имеем

$$z = x^a e^{\frac{a \sin \varphi}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)} y^c e^{\frac{c \sin \varphi'}{2}\left(\frac{1}{y} - y\right)}. \tag{1}$$

Если мы зафиксируем z, то это уравнение будет определять соотношение между x и y, которому удовлетворяет бесконечное число систем значений x и y, или же $x^{1/c}$ и $y^{1/c}$. Каждую из этих систем значений можно назвать аналитической точкой. Каждой точке римановой поверхности будет соответствовать одна и только одна из этих аналитических точек, и обратно.

Когда мы станем изменять z, риманова поверхность S также будет изменяться, потому что особые точки функции $F(z, t)$ перемещаются.

Пусть S_0 — значение S, когда модуль z становится равным единице. Мы сможем провести на поверхности S_0 окружность, которую я обозначу C_0 и уравнение которой

$$|x| = |y| = 1.$$

(В самом деле, если придать x произвольное значение с модулем 1, то всегда можно выбрать значение y, также имеющее модуль 1, так что z будет иметь любое наперед заданное значение с модулем 1.)

Окружность C_0 делит риманову поверхность S_0 на две области. Ту из двух областей, которая содержит соседние с C_0 точки с $|x| < 1$, я обозначу R_0, а другую — R_0'.

Итак, предположим, что точка $z^{1/c}$ пробегает прямую Δ из предыдущего пункта, и пусть мы изучаем изменения особых точек функции $F(z, t)$. Когда z изменяется, эти точки перемещаются по поверхности S, в то время как поверхность S сама изменяется. Две из этих точек, первоначально слившиеся в одну (которая является особой точкой функции $\Phi(z)$), разделяются; когда модуль z достигает значения 1, а S сводится к S_0, они достигают на этой поверхности S_0 конечных положений. (Исследование предыдущего пункта нам показало, что существуют случаи, когда одна из этих особых точек сама разделяется на две другие; тогда имеются два конечных положения, но то, что я скажу, все равно остается применимым.) Если все конечные положения принадлежат одной и той же из двух ограниченных окружностью C_0 областей на поверхности S_0, то соответствующая особая точка функции $\Phi(z)$ недопустима; в противном случае она допустима.

Отметим небольшое отличие этой формулировки от той, которая была дана первоначально и соответствует частному случаю, указанному в предыдущем пункте. Аффиксы двух рассматриваемых особых точек могут быть по абсолютной величине один — больше, а другой — меньше единицы, но эти две точки могут тем не менее принадлежать одной и той же из двух указанных выше областей, если они не принадлежат одному и тому же листу римановой поверхности.

Я утверждаю теперь, что при изменении элементов двух орбит особая точка, которая сначала была допустимой, не может, вообще говоря, стать недопустимой, и обратно. В самом деле, рассмотрим изменения поверхности S_0 и изменения значений, которые мы назвали конечными. Для того чтобы особая точка действительно перестала быть допустимой или стала ею, надо, чтобы соответствующее конечное значение пересекло окружность C_0, чтобы перейти из одной области в другую. Но каков же смысл уравнений этой окружности C_0

$$|x| = |y| = 1? \tag{2}$$

Они означают, что обе эксцентрические аномалии вещественны. Каждой точке M римановой поверхности S, и в частности поверхности S_0, соответствует пара точек P и P', лежащих на орбитах и определенных значениями эксцентрических аномалий, или, что то же самое, значениями x и y. Если точка M находится на окружности C_0, то точки P и P' *вещественны*. Точка M может быть особой лишь в том случае, когда расстояние PP' равно нулю или же когда одна из точек находится на нулевом расстоянии от Солнца. Второе обстоятельство не может представиться в случае, когда точки P и P' вещественны; первое также не может представиться, если, как мы предположили, орбиты не пересекаются ни в одной вещественной точке.

Таким образом, невозможно, чтобы точка окружности C_0 была особой, т. е. чтобы одно из конечных значений достигло окружности; другими словами, чтобы особая точка функции $\Phi(z)$ приобрела или потеряла свойство допустимости.

Остается, однако, рассмотреть один случай, когда это рассуждение не проходит. Я предполагаю, что точка $z^{1/c}$ пробегает прямую Δ, и мы изучаем соответствующие изменения особых точек функции $F(z, t)$. Вначале две из этих точек слились в одну и, следовательно, совпадают с особой точкой A функции $\Phi(z)$; затем они разделяются; пусть α — одна из этих точек; может случиться (и мы видели примеры этому в предыдущем пункте), что для некоторого значения z точка α сливается с другой особой точкой функции $F(z, t)$ (вообще говоря, отличной от той, с которой она совпадала вначале) и, следовательно, с особой точкой B функции $\Phi(z)$. Затем они разделяются, так что особая точка A имеет не два, а три конечных значения.

В этом случае для краткости я буду говорить, что точка B подчинена точке A; для этого надо, чтобы значение z в точке B имело тот же аргумент, что и значение z в точке A, а его модуль был ближе к единице, чем в точке A.

Пусть теперь A и B — две особые точки функции $\Phi(z)$ и предположим, что их z первоначально имели различные аргументы. Будем непрерывно изменять элементы двух орбит и, следовательно, точки A и B; если в некоторый момент точка B становится подчиненной точке A, то может слу-

читься, что в этот момент вопреки общему правилу, сформулированному выше, точка A становится допустимой или перестает ею быть.

Посмотрим, как это может произойти. Заметим сначала, что значения x, соответствующие особым точкам функции $\Phi(z)$, определяются из алгебраических уравнений. Если точки A и B определены, таким образом, одним и тем же неприводимым уравнением, я скажу, что они имеют одну природу, а в противном случае — различную. Нетрудно видеть, что если точки A и B различной природы, то точка B может стать подчиненной точке A; при этом последняя не потеряет и не приобретет свойства допустимости.

Теперь я предположу, что точки A и B одной природы. Если точка B недопустима, то она может стать подчиненной точке A, причем последняя не станет допустимой и не перестанет ею быть. Если, напротив, точка B допустима, то в общем случае может случиться, что в момент, когда B станет подчиненной A, точка A перестанет быть допустимой, если до этого она была таковой или же станет допустимой, если она не была допустимой. При этом точка B всегда сохраняет свойство допустимости или недопустимости.

Итак, предыдущие рассуждения позволяют нам определить, какие из точек допустимы, непрерывно изменяя элементы орбит и следуя за изменениями особых точек. При этом можно либо ограничиться таким изменением элементов, при котором две особые точки ни в один момент не имеют z с одним и тем же аргументом (чтобы избежать исследования, необходимого для определения того, действительно ли они подчинены одна другой), либо не ограничивать изменения элементов, но проводить исследование подчиненности особых точек.

Можно изменять не только элементы орбит, но и отношение c/d, отвлекаясь при этом от того, что оно должно быть рациональным; последнее мы предполагали лишь в очень частных целях, не имеющих никакого отношения к изучению допустимости особых точек. Для того чтобы только что сказанное нами было применимо, это отношение c/d должно все же оставаться вещественным и не проходить ни через 0, ни через бесконечность.

Итак, для того чтобы можно было применить предыдущие рассуждения, достаточно знать, какие особые точки допустимы для некоторых значений элементов. Таким образом, того, что я говорил в предыдущем пункте по поводу частного случая, нам, по-видимому, достаточно; однако в этом частном случае некоторые особые точки оказывались либо 0, либо бесконечностью, и я на них не останавливался в нашем исследовании. Поэтому мне необходимо добавить еще несколько слов.

Предположим вначале, что оба эксцентриситета конечны, а наклонение остается нулевым. Пусть

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\tau,\qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi'}{2}=\tau'.$$

Особые точки функции $F(z, t)$ будут тогда определены следующими уравнениями:

$$x = \tau, \quad x = \frac{1}{\tau}, \quad y = \tau', \quad y = \frac{1}{\tau'},$$

$$\frac{y(x-\tau)^2}{1+\tau^2} = \beta x \frac{(y-\tau')^2}{1+\tau'^2}, \tag{3}$$

$$y\frac{(1-\tau x)^2}{1+\tau^2} = \beta_0 x \frac{(1-\tau' y)^2}{1+\tau'^2}. \tag{4}$$

Кривые (3) и (4) третьего порядка; для того чтобы они были вещественными, необходимо и достаточно, чтобы большие оси двух орбит совпадали, т. е. чтобы разность $\varpi - \varpi'$ была равна 0 или π.

Предположим, что $\varpi = \varpi'$, тогда на кривой (3) будет двойная точка

$$x = \tau, \quad y = \tau'.$$

Если τ' очень мало, то кривая будет иметь три ветви: первая, которую я обозначу γ_1, будет мало отличаться от ветви $B'DBP$ рис. 3; вторая, которую я обозначу γ_2, пройдет через начало и через двойную точку. Она будет вначале асимптотически приближаться к отрицательной оси x и будет очень близка к ней; затем, пройдя через двойную точку, она будет мало отличаться от ветви AO'' рис. 2. Третья ветвь, которую я обозначу γ_3, будет асимптотически приближаться к оси y; она очень мало отличается вначале от ветви QRA рис. 2, затем проходит через особую точку и очень близка к оси x, к которой она асимптотически приближается. Отныне я буду говорить, что две точки обратны, если они переходят одна в другую при замене x на $1/x$, y на $1/y$, z на $1/z$ и $\sqrt{-1}$ на $-\sqrt{-1}$. Две кривые (3) и (4) тогда обратны друг другу. Если $\varpi = \varpi'$ и, следовательно, наши кривые вещественны, то это определение не отличается от определения предыдущего пункта.

В качестве особых точек мы имеем.

1. Пересечения кривых (3) и (4), очень мало отличающиеся от точек B, B', R, R' рис. 2 и 3 и которые я по-прежнему могу обозначать теми же буквами. Мы видели, что они недопустимы.

2. Пересечения $x = \tau$ и кривой (4); $x = 1/\tau$ и кривой (3), мало отличающиеся от точек E и E' рис. 2; они также недопустимы.

3. Три точки, расположенные на кривой (3) и очень мало отличающиеся от точек D, F, и C' рис. 2 и 3; лишь одна первая допустима.

4. Три точки, обратные предыдущим, расположенные на кривой (4); лишь та, которая мало отличается от D', допустима.

5. Точку, определенную уравнениями (3) и (5), расположенную на ветви γ_2 и сводящуюся к $y = 0$, $x = -\tau$ при $\tau' = 0$. Эта точка, которую мы не рассматривали в предыдущем пункте, требует особого исследования. Исследование докажет, что эта точка, которую я обозначу T, допустима; две особые точки функции $F(z, t)$, совпадающие с ней, разделяются,

когда $z^{1/c}$ пробегает прямую Δ, и вначале комплексно сопряжены, потом они снова соединяются в одну точку, *соответствующую точке* D, и затем опять разделяются, становясь вещественными. Конечные значения T те же, что и D; таким образом, T допустима, как и D.

6. Точку T', обратную T и, следовательно, допустимую, как и она.

7. Двойную точку $x = \tau$, $y = \tau'$, которую я обозначу U; через эту точку проходят две из ветвей кривой (3) и две прямые $x = \tau$, $y = \tau'$. Этой точке соответствуют четыре конечных значения, поскольку, когда $z^{1/c}$ пробегает прямую Δ, четыре особые точки $F(z, t)$, вначале сливающиеся в одну, разделяются таким образом, что четыре изображающие точки описывают соответственно две ветви кривой (3) и прямые $x = \tau$, $y = \tau'$; среди этих конечных значений три меньше 1 по абсолютной величине или, более точно, принадлежат области R_0 римановой поверхности S_0. Четвертое конечное значение — то, которое соответствует ветви γ_2 кривой,— принадлежит другой области. Таким образом, точка допустима.

8. Точку U', обратную U, т. е. двойную точку кривой (4); она по той же причине допустима.

9. Остаются еще точки пересечения прямой $y = \tau'$ с кривой (4), которые я обозначу V и W', и точки пересечения прямой $y = 1/\tau$ с кривой (3), которые я обозначу V' и W; к ним я добавлю две взаимно обратные точки

$$\left(x = \tau,\ y = \frac{1}{\tau'}\right) \quad \text{и} \quad \left(x = \frac{1}{\tau},\ y = \tau'\right),$$

которые я обозначу X и X'. Точка X недопустима, и оба конечных значения, соответствующие двум прямым $x = \tau$ и $y = 1/\tau$, принадлежат области R_0.

Перейдем к точке V (очень близкой к началу координат точке пересечения прямой $y = \tau'$ с кривой (4)); когда точка $z^{1/c}$ пробегает Δ, две изображающие точки, соответствующие двум разделяющимся особым точкам, следуют: первая — кривой (4) до точки R, а вторая — прямой $y = \tau'$ до точки U. Точки R и U подчинены, следовательно, V, и эта точка V допускает в качестве конечных значений множество конечных значений точек R и U. Все конечные значения R принадлежат области R_0; конечные значения точки U, которая является допустимой, принадлежат обеим областям. Итак, точка V допустима, но она перестает быть таковой, как только разность $\bar{\omega} - \bar{\omega}'$, перестав быть равной нулю, становится очень малой. Действительно, в этом случае R и U уже не подчинены V и у V остаются лишь два конечных значения: одно, близкое к одному из конечных значений R, а другое — близкое к одному из конечных значений U (соответствующему прямой $y = \tau'$); оба эти конечные значения U принадлежат области R_0.

Наконец, W — недопустимая особая точка [точка пересечения кривой (3) с прямой $y = 1/\tau$, близкая к оси y]. Действительно, этой точке подчинены F и X, конечные значения которых принадлежат R_0.

Таким образом, если наклонение равно нулю, разность $\varpi - \varpi'$ *очень мала, эксцентриситет* φ *мал, а эксцентриситет* φ' *очень мал по отношению к* φ, *то единственными допустимыми точками будут* D, T, U *и обратные им.*

Предположим теперь, что наклонение не равно нулю, но очень мало.

Если мы запишем, что расстояние между двумя планетами равно нулю, то получим не два разных уравнения (3) и (4), как в предыдущем случае, а единое уравнение

$$\Theta(x, y) = 0,$$

которое, если рассматривать (как на рис. 2) x и y как координаты точки в плоскости, будет определять кривую шестого порядка.

Эта кривая распадается на две кривые третьего порядка (3) и (4), когда наклонение равно нулю; для того чтобы она была вещественной, необходимо и достаточно, чтобы большие оси орбит были перпендикулярны линии узлов.

Если наклонение очень мало, то особыми точками будут.

1. Точки, очень мало отличающиеся от E, D, F, C, T, V, W, X и им обратных; я обозначу их теми же буквами; ясно, что допустимы лишь D и T и обратные им.

2. Две точки B_1 и B_2, очень мало отличающиеся от B; две точки R_1 и R_2, очень мало отличающиеся от R, и обратные им. Все эти точки недопустимы.

3. Девять точек, мало отличающихся от U, а именно: $x = \tau$, $y = \tau'$; два пересечения прямой $x = \tau$ и $\Theta = 0$; два пересечения $y = \tau'$ и $\Theta = 0$, четыре точки $\Theta = 0$. Необходимо особое исследование.

Определив таким образом, какие точки допустимы, мы должны посмотреть, какая из них соответствует значению $|z|$, самому близкому к единице, чтобы выяснить, какую из этих точек следует сохранить.

Если эксцентриситет, соответствующий большей из двух больших осей, и наклонение малы по отношению к другому эксцентриситету, и если разность $\varpi - \varpi'$ *мала, то подходящая нам точка есть* D.

Я вынужден ограничиться этим и прекратить здесь исследование, которое только наметил в общих чертах. Однако мне кажется, что важность темы может вдохновить не одного исследователя; кроме этого исследования, он должен будет дать быстрый и практичный метод решения алгебраических уравнений, к которым мы пришли, учитывая малость некоторых величин и тот факт, что можно ограничиться чаще всего посредственным приближением. Впрочем, его задача будет в большой мере облегчена полным аналитическим исследованием функции $\Phi(z)$ и ее различных ветвей.

Применение метода Дарбу

99. Предположим теперь, что мы с помощью предыдущих исследований установили, какая особая точка функции $\Phi(z)$ нам подходит, и, сле-

довательно, мы знаем, каковы окружности

$$|z| = r, \qquad |z| = R = \frac{1}{r},$$

ограничивающие область, в которой функция $\Phi(z)$ разлагается в ряд Лорана, и какие особые точки расположены на этой окружности. Вообще, на каждой окружности имеется по одной особой точке.

Итак, пусть z_0 — особая точка, расположенная на окружности $|z| = r$.

Пусть x_0, y_0 и t — соответствующие значения x, y и t. Легко видеть, что x_0 и y_0 вполне определены алгебраическими уравнениями, которые мы исследовали выше; напротив, значение

$$t_0 = x_0^{\frac{1}{c}} e^{\frac{\sin\varphi}{2c}\left(\frac{1}{x_0} - x_0\right)}$$

определено не однозначно, но имеет c значений, которые я обозначу

$$t_0,\ jt_0,\ j^2t_0, \ldots, j^{c-1}t_0,$$

где j — первообразный корень c-й степени из единицы.

Применим к разложению функции $\Phi(z)$ метод Дарбу. Для этого нам необходимо знать, как эта функция ведет себя в окрестности особой точки $z = z_0$.

Когда z очень близко к z_0, функция $F(z, t)$ имеет две особые точки t_1 и t_2, очень близкие к t_0, она имеет также $c - 1$ пар других особых точек

$$jt_1 \text{ и } jt_2,\ j^2t_1 \text{ и } j^2t_2, \ldots, j^{c-1}t_1 \text{ и } j^{c-1}t_2,$$

очень близких соответственно к

$$jt_0,\ j^2t_0, \ldots, j^{c-1}t_0.$$

Контур интегрирования C, вдоль которого берется интеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_C F(z, t)\,dt,$$

должен проходить между точками t_1 и t_2 и также между точками jt_1 и jt_2, ... Можно, кроме того, предположить, что этот контур имеет следующую симметрию: он будет составлен из c дуг C_0, C_1, ..., C_{c-1}, где дуга C_0 переходит в дугу C_k при замене t на tj^k; поскольку

$$F(z, tj^k) = j^{-k}F(z, t),$$

интеграл, взятый вдоль каждой из c дуг C_0, C_1, ..., C_{c-1}, будет один и тот же, и мы будем иметь

$$\Phi(z) = \frac{c}{2i\pi}\int_{C_0} F(z, t)\,dt.$$

Дуга C_0, которая является нашим новым путем интегрирования, пройдет тогда только между особыми точками t_0 и t_1; кроме того, разобьем дугу C_0 на три частичные дуги C_0', C_0'', C_0''', я назову α и β концы C_0', β и γ — концы C_0'', γ и δ — концы C_0'''. Я буду предполагать, что именно C_0'' пройдет между t_1 и t_2 и что, когда z стремится к z_0, ни одна из четырех точек α, β, γ, δ не будет стремиться к t_0, так что все эти четыре точки будут находиться на конечном расстоянии от t_1 и t_2.

Наш интеграл, взятый вдоль C_0, является суммой трех других, взятых соответственно вдоль C_0', C_0'' и C_0'''. Первый и третий интегралы остаются голоморфными функциями z в окрестности точки $z = z_0$, поскольку точки t_1 и t_2 находятся на конечном расстоянии от дуг C_0' и C_0'''. Таким образом, только второй интеграл, взятый вдоль C_0'', имеет z_0 особой точкой; следовательно, изучение именно второго интеграла позволяет установить поведение функции $\Phi(z)$ в окрестности $z = z_0$.

Итак, посмотрим как ведет себя функция $F(z, t)$ в окрестности точки $z = z_0$, $t = t_0$. Конечно, это зависит от природы рассматриваемой особой точки. Я предположу сначала, что это одна из точек, которые мы обозначили буквами D, F, T, C и теми же буквами со штрихами или же, когда наклонение не равно нулю, одна из тех точек, которые мы обозначили буквами B_1, B_2, R_1, R_2 или обратных к ним. Это наиболее важный случай, поскольку мы видели, что если наклонение и один из эксцентриситетов очень малы, то нам подходит точка D.

При сделанном предположении $[F(z)]^{-2}$ разлагается в ряд по возрастающим степеням $z - z_0$ и $t - t_0$.

Таким образом, мы имеем

$$F(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\psi(z, t)}},$$

где через $\psi(z, t)$ обозначен ряд по возрастающим степеням z и t.

Я предположу, что z достаточно близко к z_0 и что точки, обозначенные β и γ (концы C_0''), достаточно близки к t_0, хотя их расстояние от этой точки по предположению конечно, чтобы ряд ψ сходился при $t = \beta$ и $t = \gamma$.

Каков будет теперь вид ряда ψ? Во-первых, при

$$t = t_0, \qquad z = z_0$$

мы должны иметь

$$\psi = 0, \qquad \frac{d\psi}{dt} = 0.$$

Итак, если в ψ положить $z = z_0$, то первый член разложения ψ будет членом $(t - t_0)^2$. Отсюда и из одной теоремы Вейерштрасса следует, что тождественно выполняется равенство

$$\psi = [(t - h)^2 + k]\,\psi_1,$$

где ψ_1 — ряд по степеням $z - z_0$ и $t - t_0$, обращающийся в нуль лишь при $z = z_0$, $t = t_0$; где h и k — два ряда по степеням $z - z_0$, которые приводятся соответственно к t_0 и 0 при $z = z_0$ (Weierstrass. Abhandlungen aus der Funktionenlehre. Berlin, Springer, 1886, стр. 107 и сл.; см. также: Poincaré. Thèse inaugurale. Paris, Gautier-Villars, 1879).

Теперь мы можем положить $1/\sqrt{\psi_1} = \theta$, откуда

$$F(z, t) = \frac{\theta}{\sqrt{(t-h)^2 + k}},$$

где θ разлагается по возрастающим степеням $z - z_0$ и $t - t_0$.

Сделаем другое предположение, а именно, пусть при наклонении, равном нулю, особая точка z_0 совпадает с одной из точек B, R, B' или R'. Мы увидим тогда, что $F(z, t)$ имеет тот же вид, однако имеется некоторое различие. При первом предположении k делится на $z - z_0$, но не на $(z - z_0)^2$, при втором k делится на $(z - z_0)^2$.

Последние предположения, которые нам остается рассмотреть, это те, при которых $x_0 = \tau$ или $1/\tau$, либо $y_0 = \tau'$ или $1/\tau'$. В этом случае полезно сделать замену переменных.

Предположим вначале, что

$$x_0 = \tau \quad \text{или} \quad \frac{1}{\tau}, \qquad y_0 \neq \tau', \qquad y_0 \neq \frac{1}{\tau'}.$$

Мы возьмем тогда за новые переменные не t и z, а x и z; в окрестности рассматриваемой особой точки y разлагается в ряд по возрастающим степеням $t - t_0$ и $z - z_0$ и, следовательно, по степеням $x - x_0$ и $z - z_0$. Функция $[F_1^0]^{-2}$ также разлагается в ряд по степеням $z - z_0$ и $x - x_0$.

Итак, если мы положим

$$\psi = [tF(z, t)]^{-2}, \tag{1}$$

то ψ будет разлагаться в ряд по степеням $x - x_0$, $z - z_0$ и мы будем иметь

$$2i\pi\Phi(z) = \int \frac{dx}{cx^2\sqrt{\psi}} \frac{(x-\tau)(1-\tau x)}{1+\tau^2} = \int H(z, x)\, dx.$$

Функция $H(z, x)$ под знаком интеграла имеет особую точку лишь при $\psi = 0$.

Чтобы функция $\Phi(z)$ имела особую точку, надо, чтобы две из особых точек $H(z, x)$ сливались в одну. Но это происходит, если одновременно

$$\psi = \frac{d\psi}{dx} = 0.$$

Уравнение $\psi = 0$ соответствует кривым (3) и (4) предыдущего пункта (или кривой шестого порядка, которая их заменяет, когда наклонение не равно

нулю). Уравнения $\psi = d\psi/dx = 0$ соответствуют особым точкам, исследованным при предыдущих двух предположениях.

Отсюда вытекает, что точка E и обратная ей лишь кажущиеся особые точки функции $\Phi(z)$ и их не надо исследовать.

Предположим теперь, что

$$x_0 \neq \tau, \quad x_0 \neq \frac{1}{\tau}, \quad y_0 = \frac{1}{\tau'} \quad \text{или} \quad \tau'.$$

Возьмем за новые переменные y и z; сохраняя за ψ значение, определенное уравнением (1), мы найдем

$$2i\pi\Phi(z) = \int \frac{-dy}{ay^2\sqrt{\psi}} \frac{(y-\tau')(1-\tau' y)}{1+\tau'^2}.$$

Отсюда мы заключим, что точки, определенные уравнениями

$$y_0 = \frac{1}{\tau'} \quad \text{или} \quad \tau', \quad \psi = 0$$

(и для которых в то же время $d\psi/dy = 0$), т. е. точки V, W и обратные им, являются для функции $\Phi(z)$ лишь кажущимися особыми точками.

В случае, когда одновременно выполняются

$$x_0 = \tau \quad \text{или} \quad \frac{1}{\tau}, \quad y_0 = \tau' \quad \text{или} \quad \frac{1}{\tau'},$$

выбор замены переменных, который, впрочем, может быть произведен бесконечным числом способов, более деликатен. Вот как можно сделать этот выбор.

Мы имеем

$$z = x^a e^{\frac{a\sin\varphi}{2}\left(\frac{1}{x}-x\right)} y^c e^{\frac{c\sin\varphi'}{2}\left(\frac{1}{y}-y\right)},$$

$$z_0 = x_0^a e^{\frac{a\sin\varphi}{2}\left(\frac{1}{x_0}-x_0\right)} y_0^c e^{\frac{c\sin\varphi'}{2}\left(\frac{1}{y_0}-y_0\right)}.$$

Положим

$$x^a e^{\frac{a\sin\varphi}{2}\left(\frac{1}{x}-x\right)} = x_0^a e^{\frac{a\sin\varphi}{2}\left(\frac{1}{x_0}-x_0\right)}(1+\xi^2),$$

$$y^c e^{\frac{c\sin\varphi'}{2}\left(\frac{1}{y}-y\right)} = y_0^c e^{\frac{c\sin\varphi'}{2}\left(\frac{1}{y_0}-y_0\right)}(1+\eta^2).$$

Тогда x будет разлагаться в ряд по степеням ξ, а y — по степеням η; мы будем иметь $x = x_0$ при $\xi = 0$ и $y = y_0$ при $\eta = 0$.

С другой стороны, получим

$$\frac{z}{z_0} - 1 = \xi^2 + \eta^2 + \xi^2\eta^2,$$

откуда

$$\eta = \sqrt{\frac{z - z_0 - \xi^2}{z_0 (1 + \xi^2)}}.$$

Вообще $F(z, t)$ и t будут разлагаться в ряды по степеням ξ и η, за исключением, однако, случая, когда наклонение будет равно нулю и когда

$$x_0 = \tau, \qquad y_0 = \tau'$$

или же

$$x_0 = \frac{1}{\tau}, \qquad y_0 = \frac{1}{\tau'};$$

в самом деле, эта точка $x = \tau$, $y = \tau'$, которую мы обозначили через U,— двойная точка кривой (3); этот случай заслуживал бы специального исследования.

Итак имеем, взяв за независимые переменные z и ξ,

$$\Phi(z) = \int \varphi(z, \xi)\, d\xi,$$

где $\varphi(z, \xi)$ разлагается в ряд по степеням ξ, $z - z_0$ и $\sqrt{z - z_0 - \xi^2}$. Это позволяет нам записать

$$\Phi(z) = \int \varphi_1 d\xi + \int \frac{\varphi_2 d\xi}{\sqrt{z - z_0 - \xi^2}},$$

где φ_1 и φ_2 разлагаются в ряды по степеням ξ и $z - z_0$.

Первый интеграл — голоморфная функция z в окрестности точки $z = z_0$; что касается второго, то он имеет тот же вид, что и интеграл

$$\int \frac{\theta dt}{\sqrt{(t - h)^2 + k}},$$

к которому мы пришли при первых двух предположениях. Мы должны, следовательно, заключить, что точки

$$x_0 = \tau \quad \text{или} \quad \frac{1}{\tau}, \qquad y_0 = \tau' \quad \text{или} \quad \frac{1}{\tau'}$$

будут для $\Phi(z)$ настоящими особыми точками, а не только кажущимися.

На первый взгляд может показаться удивительной разница между кажущимися особыми точками, такими, как E, V, W и т. д., и настоящими особыми точками, такими, как $x = \tau$, $y = \tau'$ или D и т. д.

Действительно, их происхождение, по-видимому, одно и то же; мы получаем эти точки, записывая, что две особые точки t_1, t_2 функции $F(z, t)$ сливаются в одну. Но исследуем эту ситуацию немного подробнее. Дадим z значение, очень близкое к z_0, так что точки t_1 и t_2 будут очень мало отличаться одна от другой, и изучим поведение функции $F(z, t)$

в окрестности этих двух точек. Разница между двумя случаями очень велика.

Первый случай. Точка z_0 — такая точка, как точка D или $x = \tau$, $y = \tau'$, т. е. настоящая особая точка функции $\Phi(z)$.

Тогда два значения $F(z, t)$ переходят одно в другое при обходе вокруг точки t_1 и эти же значения также переходят одно в другое при обходе вокруг точки t_2. Если построить кривую, взяв t за абсциссу, а $F(z, t)$ — за ординату, то эта кривая будет изменяться при изменении z, а при $z = z_0$ *она будет иметь двойную точку.*

Второй случай. Точка z_0 — такая точка, как точка E, т. е. кажущаяся особая точка $\Phi(z)$.

Тогда четыре значения $F(z, t)$ переставляются друг с другом при обходе вокруг t_1 и t_2, а именно первое — со вторым, третье — с четвертым, при обходе вокруг t_1 и второе — с третьим, при обходе вокруг t_2.

Теперь построим риманову поверхность, соответствующую функции $F(z, t)$, т. е. риманову поверхность, имеющую столько же листов, сколько эта функция $F(z, t)$ имеет ветвей.

В первом случае порядок связности этой поверхности понизится на две единицы, когда z станет равным z_0; во втором случае он останется прежним. В этом истинная причина различия обоих случаев.

То обстоятельство, что некоторые особые точки лишь кажущиеся, способно при надлежащем употреблении значительно облегчить исследование двух предыдущих пунктов.

100. Теперь нет ничего легче, чем выяснить поведение функции $\Phi(z)$ в окрестности точки $z = z_0$.

Действительно, мы имеем

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \frac{1}{2i\pi}\int \frac{\theta dt}{\sqrt{(t-h)^2 + k}},$$

где $\Phi_1(z)$ остается голоморфной при $z = z_0$ и интеграл берется вдоль дуги C_0''.

Поскольку θ разлагается в ряд по степеням $t - t_0$ и $z - z_0$, а h — по степеням $z - z_0$, мы можем записать

$$\theta = \theta_0 + \theta_1(t-h) + \theta_2(t-h)^2 + \ldots + \theta_n(t-h)^n + \ldots,$$

так что, полагая

$$2i\pi J_n = \int \frac{(t-h)^n dt}{\sqrt{(t-h)^2 + k}},$$

получаем

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Sigma \theta_n J_n.$$

С другой стороны,

$$2i\pi J_0 = \int_\beta^\gamma \frac{dt}{\sqrt{(t-h)^2 + k}} = \log \frac{\gamma - h + \sqrt{(\gamma-h)^2 + k}}{\beta - h + \sqrt{(\beta-h)^2 + k}}.$$

Отсюда мы заключим (заметив, что путь интегрирования проходит между $t_1 = h + \sqrt{k}$ и $t_2 = h - \sqrt{k}$), что

$$2i\pi J_0 = \lambda_0(z) + \log(z - z_0),$$

где $\lambda_0(z)$ голоморфна при $z = z_0$.

В случае, когда k будет делиться на $(z - z_0)^2$, надо было бы писать $2\log(z - z_0)$ (второе предположение предыдущего пункта), а не $\log(z - z_0)$. Затем получаем

$$2i\pi J_1 = \int_\beta^\gamma \frac{(t-h)\,dt}{\sqrt{(t-h)^2 + k}} = \text{голоморфная функция } z,$$

$$nJ_n + k(n-1)J_{n-2} = \text{голоморфная функция } z.$$

Следовательно, функция J_n остается голоморфной по z, если n нечетно. Если теперь n четно и мы полагаем

$$\alpha_n = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 1}{n(n-2)\ldots 2},$$

то получаем

$$2i\pi J_n = \lambda_n(z) + (-k)^{\frac{n}{2}}\alpha_n \log(z - z_0),$$

где $\lambda_n(z)$ голоморфна по z.

Итак, окончательно имеем

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta_{2n}(-k)^n \alpha_{2n}}{2i\pi} \log(z - z_0) + \Phi_2(z),$$

где Φ_2 остается голоморфной по z при $z = z_0$.

Я могу еще записать

$$\Phi(z) = \Phi_2(z) + \Phi_3(z)\log(z - z_0),$$

где Φ_2 и Φ_3 остаются голоморфными при $z = z_0$.

Мы имеем

$$\Phi(z) = \Sigma A_{an+b,\,cn+d}\, z^n.$$

Итак, если

$$\Phi_3(z) = \delta_0 + \delta_1(z - z_0) + \delta_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

и если

$$(z - z_0)^h \log(z - z_0) = \Sigma \gamma_{n,h} z^n,$$

то приближенно при очень больших n будем иметь

$$A_{an+b,\,cn+d} = \delta_0\gamma_{n,0} + \delta_1\gamma_{n,1} + \ldots + \delta_p\gamma_{n,p}.$$

Вообще можно ограничиться первым членом

$$\delta_0\gamma_{n,0} = \frac{\theta_{0,0}}{2i\pi}\frac{-1}{nz_0^n},$$

где $\theta_{0,0}$ — значение θ_0 при $z = z_0$ или значение θ при $z = z_0$, $t = t_0$.

Но если я обозначу через Δ квадрат расстояния между двумя планетами, то

$$F(z,t) = \frac{\theta}{\sqrt{(t-h)^2 + k}} = \frac{t^{ad-bc-1}z^{-\frac{d}{c}}}{\sqrt{\Delta}}.$$

Итак,

$$\theta_{0,0} = \frac{1}{2}t_0^{ad-bc}z_0^{-\frac{d}{c}}\frac{d^2\Delta}{dt^2},$$

при условии, конечно, что мы полагаем $t = t_0$, $z = z_0$ в $d^2\Delta/dt^2$ [26].

Сказанное применимо как в первом, так и во втором предположении предыдущего пункта. Если положить

$$x_0 = \tau \quad \text{или} \quad \frac{1}{\tau}, \qquad y = \tau' \quad \text{или} \quad \frac{1}{\tau'},$$

то можно было бы применить аналогичный метод, поскольку в этом случае мы свели $\Phi(z)$ к интегралу

$$\int \frac{\varphi_2 d\xi}{\sqrt{z - z_0 - \xi^3}},$$

который имеет тот же вид, что и

$$\int \frac{\theta dt}{\sqrt{(t-h)^2 + k}}.$$

Коэффициент A_{m_1,m_2}, который мы вычислили, тот же, что и в разложении *главной части* F_1^0 возмущающей функции. Действительно, мы положили

$$F_1^0 = \Sigma A_{m_1,m_2} e^{\sqrt{-1}(m_1 l + m_2 l')}.$$

Теперь следовало бы учесть *дополнительную часть* F_1 — F_1^0 возмущающей функции. Итак, положим

$$F_1 = \Sigma B_{m_1,m_2} e^{\sqrt{-1}(m_1 l + m_2 l')}.$$

Затем

$$F'(z,t) = F_1 t^{ad-bc-1} z^{-\frac{d}{c}},$$

$$2i\pi\Phi'(z) = \int F'(z,t)\,dt.$$

Если предположить, что $m_1 = an + b$, $m_2 = cn + d$, то B_{m_1,m_2} будет коэффициентом при z^n в $\Phi'(z)$ точно так же, как A_{m_1,m_2} было коэффициентом при z^n в $\Phi(z)$.

Функция $F'(z, t) - F(z, t)$ не имеет других особых точек, кроме тех, что находятся на прямых

$$x = \tau, \quad x = \frac{1}{\tau}, \quad y = \tau', \quad y = \frac{1}{\tau'}.$$

Следовательно, функция $\Phi'(z) - \Phi(z)$ будет иметь лишь четыре особые точки, а именно

$$x = \tau \quad \text{или} \quad \frac{1}{\tau}, \quad y = \tau' \quad \text{или} \quad \frac{1}{\tau'}.$$

Из этого следует, что если подходящая в нашем случае особая точка не является одной из этих четырех, т. е. в двух первых предположениях п. 99 (а это наиболее обычный случай), разность $B_{m_1,m_2} - A_{m_1,m_2}$ будет пренебрежимо малой по отношению к A_{m_1,m_2}, и приближенное значение B_{m_1,m_2} будет таким же, как приближенное значение A_{m_1,m_2}.

Если, напротив, особая точка z_0, подходящая в нашем случае, будет одной из этих четырех точек, то надо учитывать разность $B_{m_1,m_2} - A_{m_1,m_2}$, что, впрочем, не представляет трудности.

Применение к астрономии

101. Чаще всего можно ограничиться довольно грубым приближением; в самом деле, нам надо определить, пренебрежимы ли некоторые члены, порядок которых очень высок, но которые вследствие почти соизмеримости средних движений подвержены действию очень малых делителей. Чаще всего они будут пренебрежимыми, и достаточно лишь составить представление о порядке их величины.

Я возьму в качестве примера знаменитое неравенство Паллады. Чтобы исследовать его, надо проделать вычисления при

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = -1, \quad d = 0, \quad n = 8,$$

откуда

$$m_1 = 17, \quad m_2 = -8.$$

Кажется, что этим способом можно было бы прийти к результату Леверрье [27].

Применение к доказательству несуществования однозначных интегралов

102. Но не это главная цель, которую я себе поставил, принимаясь за эту работу. Напомню, что цель состоит в заполнении пробела в доказательстве несуществования однозначных интегралов, о котором я упомянул в конце предыдущей главы.

Действительно, в п. 85 я установил следующее. Пусть

$$F_1 = \Sigma B_{m_1, m_2} e^{\sqrt{-1}(m_1 l + m_2 l')},$$

где B_{m_1,m_2} зависит одновременно от обеих больших осей, обоих эксцентриситетов, наклонения орбит и от долгот обоих перигелиев (отсчитываемых от узла), т. е. от семи переменных.

Пусть

$$m_1 = an, \quad m_2 = cn,$$

где a, c и n — целые числа, a и c взаимно просты и противоположных знаков. Дадим двум большим осям определенные значения, выбранные таким образом, что отношение средних движений равно $-c/a$. Коэффициенты B_{m_1,m_2} будут теперь зависеть лишь от пяти переменных. Положим, как в предыдущей главе,

$$D_n = B_{an, cn} \zeta^n,$$

где D_n будет зависеть от шести переменных, а именно обоих эксцентриситетов, долгот перигелиев, наклонения и ζ.

Итак, если бы существовал однозначный интеграл, то между любыми шестью из величин D_n существовало соотношение и все величины

$$D_{-n}, \ldots, D_{-1}, D_0, D_1, D_2, \ldots, D_n$$

могли быть выражены как функции только пяти, а не шести переменных.

Но мы имеем

$$\Phi'(z) = \Sigma B_{an, cn} z^n$$

и, следовательно,

$$\Phi'(z\zeta) = \Sigma D_n z^n.$$

Таким образом, если бы существовал однозначный интеграл, то коэффициенты разложения в ряд функции $\Phi'(z\zeta)$ зависели бы лишь от пяти параметров.

Применяя правила предыдущего пункта, мы нашли бы, что для очень большого n приближенно выполняется

$$D_n = \left(\frac{\zeta}{z_0}\right)^n \left(\frac{E_1}{n} + \frac{E_2}{n^2} + \frac{E_3}{n^3} + \ldots\right).$$

Тогда легко можно было бы увидеть, что если D_n выражается с помощью только пяти переменных, то же самое можно сказать и о

$$\frac{\zeta}{z_0}, E_1, E_2, \ldots$$

и, следовательно, E_i зависят лишь от четырех переменных. Затем мы убедились бы в том, что это не так.

В этом заключался мой первоначальный замысел; однако проще действовать иначе.

Особые точки функции $\Phi'(z\zeta)$ зависят, очевидно, лишь от коэффициентов D_n; следовательно, они должны быть функциями лишь пяти переменных.

Пусть

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_6$$

— шесть особых точек $\Phi'(z)$; соответствующими особыми точками $\Phi'(z\zeta)$ будут

$$\frac{z_1}{\zeta},\ \frac{z_2}{\zeta},\ \ldots,\ \frac{z_6}{\zeta}$$

и они зависят от ζ и от наших других пяти переменных: эксцентриситетов, наклонения, долгот перигелиев, которые я временно обозначу

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_5.$$

Если бы существовал однозначный интеграл, то особые точки должны были бы зависеть лишь от пяти переменных и функциональный определитель

$$\frac{\partial\left(\frac{z_1}{\zeta},\ \frac{z_2}{\zeta},\ \ldots,\ \frac{z_6}{\zeta}\right)}{\partial(\zeta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_5)}$$

должен был бы быть равен нулю.

Но этот определитель равен

$$-\frac{z_1^6}{\zeta^7}\,\frac{\partial\left(\frac{z_2}{z_1},\ \frac{z_3}{z_1},\ \ldots,\ \frac{z_6}{z_1}\right)}{\partial(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_5)}.$$

Однако z не равно нулю, а ζ не бесконечно, следовательно, мы должны были бы иметь

$$\frac{\partial\left(\frac{z_2}{z_1},\ \frac{z_3}{z_1},\ \ldots,\ \frac{z_6}{z_1}\right)}{\partial(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_5)}=0.$$

Другими словами, попарные отношения особых точек функции $\Phi'(z)$ должны были зависеть лишь от четырех переменных, которые я обозначу $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4$. Но эти особые точки бывают двух родов.

Рассмотрим сначала те, которые даются уравнениями

$$x = \tau \quad \text{или} \quad \frac{1}{\tau}, \qquad y = \tau' \quad \text{или} \quad \frac{1}{\tau'},$$
$$z = x^a e^{\frac{a\sin\varphi}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)} y^c e^{\frac{c\sin\varphi'}{2}\left(\frac{1}{y} - y\right)}.$$

Я назову их z_1, z_2, z_3 и z_4.

Сразу видно, что z_1, z_2, z_3 и z_4 зависят лишь от обоих эксцентриситетов, т. е. от τ и τ', и что

$$z_1 z_3 = z_2 z_4 = 1.$$

Отношение z_1/z_3 зависело бы лишь от наших четырех переменных β_1, β_2, β_3, β_4; но это отношение равно z_1^2. Итак, z_1, а также и z_2, z_3, z_4 зависели бы лишь от четырех переменных β_i.

То же самое можно было бы сказать и о τ и τ', которые явно выражаются через z_1 и z_2.

Перейдем к особым точкам второго рода, которые даются уравнениями

$$\Delta = 0, \quad \frac{d\Delta}{dt} = 0.$$

Если в этих уравнениях взять за переменные x и y, то они станут алгебраическими. Уравнение $\Delta = 0$ определяет тогда, как мы уже видели, кривую шестого порядка, которая при нулевом наклонении распадается на две кривые (3) и (4) третьего порядка; из уравнения $d\Delta/dt = 0$ в сочетании с $\Delta = 0$ можно при нулевом наклонении получить два других, а именно уравнения (5) и (6) из п. 96.

Если z_0 — один из корней уравнений

$$\Delta = \frac{d\Delta}{dt} = 0, \tag{1}$$

то отношения z_0/z_1, z_0/z_3 и, следовательно, z_0 зависели бы лишь от четырех переменных β_i.

Итак, если z_0, z_0', z_0'' — три корня уравнений (1), то z_0, z_0', z_0'', τ и τ' зависели бы только от этих четырех переменных, так что функциональный определитель

$$\frac{\partial(\tau, \tau', z_0, z_0', z_0'')}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)}$$

был бы равен нулю. Предположим, например, что α_1 и α_2 — эксцентриситеты; τ будет зависеть от α_1, а τ' — от α_2, так что этот функциональный определитель равен

$$\frac{d\tau}{d\alpha_1}\frac{d\tau'}{d\alpha_2}\frac{\partial(z_0, z_0', z_0'')}{\partial(i, \bar{\omega}, \bar{\omega}')},$$

поскольку три последние переменные есть наклонение i и долготы перигелиев $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}'$.

Тогда мы должны были бы иметь

$$\frac{\partial(z_0, z_0', z_0'')}{\partial(i, \tilde{\omega}, \tilde{\omega}')} = 0;$$

это означает, что корни уравнения (1) (при фиксированных эксцентриситетах и, следовательно, τ и τ') зависели бы лишь от двух переменных.

Мне остается доказать, что это не так.

103. Начнем с того случая, когда наклонение равно нулю. В этом случае корни уравнения (1) п. **102** зависят лишь от больших осей, эксцентриситетов и разности $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'$. Если, как мы только что это сделали, мы зафиксируем большие оси и эксцентриситеты, то эти корни будут зависеть лишь от разности $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'$.

Припоминая сказанное в п. 85 и рассуждая так же, как в предыдущем пункте, мы увидим, что для того, чтобы плоская задача трех тел допускала однозначный интеграл (отличный от интегралов живых сил и площадей), надо, чтобы эти корни не зависели от $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'$ и оставались постоянными, когда большие оси и эксцентриситеты остаются сами постоянными, а наклонение равно нулю.

Однако ясно, что это не так, поскольку z_0 вещественно, когда $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'$ равно нулю и, вообще говоря, комплексно в противном случае.

Вернемся теперь к случаю, когда наклонение не равно нулю.

Пронумеруем особые точки, получаемые из уравнений

$$\Delta = 0, \quad \frac{d\Delta}{dt} = 0. \tag{1}$$

Для этого предположим, что наклонение очень мало, и мы увидим, обратившись к сказанному в п. 98, что существуют:

1. Восемь особых точек, очень мало отличающихся от D, C, F, T и им обратных.

2. Восемь особых точек, две из которых очень мало отличаются от B, две другие — от R, еще по две очень мало отличаются от каждой из их обратных.

3. Четыре точки, очень мало отличающиеся от U ($x = \tau$, $y = \tau$); и действительно, когда наклонение равно нулю, обе кривые $\Delta = 0$, $d\Delta/dt = 0$ имеют в U двойную точку.

4. Четыре точки, очень мало отличающиеся от U' ($x = 1/\tau$, $y = 1/\tau'$).

Итого 24 особые точки.

Можно прийти к тому же результату другим способом.

Мы видим, что

$$x^2 y^2 \Delta = P$$

— целый многочлен шестой степени по x и y, так что уравнение

$$P = 0$$

является уравнением кривой шестого порядка, которая распадается на две другие, когда наклонение равно нулю.

С другой стороны, уравнение $d\Delta/dt = 0$ можно заменить следующим:

$$Q = cx^2(1+\tau^2)(y-\tau')(1-\tau' y)\frac{dP}{dx} - ay^2(1+\tau'^2)(x-\tau)(1-\tau x)\frac{dP}{dy} = 0.$$

Это уравнение $Q = 0$ является уравнением кривой девятого порядка, и особые точки будут точками пересечения этих двух кривых, за исключением точек в нуле и бесконечности, которые надо отбросить.

Кривая $P = 0$ имеет в начале координат двойную точку, а оси являются ее двойными асимптотами; кривая $Q = 0$ имеет в начале координат тройную точку, а оси являются для нее тройными асимптотами.

Более того, можно заметить, что P является суммой трех квадратов, так что я могу записать

$$P = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = \sum U^2,$$

где

$$U = Ax^2y + Bxy^2 + Cxy + Dx + Ey.$$

С другой стороны, можно положить

$$V = x\frac{dU}{dx} - U = Ax^2y - Ey,$$

откуда

$$x\frac{dP}{dx} = 2\sum VU + P.$$

Итак, получаем, учитывая, что $P = 0$,

$$Q = 2cxy(1+\tau^2)(y-\tau')(1-\tau' y)\sum(Ax^2 - E)U - 2axy(1+\tau'^2)(x-\tau)(1-\tau x)\sum(By^2 - D)U,$$

так что после избавления от множителя $2xy$ система

$$P = Q = 0$$

может быть заменена следующей:

$$P = 0,$$

$$R = c(1+\tau^2)(y-\tau')(1-\tau' y)\sum(Ax^2 - E)U - a(1+\tau'^2)(x-\tau)(1-\tau x)\sum(By^2 - D)U = 0.$$

Кривая $R = 0$ имеет всего седьмой порядок; в начале координат она имеет простую точку. В качестве асимптот ей служат обе оси, две прямые, отличные от оси x и параллельные ей, две прямые, отличные от оси y и параллельные этой оси, и одна прямая, не параллельная осям.

Две кривые $R = 0$, $P = 0$ имеют всего 42 пересечения. Среди этих пересечений два приходятся на начало координат. Посмотрим, сколько пересечений находится в бесконечности по направлению оси x.

Кривая R имеет три асимптоты, параллельные оси x, в том числе ось x; для кривой P эта ось является двойной асимптотой; вообще говоря, это дало бы семь точек пересечения. Действительно, вообще говоря, двойная асимптота означает наличие «точки возврата на бесконечности». Для кривой P' это не так; у нее имеются две различные ветви, соприкасающиеся на бесконечности, что дает не семь, а восемь точек пересечения.

Таким образом, мы имеем на бесконечности восемь точек в направлении оси x и восемь в направлении оси y.

Следовательно, остается $42 - 2 - 8 - 8 = 24$ особые точки.

Возможно ли теперь, чтобы значения z в этих 24 особых точках зависели лишь от двух переменных?

Обозначим через γ_1 и γ_2 эти две переменные.

Мы можем выбрать третью переменную γ_3 так, что i, $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}'$ будут функциями от γ_1, γ_2, γ_3. Тогда, при изменении γ_3, *когда две другие переменные* γ_1 и γ_2 *остаются постоянными*, величина z не должна была бы изменяться.

По предположению имеем

$$\Delta = 0, \quad \frac{d\Delta}{dt} = 0.$$

Дифференцируя первое из этих уравнений, находим

$$\frac{d\Delta}{dt}\,dt + \frac{d\Delta}{dz}\,dz + \frac{d\Delta}{d\gamma_3}\,d\gamma_3 = 0.$$

Но $d\Delta/dt = 0$ и, с другой стороны, dz должно было бы равняться нулю, поскольку z не должно изменяться. Следовательно,

$$\frac{d\Delta}{d\gamma_3} = 0. \tag{2}$$

Посмотрим, что означает это уравнение. Если изменять γ_3, то кривая $\Delta = 0$ (или, что то же самое, кривая $P = 0$) изменяется; рассмотрим кривую

$$\Delta + \frac{d\Delta}{d\gamma_3}\,d\gamma_3 = 0,$$

бесконечно близкую к $P = 0$; ее я обозначу P'.

Уравнение (2) означало бы, что эта кривая P' должна проходить через 24 особые точки.

Но кривые P и P' шестого порядка, следовательно, они не могут, не сливаясь, иметь больше 36 точек пересечения.

Они имеют 4 точки пересечения в начале координат, где у обеих по двойной точке.

В качестве двойной асимптоты им служит ось x, что дает (если учитывать замечание, сделанное выше относительно природы этой двойной асимптоты) восемь точек пересечения в бесконечности в направлении оси x. Столько же точек будет в направлении оси y.

Это даст всего $24 + 4 + 8 + 8 = 44$ пересечения. Следовательно, кривые должны были бы слиться в одну.

Таким образом, при изменении γ_3 кривая $P = 0$ не должна изменяться.

Истолкуем этот результат.

Рассмотрим эллипсы, описанные обеими планетами. Эти два эллипса будут неизменны по форме и величине, поскольку мы зафиксировали большие оси и эксцентриситеты; но при изменении i, $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}'$ эти два эллипса будут перемещаться относительно друг друга. Я могу предположить, что один из эллипсов, E, неподвижен, а другой, E', подвижен.

Неизменность кривой $P = 0$ при фиксированных γ_1 и γ_2 означает, что можно найти закон движения E', такой, что если в некоторый момент точка M', принадлежащая E', находится на нулевом расстоянии от точки M, принадлежащей E, то расстояние между этими двумя точками постоянно останется равным нулю (само собой разумеется, поскольку эти две точки комплексные, они могут находиться на нулевом расстоянии, не сливаясь в одну).

Пусть M_0' — положение точки M' в некоторый момент. На E имеются четыре точки M_1, M_2, M_3, M_4, которые расположены на нулевом расстоянии от M_0'; эти четыре точки не могут лежать на одной прямой. Следовательно, точка M' должна бы оставаться на четырех сферах нулевого радиуса с центрами в M_1, M_2, M_3, M_4; но поскольку эти центры не лежат на одной прямой, то четыре сферы могут иметь лишь две общие точки на конечном расстоянии. Следовательно, невозможно, чтобы точка M' *перемещалась*, оставаясь на этих четырех сферах.

Несуществование однозначных интегралов, таким образом, строго доказано.

Глава VII

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

104. Пусть

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

— система n дифференциальных уравнений, X — функции x и t. Они разлагаются в степенные ряды по x и периодичны по t с периодом 2π.

Пусть

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0, \qquad \ldots, x_n = x_n^0$$

— частное периодическое решение этих уравнений; x_i^0 будут периодическими функциями t с периодом 2π. Положим

$$x_i = x_i^0 + \xi_i.$$

Получим

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \Xi_i, \tag{2}$$

где Ξ будут функциями ξ и t, периодическими по t и разложимыми в ряд по степеням ξ; но в разложении не будет содержаться члена, не зависящего от ξ.

Если ξ очень малы и мы пренебрегаем их квадратами, то уравнения (2) сводятся к уравнениям

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1^0}\xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2^0}\xi_2 + \ldots + \frac{dX_i}{dx_n^0}\xi_n, \tag{3}$$

которые являются уравнениями в вариациях уравнений (1).

Они линейны и имеют периодические коэффициенты. Известен вид их общего решения, а именно:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= A_1 e^{\alpha_1 t}\varphi_{11} + A_2 e^{\alpha_2 t}\varphi_{21} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\varphi_{n1},\\
\xi_2 &= A_1 e^{\alpha_1 t}\varphi_{12} + A_2 e^{\alpha_2 t}\varphi_{22} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\varphi_{n2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_n &= A_1 e^{\alpha_1 t}\varphi_{1n} + A_2 e^{\alpha_2 t}\varphi_{2n} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\varphi_{nn},
\end{aligned}$$

где A — постоянные интегрирования, α — фиксированные константы, называемые *характеристическими показателями*, φ — периодические функции t.

Тогда, если положим

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \eta_1\varphi_{11} + \eta_2\varphi_{21} + \ldots + \eta_n\varphi_{n1},\\
\xi_2 &= \eta_1\varphi_{12} + \eta_2\varphi_{22} + \ldots + \eta_n\varphi_{n2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_n &= \eta_1\varphi_{1n} + \eta_2\varphi_{2n} + \ldots + \eta_n\varphi_{nn},
\end{aligned}$$

то уравнения (2) примут вид

$$\frac{d\eta_i}{dt} = H_i, \tag{2'}$$

где H_i — функции от t и η, того же вида, что и Ξ.

Мы можем далее записать

$$\frac{d\eta_i}{dt} = H_i^1 + H_i^2 + \ldots + H_i^n + \ldots, \tag{2''}$$

где H_i^p представляет множество членов H_i степени p по η.

Что касается уравнений (3), то они примут вид

$$\frac{d\eta_i}{dt} = H_i^1 = \alpha_i\eta_i. \tag{3'}$$

Попытаемся найти теперь вид общих решений уравнений (2) и (2').

Я утверждаю, что мы должны найти η_i, функции, разложенные в ряд по степеням $A_1e^{\alpha_1 t}$, $A_2e^{\alpha_2 t}$, ..., $A_ne^{\alpha_n t}$, коэффициенты которых периодические функции от t.

Мы можем тогда записать

$$\eta_i = \eta_i + \eta_i^2 + \ldots + \eta_i^p + \ldots, \tag{4'}$$

где η_i^p представляет множество членов η_i степени p по A.

Заменим η_i их значениями в H_i^p и найдем

$$H_i^p = H_i^{p,p} + H_i^{p,p+1} + \ldots + H_i^{p,q} + \ldots,$$

где $H_i^{p,q}$ обозначает множество членов степени q по A.

Мы найдем тогда

$$\frac{d\eta_i^1}{dt} = \alpha_i \eta_i^1, \quad \eta_i^1 = A_i e^{\alpha_i t},$$

$$\frac{d\eta_i^2}{dt} - \alpha_i \eta_i^2 = H_i^{2,2}, \quad \frac{d\eta_i^3}{dt} - \alpha_i \eta_i^3 = H_i^{2,3} + H_i^{3,3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\eta_i^q}{dt} - \alpha_i \eta_i^q = H_i^{2,q} + H_i^{3,q} + \ldots + H_i^{q,q} = K_q.$$

Эти уравнения позволят последовательно вычислить

$$\eta_i^2, \eta_i^3, \ldots, \eta_i^q, \ldots.$$

В самом деле, K_q зависит лишь от $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^{q-1}$. Если мы предположим, что эти величины были заранее вычислены, то сможем записать K_q в следующем виде:

$$K_q = \sum A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \ldots A_n^{\beta_n} e^{t(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n)} \psi,$$

где β — положительные целые числа, сумма которых равна q, а ψ — периодическая функция.

Можно еще записать

$$\psi = \sum C e^{\gamma t \sqrt{-1}},$$

тде C — вообще говоря, комплексный коэффициент, а γ — положительное или отрицательное целое число. Для краткости положим

$$A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \ldots A_n^{\beta_n} = A^q, \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n = \sum \alpha\beta,$$

тогда получим

$$\frac{d\eta_i^q}{dt} - \alpha_i \eta_i^q = \sum C A^q e^{t(\gamma \sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta)}.$$

Но этому уравнению можно удовлетворить, полагая

$$\eta_i^q = \sum \frac{C A^q e^{t(\gamma \sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta)}}{\gamma \sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i}.$$

Исключение составляет случай, когда

$$\gamma \sqrt{-1} + \sum \alpha\beta - \alpha_i = 0.$$

В этом случае в формулах возникнут члены с t. Рассмотрение этого частного случая мы отложим.

Сходимость рядов

105. Мы должны теперь изучить вопрос о сходимости этих рядов. Единственная трудность возникает, впрочем, как мы увидим, из-за делителей

$$\gamma\sqrt{-1}+\sum\alpha\beta-\alpha_i. \tag{5}$$

Заменим уравнения (2′) следующими:

$$\varepsilon\eta_i=\varepsilon A_i e^{\alpha_i t}+\bar{H}_i^2+\bar{H}_i^3+\ldots+\bar{H}_i^p+\ldots. \tag{2″}$$

Определим $\bar{H}_i^p$. Нетрудно видеть, что H_i^p имеет следующий вид:

$$H_i^p=\sum C\eta_1^{\beta_1}\eta_2^{\beta_2}\ldots\eta_n^{\beta_n}e^{\gamma t\sqrt{-1}},$$

где C — произвольная константа, β — положительные целые числа, сумма которых равна p, γ — положительное или отрицательное целое число. Возьмем тогда

$$\bar{H}_i^p=\sum|C|\eta_1^{\beta_1}\eta_2^{\beta_2}\ldots\eta_n^{\beta_n}.$$

Полученные таким образом ряды будут сходящимися, если только тригонометрические ряды, определяющие периодические функции, от которых зависят H, сходятся абсолютно и равномерно; но последнее всегда имеет место, так как эти периодические функции аналитичны. Что касается ε, то это положительная константа.

Из уравнений (2″) можно получить η в следующем виде:

$$\eta_i=\sum M\varepsilon^{-\delta}A_1^{\beta_1}A_2^{\beta_2}\ldots A_n^{\beta_n}e^{(\Sigma\alpha\beta)t}. \tag{4″}$$

Здесь многие члены могут соответствовать тем же показателям β, а δ — положительное целое число. Если сравнить их с рядами, полученными из (2′), которые имеют вид

$$\eta_i=\sum N\frac{A_1^{\beta_1}A_2^{\beta_2}\ldots A_n^{\beta_n}}{\Pi}e^{t(\Sigma\alpha\beta+\gamma\sqrt{-1})},$$

то можно заметить следующее.

1. M — действительное положительное число, большее, чем $|N|$.
2. Π означает произведение делителей (5), число которых меньше или равно δ.

Итак, если ряд (4″) сходится и если ни один из множителей (5) не меньше ε, то ряд (4′) также сходится. Итак, вот каким образом можно сформулировать условие сходимости.

Ряд сходится, если выражение

$$\gamma\sqrt{-1}+\sum\alpha\beta-\alpha_i$$

не может стать меньше любой данной величины ε для положительных целых значений β и целых (положительных или отрицательных) значений γ; другими словами, если ни один из двух выпуклых многоугольников, содержащих: первый α и $+\sqrt{-1}$, второй α и $-\sqrt{-1}$, не содержит начало координат; или если все величины α имеют вещественные части одного и того же знака и ни одна из них не имеет нулевой вещественной части.

Что мы будем делать, если это не так?

Предположим, например, что k из величин α имеют положительные вещественные части, а $n-k$ величин α имеют отрицательные или нулевые вещественные части. Тогда ряд (4′) останется сходящимся, если в нем равны нулю константы A, соответствующие тем α, у которых вещественные части отрицательны или равны нулю, так что эти ряды дадут нам не общее решение рассматриваемых уравнений, а решение, содержащее только k произвольных постоянных. Это решение представлено рядом (4′) по степеням

$$A_1e^{\alpha_1 t},\ A_2e^{\alpha_2 t},\ \ldots,\ A_ke^{\alpha_k t}.$$

Поскольку по предположению вещественные части

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$$

положительны, экспоненты

$$e^{\alpha_1 t},\ e^{\alpha_2 t},\ \ldots,\ e^{\alpha_k t}$$

стремятся к 0, когда t стремится к $-\infty$. Следовательно, то же самое верно и для величин η_i; это означает, что, когда t стремится к $-\infty$, решение, представленное рядом (4′), асимптотически приближается к рассматриваемому периодическому решению. По этой причине мы назовем его асимптотическим решением.

Мы получим вторую систему асимптотических решений, приравнивая нулю в ряду (4′) все коэффициенты A, соответствующие показателям α, вещественная часть которых положительна или равна нулю. Тогда этот ряд будет рядом по степеням

$$A_1'e^{\alpha_1' t},\ A_2'e^{\alpha_2' t},\ \ldots,\ A_k'e^{\alpha_k' t},$$

где показатели α_1', α_2', ..., α_k' имеют отрицательную вещественную часть. Если теперь устремить t к $+\infty$, соответствующее решение будет асим-

птотически приближаться к рассматриваемому периодическому решению.

Если мы предполагаем, что данные уравнения являются уравнениями динамики, то, как мы видели, n четно и α попарно противоположны.

Тогда, если k из них имеют положительную вещественную часть, k других будут иметь отрицательную вещественную часть и $n - 2k$ — нулевую вещественную часть. Беря сначала те α, которые имеют положительную вещественную часть, мы получим частное решение, содержащее k произвольных постоянных; второе решение мы получим, беря показатели α с отрицательной вещественной частью.

Впрочем, в случае, когда ни один из α не имеет нулевой вещественной части, и в частности, если все α вещественны, получим

$$k = \frac{n}{2}.$$

106. Предположим, что в уравнениях (1) X зависят от параметра μ и функции X разлагаются в ряды по степеням этого параметра.

Представим себе, что при $\mu = 0$ характеристические показатели α все различны, так что эти показатели, определяемые уравнением $G(\alpha, \mu) = 0$ (аналогичным уравнению п. **74**, но таким, что все корни уравнения $G(\alpha, 0) = 0$ различны), сами разлагаются в ряды по степеням μ в силу пунктов **30** и **31**.

Предположим, наконец, что, как мы только что говорили, мы обратили в нуль все константы A, соответствующие таким α, вещественная часть которых отрицательная или нулевая.

Ряды (4'), определяющие величины η_i, тогда будут зависеть от μ. Я намерен установить, что эти величины можно разложить в ряды не только по степеням $A_i e^{\alpha_i t}$, но еще и по степеням μ.

Рассмотрим выражение, обратное одному из делителей (5)

$$(\gamma \sqrt{-1} + \sum \alpha\beta - \alpha_i)^{-1}.$$

Я утверждаю, что это выражение можно разложить в ряд по степеням μ.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — k характеристических показателей, вещественные части которых положительны при $\mu = 0$ и при малых значениях μ и которые мы договорились сохранить. Каждый из них может быть разложен в ряд по степеням μ. Пусть α_i^0 — значение α_i при $\mu = 0$; мы сможем взять μ_0 достаточно малым для того, чтобы α отличалось как угодно мало от α_i^0 при $|\mu| < \mu_0$. Пусть тогда h — положительная величина, меньшая, чем самая малая из вещественных частей k величин $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_k^0$; мы сможем взять μ_0 достаточно малым для того, чтобы при $|\mu| < \mu_0$ вещественные части k показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ были больше h.

Вещественная часть $\gamma\sqrt{-1}+\sum\alpha\beta-\alpha_i$ будет тогда больше, чем h (если $\beta_i>0$), так что будем иметь

$$|\gamma\sqrt{-1}+\sum\alpha\beta-\alpha_i|>h. \tag{6}$$

Таким образом, при $|\mu|<\mu_0$ функция

$$(\gamma\sqrt{-1}+\sum\alpha\beta-\alpha_i)^{-1}$$

остается однозначной, непрерывной, ограниченной и меньшей по абсолютной величине, чем $1/h$.

Отсюда в силу хорошо известной теоремы мы заключим, что эта функция разлагается в ряд по степеням μ и что коэффициенты разложения меньше по абсолютной величине, чем коэффициенты разложения

$$\frac{1}{h\left(1-\frac{\mu}{\mu_0}\right)}.$$

Следует заметить, что числа h и μ_0 не зависят от целых чисел β и γ. Исключением был бы случай, когда β_i равно нулю. Вещественная часть делителя (5) могла бы быть меньше h и даже отрицательной.

В самом деле, она равна вещественной части выражения $\Sigma\alpha\beta$, которая положительна, минус вещественная часть α_i, которая также положительна и которая может быть больше вещественной части $\Sigma\alpha\beta$, если β_i равно нулю.

Предположим, что вещественная часть α_i остается меньше некоторого числа h_1 при $|\mu|<\mu_0$. Тогда если

$$\sum\beta>\frac{h_1}{h}+1, \tag{7}$$

то вещественная часть (5) заведомо больше, чем h; итак, трудности могут встретиться лишь для тех делителей (5), для которых неравенство (7) не выполняется.

Предположим теперь, что мнимая часть величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ остается постоянно меньше по абсолютной величине, чем некоторое положительное число h_2; если тогда мы имеем

$$|\gamma|>h_2\sum\beta+h, \tag{8}$$

то мнимая часть (5) и, следовательно, его модуль будут все еще больше h, так что трудности могут возникнуть для тех делителей (5), для которых ни одно из неравенств (7) и (8) не выполняется. Но этих делителей, которые не удовлетворяют ни одному из этих неравенств, *конечное число*.

В силу сделанного выше предположения ни один из них не обращается в нуль для рассматриваемых нами значений μ; следовательно, мы можем взять h и μ_0 достаточно малыми для того, чтобы абсолютное значение любого из них оставалось больше, чем h, когда $|\mu|$ остается меньше μ_0.

Тогда выражение, обратное *произвольному* делителю (5), разлагается в ряд по степеням μ и коэффициенты разложения меньше по абсолютной величине, чем коэффициенты разложения

$$\frac{1}{h\left(1-\frac{\mu}{\mu_0}\right)}.$$

Мы писали выше

$$H_i^p = \sum C\eta_1^{\beta_1}\eta_2^{\beta_2}\ldots\eta_n^{\beta_n}e^{\gamma t\sqrt{-1}}.$$

В силу наших предположений C можно разложить в ряд по степеням μ, так что я могу положить

$$C = \sum E\mu^l, \qquad H_i^p = \sum E\mu^l\eta_1^{\beta_1}\eta_2^{\beta_2}\ldots\eta_n^{\beta_n}e^{\gamma t\sqrt{-1}}.$$

Вернемся теперь к уравнениям (2″), полагая в них

$$\varepsilon = h\left(1-\frac{\mu}{\mu_0}\right),$$

$$\bar{H}_i^p = \sum |E|\,\mu^l\eta_1^{\beta_1}\eta_2^{\beta_2}\ldots\eta_n^{\beta_n}.$$

Правые части уравнений (2″) будут тогда сходящимися рядами по степеням μ, η_1, η_2, …, η_n.

Из них можно найти η_i в виде сходящихся рядов (4″) по степеням μ, $A_1e^{\alpha_1 t}A_2e^{\alpha_2 t}, \ldots, A_ke^{\alpha_k t}$.

С другой стороны, из уравнений (2′) мы получим η_i в виде рядов (4′) по степеням μ, $A_1e^{\alpha_1 t}$, $A_2e^{\alpha_2 t}$, …, $A_ke^{\alpha_k t}$, $e^{t\sqrt{-1}}$, $e^{-t\sqrt{-1}}$.

Каждый из членов (4′) меньше по абсолютной величине соответствующего члена (4″), а поскольку ряды (4″) сходятся, то будут сходиться и ряды (4′).

Асимптотические решения уравнений динамики

107. Вернемся к уравнениям (1) из п. 13

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

и предположениям, сделанным на их счет в этом пункте.

В п. 42 мы видели, что эти уравнения допускают периодические решения, и мы можем из этого заключить, что если хотя бы один из соответствующих характеристических показателей α веществен, то эти уравнения допускают также асимптотические решения.

В конце предыдущего пункта мы рассмотрели случай, когда в уравнениях (1) п. 104 правые части X_i разлагаются в ряды по степеням μ, но характеристические показатели остаются различными при $\mu = 0$.

В случае уравнений, которыми мы сейчас займемся, т. е. уравнений (1) п. 13, правые части также разлагаются в ряды по степеням μ, однако все характеристические показатели равны нулю при $\mu = 0$.

Отсюда следует большое число важных различий.

Прежде всего, характеристические показатели α разлагаются в ряд не по степеням μ, а по степеням $\sqrt{\mu}$ (см. п. 74). Точно так же функции, названные мною $\varphi_{i,k}$ в начале п. 104 (которые в интересующем нас частном случае уравнений динамики совпадают с функциями S_i и T_i из п. 79), разлагаются в ряд не по степеням μ, а по степеням $\sqrt{\mu}$.

Тогда в уравнениях (2′) п. 104

$$\frac{d\eta_i}{dt} = H_i$$

правая часть H_i разлагается в ряд по степеням η, $e^{t\sqrt{-1}}$, $e^{-t\sqrt{-1}}$ и $\sqrt{\mu}$ (а не μ).

Отсюда можно найти η_i в виде рядов, полученных в п. 104

$$\eta_i = \sum N \frac{A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \dots A_n^{\beta_n}}{\Pi} e^{t(\Sigma\alpha\beta + \gamma\sqrt{-1})},$$

а N и Π разлагаются в ряды по степеням $\sqrt{\mu}$.

Тогда естественным образом возникают несколько вопросов.

1. Мы знаем, что N и Π разлагаются в ряды по степеням $\sqrt{\mu}$; разлагается ли в такой ряд их отношение N/Π?

2. Если это так, то существуют ряды по степеням $\sqrt{\mu}$, $A_i e^{\alpha_i t}$, $e^{t\sqrt{-1}}$ $e^{-t\sqrt{-1}}$ которые формально удовлетворяют предложенным уравнениям; сходятся ли эти ряды?

3. Если они не сходятся, какую пользу можно извлечь из них для вычисления асимптотических решений?

Разложение решений в ряд по степеням $\sqrt{\mu}$

108. Я намерен доказать, что можно разложить N/Π в ряд по степеням $\sqrt{\mu}$ и что, следовательно, существуют ряды по степеням $\sqrt{\mu}$, $A_i e^{\alpha_i t}$, $e^{t\sqrt{-1}}$, $e^{-t\sqrt{-1}}$, которые формально удовлетворяют уравнениям (1). Можно было

бы в этом усомниться; действительно, Π — произведение некоторого числа делителей (5) из п. 104. Все эти делители разлагаются в ряды по степеням $\sqrt{\mu}$; но некоторые из них, те, для которых γ равно нулю, обращаются в нуль вместе с $\sqrt{\mu}$. Следовательно, может случиться, что Π обращается в нуль вместе с μ и содержит в качестве множителя некоторую степень $\sqrt{\mu}$. Тогда, если бы N не содержало той же степени в качестве множителя, то хотя отношение N/Π разлагалось бы в ряд по возрастающим степеням $\sqrt{\mu}$, это разложение начиналось бы с отрицательных степеней.

Я утверждаю, что это не так и что разложение N/Π содержит лишь положительные степени $\sqrt{\mu}$.

Посмотрим, каким образом эти отрицательные степени $\sqrt{\mu}$ исчезают. Положим

$$A_i e^{\alpha_i t} = w_i$$

и рассмотрим x и y как функции переменных t и w.

Прежде чем идти дальше, важно сделать следующее замечание: среди $2n$ характеристических показателей α два равны нулю, а остальные попарно противоположны. Мы сохраним лишь самое большее $n-1$ этих показателей, полагая равными нулю коэффициенты A_i и переменные w_i, соответствующие $n+1$ отброшенным показателям. Мы сохраним лишь те показатели, вещественная часть которых положительна.

Теперь уравнения (1) принимают вид

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_k \alpha_k w_k \frac{dx_i}{dw_k} = \frac{dF}{dy_i}, \tag{2}$$

$$\frac{dy_i}{dt} + \sum_k \alpha_k w_k \frac{dy_i}{dw_k} = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{3}$$

Попытаемся, исходя из этих уравнений, разложить x_i и $y_i - n_i t$ в ряды по возрастающим степеням $\sqrt{\mu}$ и w так, чтобы коэффициенты были периодическими функциями t.

Мы можем записать

$$\alpha_i = \alpha_k^1 \sqrt{\mu} + \alpha_k^2 \mu + \ldots = \Sigma \alpha_k^p \mu^{p/2},$$

поскольку мы видели в п. 74, как можно разложить характеристические показатели в ряды по степеням $\sqrt{\mu}$.

Напишем, с другой стороны,

$$x_i = x_i^0 + x_i^1 \sqrt{\mu} + \ldots = \Sigma x_i^p \mu^{p/2},$$
$$y_i - n_i t = y_i^0 + y_i^1 \sqrt{\mu} + \ldots = \Sigma y_i^p \mu^{p/2},$$

где x_i^p и y_i^p — функции t и w, периодические по t и разлагающиеся в ряды по степеням w.

Если в уравнениях (2) и (3) мы подставим эти значения вместо α_k, x_i и y_i, то левые и правые части этих уравнений будут разложены в ряды по степеням $\sqrt{\mu}$.

Приравняем в обеих частях уравнений (2) коэффициенты при $\mu^{(p+1)/2}$, а в обеих частях уравнений (3) коэффициенты при $\mu^{p/2}$; получим следующие уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_i^{p+1}}{dt} + \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dx_i^p}{dw_k} = Z_i^p + \sum_k \frac{d^2F_1}{dy_i^0 dy_k^0}\, y_k^{p-1},\\
&\frac{dy_i^p}{dt} + \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dy_i^{p-1}}{dw_k} = T_i^p - \sum_k \frac{d^2F_0}{dx_i^0 dx_k^0}\, x_k^p,
\end{aligned} \tag{4}$$

где Z_i^p и T_i^p зависят лишь от

$$\begin{aligned}
&x_i^0,\ x_i^1,\ \ldots,\ x_i^{p-1},\\
&y_i^0,\ y_i^1,\ \ldots,\ y_i^{p-2}.
\end{aligned}$$

Условимся, как мы уже это делали раньше, через $[U]$ обозначать среднее значение U, если U периодическая функция t.

Из уравнений (4) мы сможем тогда вывести следующие:

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits_k \alpha_k^1 w_k \frac{d[x_i^p]}{dw_k} = [Z_i^p] + \sum\nolimits_k \left[\frac{d^2F_1}{dy_i^0 dy_k^0}\, y_k^{p-1}\right],\\
&\sum\nolimits_k \alpha_k^1 w_k \frac{d[y_i^{p-1}]}{dw_k} = [T_i^p] - \sum\nolimits_k \frac{d^2F_0}{dx_i^0 dx_k^0}\,[x_k^p].
\end{aligned} \tag{5}$$

Предположим теперь, что из предварительных вычислений мы уже нашли

$$\begin{aligned}
&x_i^0, x_i^1, \ldots, x_i^{p-1},\quad x_i^p - [x_i^p],\\
&y_i^0, y_i^1, \ldots, y_i^{p-2}, y_i^{p-1} - [y_i^{p-1}].
\end{aligned}$$

Уравнения (5) позволят вычислить $[x_i^p]$ и $[y_i^{p-1}]$ и, следовательно, x_i^p и y_i^{p-1}. Уравнения (4) позволят затем определить

$$x_i^{p+1} - [x_i^{p+1}] \text{ и } y_i^p - [y_i^p],$$

так что этот способ даст по индукции все коэффициенты разложений x_i и y_i.

Единственная трудность заключается в определении $[x_i^p]$ и $[y_i^{p-1}]$ из уравнений (5).

Функции $[x_i^p]$ и $[y_i^{p-1}]$ разложены в ряды по возрастающим степеням w, и мы будем вычислять различные члены этих разложений, начиная с членов наименьшей степени.

Для этого вернемся к обозначениям п. 79, т. е. положим

$$-\frac{d^2F_0}{dx_i^0 dx_k^0} = C_{ik}^0 \quad \text{и} \quad \left[\frac{d^2F_1}{dy_i^0 dy_k^0}\right] = b_{ik}$$

(для нулевых значений w).

Тогда если мы обозначим через ξ_i и η_i коэффициенты при

$$w_1^{m_1}, w_2^{m_2}, \ldots, w_{n-1}^{m_{n-1}}$$

в $[x_i^p]$ и $[y_i^{p-1}]$, то для определения этих коэффициентов будем иметь следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \Sigma_k b_{ik}\eta_k - S\xi_i &= \lambda_i, \\ \Sigma_k C_{ik}^0 \xi_k - S\eta_i &= \mu_i. \end{aligned} \tag{6}$$

В уравнениях (6) λ_i и μ_i — известные величины, потому что они зависят лишь от

$$\begin{aligned} &x_i^0,\ x_i^1, \ldots, x_i^{p-1},\ x_i^p - [x_i^p], \\ &y_i^0,\ y_i^1, \ldots, y_i^{p-2},\ y_i^{p-1} - [y_i^{p-1}] \end{aligned}$$

или же от членов разложений $[x_i^p]$ и $[y_i^{p-1}]$, степень которых по w меньше, чем

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1}.$$

Кроме того, для краткости мы полагали

$$S = m_1\alpha_1^1 + m_2\alpha_2^1 + \ldots + m_{n-1}\alpha_{n-1}^1.$$

Итак, для вычисления коэффициентов ξ_i и η_i у нас есть система линейных уравнений. Трудность может возникнуть лишь в том случае, если детерминант этой системы равен нулю. Но этот детерминант равен

$$S^2[S^2 - (\alpha_1^1)^2][S^2 - (\alpha_2^1)^2] \ldots [S^2 - (\alpha_{n-1}^1)^2].$$

Он может обращаться в нуль лишь при

$$S = 0, \quad S = \pm\alpha_i^1,$$

т. е. при

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1} = 0 \quad \text{или} \quad 1.$$

Следовательно, затруднение может встретиться лишь в вычислении членов нулевой и первой степени по w.

Но нам не надо возвращаться к вычислению этих членов; действительно, мы научились вычислять члены, не зависящие от w, в п. 44 и коэффициенты при

$$w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$$

в п. 79. В самом деле, члены не зависящие от w, суть не что иное, как ряды (2) из п. 44, а коэффициенты при

$$w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$$

— не что иное, как ряды S_i и T_i из п. 79.

Мне остается сказать несколько слов о первых приближениях.

Мы придадим x_i^0 постоянные значения, такие же, как в п. 44.

Тогда будем иметь следующие уравнения:

$$\frac{dy_i^0}{dt} = 0, \qquad \frac{dx_i^1}{dt} = 0, \qquad \frac{dy_i^1}{dt} + \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dy_i^0}{dw_k} = -\sum_k \frac{d^2F_0}{dx_i^0 dx_k^0} x_k^1,$$
$$\frac{dx_i^2}{dt} + \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dx_i^1}{dw_k} = \frac{dF_1}{dy_i^0}. \tag{7}$$

В F_0, зависящем лишь от x_i, эти величины должны быть заменены на x_i^0. В F_1 величины x_i заменены на x_i^0, а y_i на $n_i t$. Тогда F_1 становится периодической функцией t с периодом T. Мы обозначим через ψ среднее значение этой периодической функции F_1; ψ будет тогда периодической функцией y_i^0 с периодом 2π.

Два первых уравнения (7) показывают, что y_i^0 и x_i^1 зависят лишь от w.

Приравнивая в двух последних уравнениях (7) средние значения обеих частей, получаем

$$\sum \alpha_k^1 w_k \frac{dy_i^0}{dw_k} = \sum C_{ik}^0 x_k^1,$$
$$\sum \alpha_k^1 w_k \frac{dx_i^1}{dw_k} = \frac{d\psi}{dy_i^0}. \tag{8}$$

Уравнения (8) должны служить для определения y_i^0 и x_i^1 как функций от w. Можно ли удовлетворить этим уравнениям, подставляя вместо y_i^0 и x_i^1 ряды по степеням w? Чтобы разобраться в этом, рассмотрим следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{dy_i^0}{dt} = \sum C_{ik}^0 x_k^1,$$
$$\frac{dx_i^1}{dt} = \frac{d\psi}{dy_i^0}. \tag{9}$$

Эти дифференциальные уравнения относительно функций y_i^0 и x_i^1 допускают периодическое решение

$$x_i^1 = 0, \qquad y_i^0 = \varpi_i,$$

где обозначение ϖ_i было введено в п. 44.

Характеристические показатели, соответствующие этому периодическому решению, суть в точности величины α_i^1. Мы условились сохранять лишь те из этих величин, вещественная часть которых положительна. Уравнения (9) допускают систему асимптотических решений, и легко видеть, что эти решения представляются в виде рядов по степеням w. Тогда эти ряды будут удовлетворять уравнениям (8). Итак, эти уравнения разрешимы.

После того как мы определили таким образом x_i^1 и y_i^0, остальные вычисления больше не представляют, как мы уже видели, никакой трудности.

Следовательно, существуют ряды по степеням $\sqrt{\mu}$, w и $e^{\pm t\sqrt{-1}}$, формально удовлетворяющие уравнениям (1).

Это доказывает, что разложение N/Π в ряд никогда не начинается с отрицательной степени $\sqrt{\mu}$. Исследование пунктов **110** и **111** даст нам новое доказательство этого.

Расходимость рядов п. 108

109. К несчастью, ряды, полученные таким образом, не сходятся. Рассмотрим в самом деле

$$\frac{1}{\sqrt{-1}\gamma + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i}.$$

Если γ не равно нулю, то это выражение можно разложить в ряд по степеням $\sqrt{\mu}$; однако радиус сходимости полученного таким образом ряда стремится к нулю, когда $\gamma/\Sigma\beta$ стремится к нулю.

Итак, если мы разлагаем в ряд различные величины $1/\Pi$ по степеням $\sqrt{\mu}$, можно всегда найти среди этих величин бесконечное число таких, у разложений которых радиус сходимости как угодно мал.

Можно было бы еще надеяться, сколь бы невероятным это ни показалось, что дело обстоит иначе для разложений различных величин N/Π; но доказательство, которое я дал в т. XIII «Acta mathematica» (стр. 222) [23] и к которому я возвращусь впоследствии, показывает, что в общем случае это не так. Итак, следует отказаться от этой слабой надежды и прийти к выводу, что ряды, которые мы только что построили, расходятся.

Но нельзя ли извлечь из них некоторую пользу, даже если они и рас-

Рассмотрим сначала следующий ряд, более простой, чем наши ряды:

$$F(w, \mu) = \sum_n \frac{w^n}{1 + n\mu}.$$

Этот ряд сходится равномерно, когда μ остается положительным и w остается меньше по абсолютной величине, чем положительное число w_0, меньшее единицы, в остальном произвольное. Ряд

$$\frac{1}{p!}\frac{d^p F(w,\mu)}{d\mu^p} = \pm \sum \frac{n^p w^n}{(1 + n\mu)^{p+1}}$$

также сходится равномерно.

Если теперь мы попытаемся разложить $F(w, \mu)$ в ряд по степеням μ, то ряд, к которому мы приходим,

$$\Sigma w^n (-n)^p \mu^p, \tag{10}$$

не сходится . Если в этом ряду пренебречь всеми членами, в которых степень μ больше p, то получим некоторую функцию

$$\Phi_p(w, \mu).$$

Легко видеть, что выражение

$$\frac{F(w, \mu) - \Phi_p(w, \mu)}{\mu^p}$$

стремится к 0, когда μ стремится к 0, оставаясь положительным, так что ряд (10) асимптотически представляет функцию $F(w, \mu)$ при малых значениях μ, так же, как и ряд Стирлинга асимптотически представляет эйлерову функцию при больших значениях x.

Я намерен установить в следующем пункте, что расходящиеся ряды, которые мы научились строить в п. 108, полностью аналогичны ряду (10).

В самом деле, рассмотрим один из рядов

$$\sum \frac{N}{\Pi} w_1^{\beta_1} w_2^{\beta_2} \ldots w_k^{\beta_k} e^{\gamma t \sqrt{-1}} = F(\sqrt{\mu}, w_1, w_2, \ldots, w_k, t); \tag{10'}$$

рассуждения п. 105 показали, что эти ряды равномерно сходятся, если w меньше по абсолютной величине некоторых пределов и $\sqrt{\mu}$ вещественен.

Если разложить N/Π в ряд по степеням $\sqrt{\mu}$, то ряды (10'), как мы уже говорили, будут расходиться. Предположим, что в разложении мы пренебрегаем членами с показателями при $\sqrt{\mu}$, бо́льшими p; мы получим некоторую функцию

$$\Phi_p(\sqrt{\mu}, w_1, w_2, \ldots, w_k, t),$$

которую можно разложить в ряд по степеням w, $e^{\pm t\sqrt{-1}}$ и которая будет многочленом степени p по $\sqrt{\mu}$.

Далее мы увидим, что выражение

$$\frac{F-\Phi_p}{\sqrt{\mu^p}}$$

стремится к нулю, когда μ стремится к нулю, оставаясь положительным, как бы велико ни было p.

В самом деле, если обозначить через H_p множество членов разложения N/Π, в которых показатели при $\sqrt{\mu}$ не превышают p, то получим

$$\frac{F-\Phi_p}{\sqrt{\mu^p}} = \sum \frac{1}{\sqrt{\mu^p}}\left(\frac{N}{\Pi} - H_p\right) w_1^{\beta_1} w_2^{\beta_2} \dots w_k^{\beta_k} e^{\gamma t\sqrt{-1}},$$

и я покажу, что ряд в правой части *равномерно* сходится и что все члены стремятся к 0, когда μ стремится к 0.

Следовательно, можно сказать, что полученные нами в п. 108 ряды представляют асимптотические решения при малых значениях μ, подобно тому как ряд Стирлинга представляет эйлеровы функции.

Новое доказательство предложения п. 108

110. Чтобы доказать это, я подвергну уравнения преобразованию, которое мне в то же время даст новое доказательство теоремы, обсуждавшейся в п. 108. Для определенности предположим, что имеются всего две степени свободы; тогда мы сохраним лишь одну из величин w и сможем записать наши уравнения в следующем виде:

$$\frac{dx_i}{dt} + \alpha w \frac{dx_i}{dw} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} + \alpha w \frac{dy_i}{dw} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 1, 2),$$

отбрасывая ставшие ненужными индексы при α и w.

Нам известно, что α разлагается в ряд по нечетным степеням $\sqrt{\mu}$, и, следовательно, α^2 — по степеням μ; обратно, μ разлагается в ряд по степеням α^2; мы можем заменить μ этим разложением, так что функция F будет разложена в ряд по степеням α^2. При $\alpha = 0$ F сведется к F_0, зависящему лишь от x_1 и x_2.

Пусть

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \psi_i(t)$$

— исходное периодическое решение. Положим, как и в п. 79,

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \qquad y_i = \psi_i(t) + \eta_i;$$

наши уравнения примут вид

$$\frac{d\xi_i}{dt} + \alpha w \frac{d\xi_i}{dw} = \Xi_i, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} + \alpha w \frac{d\eta_i}{dw} = H_i, \tag{11}$$

где Ξ_i и H_i разлагаются в ряды по степеням ξ_i, η_i и α^2, а коэффициенты — периодические функции t.

При $\alpha = 0$, dF/dy_i и, следовательно, Ξ_i обращаются в нуль; итак, Ξ_i делятся на α^2 и я могу положить

$$\Xi_i = \alpha^2 X_i + \alpha^2 X_i',$$

где $\alpha^2 X_i'$ означает сумму членов первой степени по ξ и η, а $\alpha^2 X_i'$ означает сумму членов высших степеней.

Точно так же, когда α равно нулю, dF/dx_i и, следовательно, H_i зависят лишь от ξ_i, но не от η_i.

Итак, я могут положить

$$H_i = Y_i + Y_i' + \alpha^2 Q_i + \alpha^2 Q_i',$$

где $Y_i + \alpha^2 Q_i$ означает сумму членов первой степени по ξ и η, в то время как $Y_i' + \alpha^2 Q_i'$ означает сумму членов степеней, бóльших первой. Кроме того, я предполагаю, что Y_i и Y_i' зависят лишь от ξ_1 и ξ_2.

Положим

$$\xi_1 = \alpha\zeta_1, \qquad \xi_2 = \alpha\zeta_2.$$

Y_i будут делиться на α, а Y_i' — на α^2, так что я смогу положить

$$Y_i + \alpha^2 Q_i = \alpha Z_i, \qquad Y_i' + \alpha^2 Q_i' = \alpha^2 Z_i',$$

и наши уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_i}{dt} + \alpha w \frac{d\zeta_i}{dw} &= \alpha X_i + \alpha X_i', \\ \frac{d\eta_i}{dt} + \alpha w \frac{d\eta_i}{dw} &= \alpha Z_i + \alpha^2 Z_i'. \end{aligned} \tag{12}$$

Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_i}{dt} &= \alpha X_i, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= \alpha Z_i. \end{aligned} \tag{13}$$

Эти уравнения линейны относительно неизвестных ζ_i и η_i. Они отличаются от уравнений из п. 79 лишь тем, что ξ_1 и ξ_2 заменены на $\alpha\zeta_1$ и $\alpha\zeta_2$.

Как мы видели в пунктах 69 и 74, уравнение, определяющее характеристические показатели, имеет четыре корня: один равен $+\alpha$, другой равен $-\alpha$, а оставшиеся два равны нулю.

Первому корню, т. е. корню α, будет соответствовать решение уравнений (2) из п. 79, которое мы научились строить в этом пункте и которое мы записали в виде

$$\xi_i = e^{\alpha t} S_i, \quad \eta_i = e^{\alpha t} T_i.$$

Я напомню, что S_i^0 равно нулю и, следовательно, S_i делятся на α.

Второму корню, $-\alpha$, будет соответствовать другое решение уравнений (2), которое мы запишем в виде

$$\xi_i = e^{-\alpha t} S_i', \qquad \eta_i = e^{-\alpha t} T_i'.$$

Наконец, двум нулевым корням будут соответствовать (ср. п. 80) два решения уравнений (2), которые мы запишем в виде

$$\begin{aligned} \xi_i &= S_i'', & \eta_i &= T_i'', \\ \xi_i &= S_i''' + \alpha t S_i'', & \eta_i &= T_i''' + \alpha t T_i'', \end{aligned}$$

T_i', T_i'', T_i''', S_i', S_i'', S_i''' — периодические функции t, так же как и S_i и T_i.

Как мы видели в пунктах 79 и 80, S_i', S_i'' и $S_i''' = \alpha S_i^*$ будут, как и S_i, делиться на α.

Положим теперь

$$\begin{aligned} \alpha\zeta_1 &= S_1\theta_1 + S_1'\theta_2 + S_1''\theta_3 + S_1'''\theta_4, \\ \alpha\zeta_2 &= S_2\theta_1 + S_2'\theta_2 + S_2''\theta_3 + S_2'''\theta_4, \\ \eta_1 &= T_1\theta_1 + T_1'\theta_2 + T_1''\theta_3 + T_1'''\theta_4, \\ \eta_2 &= T_2\theta_1 + T_2'\theta_2 + T_2''\theta_3 + T_2'''\theta_4. \end{aligned} \tag{13bis}$$

Определенные таким образом функции θ_i будут играть роль, аналогичную той, которую играют функции η_i из п. 105. Уравнения (12) примут тогда вид

$$\begin{aligned} &\frac{d\theta_1}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_1}{dw} - \alpha\theta_1 = \alpha\Theta_1, \quad \frac{d\theta_2}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_2}{dw} + \alpha\theta_2 = \alpha\Theta_2, \\ &\frac{d\theta_3}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_3}{dw} = \alpha\theta_4 + \alpha\Theta_3, \quad \frac{d\theta_4}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_4}{dw} = \alpha\Theta_4, \end{aligned} \tag{14}$$

Θ_1, Θ_2, Θ_3 и Θ_4 — функции, разложенные в ряды по степеням θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 и α, все члены которых по меньшей мере второй степени по переменным θ и коэффициенты которых являются периодическими функциями t. Кроме того, θ должны быть периодическими функциями t и члены первой степени по w в θ_1, θ_2, θ_3 и θ_4 должны сводиться к w, 0, 0, и 0.

Уравнения (14) аналогичны уравнениям (2′) из п. 105.

В самом деле, находим

$$\alpha X_i' = \Theta_1 S_i + \Theta_2 S_i' + \Theta_3 S_i'' + \Theta_4 S_i''',$$
$$\alpha Z_i' = \Theta_1 T_i + \Theta_2 T_i' + \Theta_3 T_i'' + \Theta_4 T_i''',$$

что дает нам четыре уравнения, из которых можно получить четыре функции Θ, поскольку S, T, X' и Z' — известные функции. Я утверждаю, что мы найдем

$$\Theta_i = U_{i,1} X_1' + U_{i,2} X_2' + U_{i,3} Z_1' + U_{i,4} Z_2',$$

где U — периодические функции t, которые можно разложить в ряд по возрастающим и положительным степеням α. В самом деле, для этого достаточно, чтобы детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha} S_1 & \frac{1}{\alpha} S_1' & \frac{1}{\alpha} S_1'' & \frac{1}{\alpha} S_1''' \\ \frac{1}{\alpha} S_2 & \frac{1}{\alpha} S_2' & \frac{1}{\alpha} S_2'' & \frac{1}{\alpha} S_2''' \\ T_1 & T_1' & T_1'' & T_1''' \\ T_2 & T_2' & T_2'' & T_2''' \end{vmatrix}$$

не делился на α, т. е. не обращался в нуль при $\alpha = 0$.

При $\alpha = 0$ S_i/α сводится к величине, которую мы назвали S_i^1 в п. 79, а T_i — к T_i^0, и эти величины удовлетворяют уравнениям (9) и (10) того же п. 79.

Здесь мы разлагаем в ряд не по степеням $\sqrt{\mu}$, а по степеням α, так что величина, которую мы назвали α_1 в п. 79, равна 1. Уравнения (9) из п. 79 будут, следовательно, записываться в виде

$$T_i = \frac{C_{i1}^0 S_1}{\alpha} + \frac{C_{i2}^0 S_2}{\alpha},$$
$$\frac{S_i}{\alpha} = b_{i1} T_1 + b_{i2} T_2$$

и должны будут удовлетворяться при $\alpha = 0$.

Что касается второго решения, для него показатель равен $-\alpha$ и, следовательно, α_1 равно -1, так что эти уравнения примут вид

$$-T_i' = \frac{C_{i1}^0 S_1'}{\alpha} + \frac{C_{i2}^0 S_2'}{\alpha},$$
$$-\frac{S_i'}{\alpha} = b_{i1} T_1' + b_{i2} T_2'.$$

Это позволяет предположить, что

$$T_i' = T_i, \quad S_i' = -S_i.$$

Так как S_i'' делятся на α^2, то S_i''/α обращаются в нуль при $\alpha = 0$. В то же время при $\alpha = 0$ имеем

$$T_i'' = n_i = -\frac{dF_0}{dx_i}.$$

При $\alpha = 0$ $T_i''' = \alpha T_i^*$ обращаются в нуль, и мы имеем

$$\frac{S_i'''}{\alpha} = S_i^* \neq 0.$$

Находим

$$n_i = C_{i1}^0 S_1^* + C_{i2}^0 S_2^*.$$

Отсюда мы можем заключить, что определитель Δ при $\alpha = 0$ сводится к

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} \frac{S_1}{\alpha} & \frac{S_1'''}{\alpha} \\ \frac{S_2}{\alpha} & \frac{S_2'''}{\alpha} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_1 & n_1 \\ T_2 & n_2 \end{vmatrix}.$$

Кроме того, находим

$$\begin{vmatrix} T_1 & n_1 \\ T_2 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{S_1}{\alpha} & \frac{S_1'''}{\alpha} \\ \frac{S_2}{\alpha} & \frac{S_2'''}{\alpha} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_{11}^0 & C_{12}^0 \\ C_{21}^0 & C_{22}^0 \end{vmatrix}.$$

Определитель, образованный из C_{ik}^0, который есть не что иное, как гессиан функции F_0, вообще говоря, не обращается в нуль, так что Δ может обратиться в нуль только, если

$$\frac{T_1}{n_1} = \frac{T_2}{n_2};$$

но если заметить, что

$$n_1 b_{i1} + n_2 b_{i2} = 0,$$

то заключаем отсюда, что

$$\frac{S_1}{\alpha} = \frac{S_2}{\alpha} = 0,$$

а этого не может быть.

Следовательно, детерминант Δ не равен нулю. Можно еще установить это следующим образом. Рассмотрим следующие уравнения:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = b_{i1}\eta_1 + b_{i2}\eta_2,$$

$$\frac{d\eta_i}{dt} = C^0_{i1}\xi_1 + C^0_{i2}\xi_2.$$

Это линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Они допускают четыре линейно независимых решения, а именно:

$$\xi_i = e^t \frac{S_i}{\alpha}, \qquad \eta_i = e^t T_i;$$

$$\xi_i = e^{-t} \frac{S_i'}{\alpha}, \qquad \eta_i = e^{-t} T_i';$$

$$\xi_i = \frac{S_i''}{\alpha}, \qquad \eta_i = T_i'';$$

$$\xi_i = \frac{S_i'''}{\alpha} + t\frac{S_i''}{\alpha}, \qquad \eta_i = T_i''' + tT_i''.$$

Разумеется, в T_i и S_i/α надо положить $\alpha = 0$, так что эти величины сведутся к постоянным.

Поскольку эти четыре решения линейно независимы, их определитель при $t = 0$ не должен обращаться в нуль; но этот определитель как раз и есть Δ. Следовательно, Δ не равен нулю, что и требовалось доказать.

Таким образом, мы видим, что функции Θ_i действительно обладают указанными свойствами.

111. Предыдущие исследования немедленно распространяются на случай, когда имеется больше двух степеней свободы. Если мы положим

$$\xi_i = \sqrt{\mu}\zeta_i,$$

то уравнения можно будет записать, как в предыдущем пункте,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\zeta_i}{dt} + \sum \alpha_k w_k \frac{d\zeta_i}{dw_k} &= \sqrt{\mu} X_i + \mu X_i' \\ \frac{d\eta_i}{dt} + \sum \alpha_k w_k \frac{d\eta_i}{dw_k} &= \sqrt{\mu} Z_i + \mu Z_i' \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Функции X_i, X_i' Z_i и Z_i' обладают теми же свойствами, что и в предыдущем пункте, т. е. их можно разложить в ряды по степеням η_i, ζ_i и $\sqrt{\mu}$ и они являются периодическими по t. Кроме того, X_i и Z_i линейны по η_i и ζ_i, а X_i' и Z_i' содержат лишь члены самое меньшее второй степени относительно этих переменных.

Рассмотрим затем уравнения

$$\frac{d\zeta_i}{dt} = \sqrt{\mu} X_i, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = \sqrt{\mu} Z_i;$$

они допускают $2n - 2$ линейно независимых решений, соответствующих $2n - 2$ характеристическим показателям, не равным нулю; эти решения могут быть записаны в виде

$$\sqrt{\mu}\zeta_i = \xi_i = e^{\alpha_k t} S_{i,k}, \quad \eta_i = e^{\alpha_k t} S_{i,k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n - 2);$$

они допускают сверх того два вырожденных решения, определенных в п. 80, которые я запишу в виде

$$\sqrt{\mu}\zeta_i = S_{i,2n-1}, \qquad \eta_i = T_{i,2n-1}$$

и

$$\sqrt{\mu}\zeta_i = S_{i,2n} + \sqrt{\mu} t S_{i,2n-1}, \qquad \eta_i = T_{i,2n} + \sqrt{\mu} t T_{i,2n-1}.$$

Функции $S_{i,k}$ и $T_{i,k}$ ($k = 1, 2, \ldots, 2n$) периодические по t. Кроме того, $S_{i,k}$ делится на $[\sqrt{\mu}]$.

Мы можем теперь положить

$$\sqrt{\mu}\,\zeta_i = \sum_{k=1}^{2n} S_{i,k}\,\theta_k, \qquad \eta_i = \sum_{k=1}^{2n} T_{i,k}\theta_k,$$

тогда мы получим уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{d\theta_i}{dt} + \sum \alpha_k w_k \frac{d\theta_i}{dw_k} - \alpha_i \theta_i = \sqrt{\mu}\,\Theta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n - 2),\\
&\frac{d\theta_{2n-1}}{dt} + \sum \alpha_k w_k \frac{d\theta_{2n-1}}{dw_k} - \sqrt{\mu}\,\theta_{2n} = \sqrt{\mu}\,\Theta_{2n-1},\\
&\frac{d\theta_{2n}}{dt} + \sum \alpha_k w_k \frac{d\theta_{2n}}{dw_k} = \sqrt{\mu}\,\Theta_{2n}.
\end{aligned} \tag{14bis}$$

Функции Θ_k определены $2n$ уравнениями первой степени

$$X_i' = \sum_{k=1}^{2n} \frac{S_{i,k}}{\sqrt{\mu}}\Theta_k,$$

$$\sqrt{\mu}\,Z_i' = \sum T_{i,k}\Theta_k.$$

Определитель этих $2n$ уравнений, т. е. определитель Δ, образованный из $S_{ik}/\sqrt{\mu}$ и $T_{i,k}$, не обращается в нуль при $\mu = 0$. Это можно было бы

доказать, как в предыдущем пункте; второе доказательство, в частности, может быть применено без изменений в случае, которым мы занимаемся.

Мы заключаем отсюда, что функции Θ_k периодические по t и разлагаются в ряды по возрастающим и положительным степеням θ_i и $\sqrt{\mu}$.

Теперь легко доказать предложение п. 108.

Действительно, предположим, что p характеристических показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ имеют положительную вещественную часть и попытаемся удовлетворить уравнениям (14bis), заменяя θ_i рядами по степеням $w_1, w_2, \ldots, w_p$. Итак, пусть

$$\theta_i = \sum [i, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p, \gamma]\, e^{\gamma\sqrt{-1}} w_1^{\beta_1} w_2^{\beta_2} \ldots w_n^{\beta_p},$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ — положительные целые числа, γ — положительное или отрицательное целое число, а коэффициенты $[i, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p, \gamma]$, которые я для краткости буду также обозначать $[i, \beta_k, \gamma]$,— константы, которые надо определить.

Если мы подставим значения θ_i в Θ_i, то получим

$$\Theta_i = \sum (i, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p, \gamma)\, e^{\gamma\sqrt{-1}} w_1^{\beta_1} w_2^{\beta_2} \ldots w_p^{\beta_p},$$

причем коэффициенты $(i, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p, \gamma)$ или (i, β_k, γ) будут константами, зависящими по некоторому закону от неопределенных коэффициентов $[i, \beta_k, \gamma]$. Я утверждаю, что $[i, \beta_k, \gamma]$, и, следовательно (i, β_k, γ), можно разложить в ряд по возрастающим степеням $\sqrt{\mu}$ и что разложение не содержит отрицательных степеней.

Действительно, уравнения (14bis) нам дают

$$[i, \beta_k, \gamma] = (i, \beta_k, \gamma) \frac{\sqrt{\mu}}{\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha_k\beta_k - \alpha_i}$$

при $i = 1, 2, \ldots, 2n-2$ и

$$[2n, \beta_k, \gamma] = (2n, \beta_k, \gamma) \frac{\sqrt{\mu}}{\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha_k\beta_k},$$

$$[2_{n-1}, \beta_k, \gamma] = \{[2n, \beta_k, \gamma] + (2n-1, \beta_k, \gamma)\} \frac{\sqrt{\mu}}{\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha_k\beta_k}.$$

Эти формулы позволяют вычислить последовательно коэффициенты $[i, \beta_k, \gamma]$. Действительно, если мы условимся говорить, что коэффициент $[i, \beta_k, \gamma]$, так же как и (i, β_k, γ), имеет степень

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p,$$

то легко видеть, что величина (i, β_k, γ) зависит лишь от коэффициентов $[i, \beta_k, \gamma]$ *меньших степеней*, которые мы можем предположить известными из предыдущих вычислений.

Можно также доказать по индукции сформулированное предложение. Действительно, я утверждаю, что оно верно для $[i, \beta_k, \gamma]$, если оно верно для коэффициентов меньшей степени; в самом деле, если это так, то оно будет верно для (i, β_k, γ), который зависит лишь от этих коэффициентов меньшей степени.

Итак, остается доказать, что дробь

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\gamma\sqrt{-1}+\sum\alpha_k\beta_k-\alpha_i}$$

разлагается в ряд по положительным степеням $\sqrt{\mu}$. Но это очевидно, потому, что если γ не равно нулю, то знаменатель не делится на $\sqrt{\mu}$. Если γ равно нулю, то знаменатель делится на $\sqrt{\mu}$, но не на μ, но *то же самое можно сказать о числителе.*

Таким образом, предложение п. 108 снова доказано.

Преобразования уравнений

112. Вернемся к случаю, когда имеются лишь две степени свободы и снова рассмотрим уравнения (14) из п. 110.

Пусть Φ — функция, которая, так же как и Θ_1, Θ_2, Θ_3 и Θ_4, разлагается в ряд по степеням θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, α, $e^{t\sqrt{-1}}$ и $e^{-t\sqrt{-1}}$, причем каждый из ее коэффициентов веществен, положителен и больше по абсолютной величине, чем коэффициент при соответствующем члене в Θ_1, Θ_2, Θ_3 и Θ_4; все члены Φ, кроме того, будут, как и члены Θ_i, по меньшей мере второй степени по θ.

Заметим, что число

$$\frac{n\sqrt{-1}}{\alpha}+p$$

(где n — положительное, отрицательное или равное нулю целое число, а p — положительное целое число, не меньшее единицы) всегда по абсолютной величине больше единицы, каковы бы ни были n, p и α. Но числа, играющие роль делителей (5) из п. 105, разделенные на α, имеют в точности такой вид.

Построим теперь уравнения

$$\theta_1 = w + \Phi, \qquad \theta_2 = \Phi, \qquad \theta_3 = \theta_4 + \Phi, \qquad \theta_4 = \Phi, \tag{15}$$

аналогичные уравнениям (2″) из п. 105.

Из уравнения (14) можно получить θ в виде рядов по степеням w и $e^{\pm t\sqrt{-1}}$, аналогичных рядам (4′) из п. 104. Из уравнений (15) можно получить θ в виде рядов по степеням тех же переменных, что и ряды (4‴) из п. 105. Каждый из членов этих последних рядов положителен и больше по абсо-

лютной величине, чем соответствующий член первых рядов *; итак, если они сходятся, то сходятся и ряды, полученные из уравнений (14).

Но легко видеть, что можно найти число w_0, не зависящее от α, такое, что если $|w| < w_0$, то ряды, полученные из (15), сходятся.

Из этого следует, что ряды по степеням w, полученные из (14), сходятся равномерно, как бы мало ни было μ, как я уже говорил ранее. Это рассуждение во всем подобно рассуждению п. 105, причем функция $\alpha\Phi$ играет роль $\bar{H}^2{}_i + \bar{H}_i{}^3 + \ldots$, α — роль ε, потому что делители (5) имеют вид $n\sqrt{-1} + \alpha p$ и, следовательно, превосходят α по абсолютной величине.

Теперь мы имеем θ в виде рядов по степеням w и $e^{\pm t\sqrt{-1}}$; коэффициенты — известные функции α. Если разложить каждый из этих коэффициентов в ряд по степеням α, то мы получим θ в виде рядов по степеням α. Полученные таким образом ряды расходятся, как мы уже видели ранее; пусть, однако,

$$\theta_i = \theta_i^0 + \alpha\theta_i^1 + \alpha^2\theta_i^2 + \ldots + \alpha^p\theta_i^p + \ldots \tag{16}$$

— эти ряды.

Положим

$$H_1 = \Theta_1 + \theta_1, \qquad H_2 = \Theta_2 - \theta_2, \qquad H_3 = \Theta_3 + \theta_4, \qquad H_4 = \Theta_4.$$

Положим

$$\theta_i = \theta_i^0 + \alpha\theta_i^1 + \alpha^2\theta_i^2 + \ldots + \alpha^p\theta_i^p + \alpha^p u_i, \tag{17}$$

приравнивая θ_i $p+1$ первым членам рядов (16) плюс дополнительный член $\alpha^p u_i$.

Если в H_i заменить θ_i их разложениями (17), то H_i разлагаются в ряд по степеням α и можно записать

$$H_i = \Theta_i^0 + \alpha\Theta_i^1 + \alpha^2\Theta_i^2 + \ldots + \alpha^{p-1}\Theta_i^{p-1} + \alpha^p U_i,$$

где $\Theta_i{}^k$ не зависят от α, а U_i разлагаются в ряды по степеням α.

Тогда мы будем иметь уравнения

$$\frac{d\theta_i^0}{dt} = 0, \qquad \frac{d\theta_i^1}{dt} + w\frac{d\theta_i^0}{dw} = \Theta_i^0,$$

$$\frac{d\theta_i^2}{dt} + w\frac{d\theta_i^1}{dw} = \Theta_i^1, \ \ldots, \qquad \frac{d\theta_i^p}{dt} + w\frac{d\theta_i^{p-1}}{dw} = \Theta_i^{p-1} \tag{18}$$

и затем

$$\frac{du_i}{dt} + \alpha w\frac{du_i}{dw} + \alpha w\frac{d\theta_i^p}{dw} = \alpha U_i. \tag{19}$$

---

* См. далее доказательство, подробно изложенное в аналогичном случае, относящееся к уравнениям (21) и (21bis).

Вот каков вид функции U_i; величины θ_i^k можно рассматривать как известные функции t и w, определенные уравнениями (18) и уравнением (20), которое я напишу ниже, в то время как u_i остаются неизвестными функциями. Тогда функция U_i разложена в ряд по степеням w, $e^{\pm t\sqrt{-1}}$, α и u_i. Кроме того, любой член q-й степени по u_i имеет по меньшей мере степень $p(q-1)$ по α. Действительно, H_i и, следовательно, $\alpha^p U_i$ разлагаются по степеням θ_i и, следовательно, по степеням $\alpha^k\theta_i^k$ и $\alpha_i^p u_i$. Следовательно, любой член q-й степени по u_i будет делиться на α^{pq} в $\alpha^p U_i$ и на $\alpha^{p(q-1)}$ в U_i.

Пусть U_i^0 — значение U_i при α и u_i, равных нулю; будем иметь

$$w\frac{d[\theta_i^p]}{dw} = [U_i^0]. \tag{20}$$

Далее я могу, положив

$$U_i' = U_i - w\frac{d\theta_i^p}{dw}$$

и затем

$$V_1 = U_1' - u_1, \quad V_2 = U_2' + u_2, \quad V_3 = U_3' - u_4, \quad V_4 = U_4',$$

представить уравнения (19) в виде

$$\begin{aligned} &\frac{du_1}{dt} + \alpha w\frac{du_1}{dw} - \alpha u_1 = \alpha V_1, \quad \frac{du_2}{dt} + \alpha w\frac{du_2}{dw} + \alpha u_2 = \alpha V_2, \\ &\frac{du_3}{dt} + \alpha w\frac{du_3}{dw} - \alpha u_4 = \alpha V_3, \qquad \frac{du_4}{dt} + \alpha w\frac{du_4}{dw} = \alpha V_4. \end{aligned} \tag{21}$$

Тогда можно видеть, что V_i содержат лишь члены по меньшей мере второй степени по w и u_i.

В самом деле, θ_i делятся на w и сводятся к w или к 0 при отбрасывании членов, степени выше первой по w. Из этого следует прежде всего, что θ_i^p делится на w^2. С другой стороны, правая часть уравнения (17) будет содержать лишь члены по меньшей мере первой степени по w и по u_i. Итак, Θ_i содержит лишь члены второй степени по w и по u_i. Отсюда следует, что единственные члены первой степени, которые могут уцелеть в U_1, U_2, U_3 U_4, сводятся соответственно к u_1, $-u_2$, u_4 и 0.

Кроме того, $w \doteq d\theta_i^p/dw$ делится на w^2. Итак, V_i содержат лишь члены по меньшей мере второй степени, что и требовалось доказать.

Из уравнений (21) можно получить u_i в виде рядов по степеням w и $e^{\pm t\sqrt{-1}}$. Применяя к этим уравнениям то же рассуждение, что и к уравнениям (14), я докажу, что эти ряды сходятся, когда $|w| < w_0$, и что сходимость остается равномерной, как бы мало ни было α.

То же самое будет иметь место для рядов, представляющих du_i/dw, d^2u_i/dw^2,....

Отсюда будет следовать, что u_i, du_i/dw, d^2u_i/dw^2, ... можно приписать верхнюю грань, не зависящую от α, если только $|w| < w_0$.

Затем я покажу ниже, в пунктах 116 и 117, что это верно и для всех положительных значений w.

В самом деле, пусть Φ — функция, разложенная в ряд по степеням α, u_i, w и $e^{\pm t\sqrt{-1}}$, и такая, что мы имеем (при $i = 1, 2, 3, 4$)

$$V_i \ll \Phi \qquad (\arg u_1, u_2, u_3, u_4, \alpha, w, e^{\pm t\sqrt{-1}}).$$

Пусть Φ' — значение Φ, когда u_1, u_2, u_3, u_4 заменяются на u_1', u_2', u_3', u_4'.

Рассмотрим следующие уравнения:

$$u_1' = w + \Phi', \qquad u_2' = \Phi', \qquad u_3' = u_4' + \Phi', \qquad u_4' = \Phi', \qquad (21\text{bis})$$

аналогичные уравнениям (15). Ясно, что эти уравнения имеют такое решение, что u_1', u_2', u_3',u_4' разлагаются в ряды по степеням w, α и $e^{\pm t\sqrt{-1}}$ и обращаются в нуль вместе с w.

Эти ряды u_1', u_2', u_3', u_4' будут сходящимися, если только $|w|$ не превосходит некоторого предела, который я назову w_0. Сравним теперь уравнения (21) и функции u_1, u_2, u_3, u_4, которые им удовлетворяют, с уравнениями (21bis) и функциями u_1', u_2', u_3', u_4', которые удовлетворяют последним.

Я собираюсь установить, что

$$u_i \ll u_i' \qquad (\arg w, e^{\pm t\sqrt{-1}}).$$

(*Я обращаю внимание на то, что α не входит в число аргументов, относительно которых берется это неравенство.*)

В самом деле, пусть u_i^n и $u_i'^n$ означают суммы членов u_i и u_i' степени самое большее n по w; предположим, что мы установили, что

$$u_i^n \ll u_i'^n.$$

Я покажу, что

$$u_i^{n+1} \ll u_i'^{n+1}.$$

Тем самым я по индукции установлю неравенство, которое надо доказать.

Если подставить в V_i и в Φ' вместо u_i и u_i' разложения этих величин в ряды по степеням w и $e^{\pm t\sqrt{-1}}$, то функции V_i и Φ' сами будут разлагаться в ряды по степеням w и $e^{\pm t\sqrt{-1}}$.

Обозначим еще через V_i^n и Φ'^n сумму членов степени не больше n по w.

Тогда если $u_i^n \ll u_i'^n$, то будем иметь также

$$V_i^{n+1} \ll \Phi'^{n+1}.$$

Пусть

$$Aw^{n+1}e^{pt\sqrt{-1}}$$

— член Φ'^{n+1} и

$$A_i w^{n+1} e^{pt\sqrt{-1}}$$

— соответствующий член V_i^{n+1} ; будем иметь

$$|A_i| < A.$$

Пусть теперь

$$B_i w^{n+1} e^{pt\sqrt{-1}} \quad \text{и} \quad B_i' w^{n+1} e^{pt\sqrt{-1}}$$

— соответствующие члены u_i и u_i'.

Уравнения (21) и (21bis) нам дают тогда

$$B_1 = \frac{A_1}{\frac{p\sqrt{-1}}{\alpha} + n}, \qquad B_2 = \frac{A_2}{\frac{p\sqrt{-1}}{\alpha} + n + 2}, \qquad B_4 = \frac{A_4}{\frac{p\sqrt{-1}}{\alpha} + n + 1},$$

$$B_3 = \frac{B_4 + A_3}{\frac{p\sqrt{-1}}{\alpha} + n + 1},$$

$$B_1' = B_2' = B_4' = A, \quad B_3' = B_4' + A.$$

Так как

$$\left| \frac{p\sqrt{-1}}{\alpha} + n \right| > 1,$$

то имеем

$$|B_i| < B_i',$$

откуда

$$u_i^{n+1} \ll u_i'^{n+1}$$

и по индукции

$$u_i \ll u_i',$$

что и требовалось доказать.

Поскольку это неравенство берется по переменным w и $e^{\pm t\sqrt{-1}}$, оно может быть продифференцировано как по w, так и по t, так что мы имеем

$$\frac{du_i}{dt} \ll \frac{du_i'}{dt}, \qquad \frac{du_i}{dw} \ll \frac{du_i'}{dw}, \qquad \frac{d^2u_i}{dw^2} \ll \frac{d^2u_i'}{dw^2}, \ldots.$$

Пусть $u_i'^0$ — значение u_i' при $t = 0$; если $u_i \ll u_i'$, то для положительных значений w будем иметь

$$|u_i| < u_i'^0.$$

Но величина $u_i'^0$ разлагается в ряд по степеням α; следовательно, можно приписать ей верхнюю грань, не зависящую от α при малых значениях α, поскольку эта величина стремится к конечному пределу, когда α стремится к нулю.

Тем же свойством в силу установленных неравенств обладает и $|u_i|$.

Можно было бы также показать, что тем же свойством обладают производные

$$\left|\frac{du_i}{dt}\right|, \quad \left|\frac{du_i}{dw}\right|, \quad \left|\frac{d^2u_i}{dw^2}\right|,$$

что и требовалось доказать.

Приведение к каноническому виду

113. Заметим, что уравнения (14), а также уравнения (21) можно привести к каноническому виду.

Действительно, если мы положим, как в начале п. 110,

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \qquad y_i = \psi_i(t) + \eta_i,$$

то канонические уравнения движения

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}$$

принимают вид

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dF^*}{d\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{dF^*}{d\xi_i},$$

где F^* определена следующим образом.

Если в функции F заменить x_i и y_i на $\varphi_i(t) + \xi_i$ и $\psi_i(t) + \eta_i$, то полученная функция F разлагается в ряд по степеням ξ и η, причем коэффициенты периодичны по t. Пусть теперь F' — сумма членов степени 0 и 1 по ξ и η; положим

$$F^* = F - F'.$$

Если обозначим через $\delta\xi_i$ и $\delta\eta_i$ некоторые виртуальные приращения ξ_i и η_i, а через δF^* — соответствующее приращение F^*, то эти уравнения можно

будет записать в виде

$$\sum (d\xi_i \delta\eta_i - d\eta_i \delta\xi_i) = \delta F^* \, dt.$$

Что станет с этим уравнением, если взять за новые переменные величины θ_i?

Принимая обозначения, аналогичные обозначениям п. 70, мы положим

$$(U, U') = \sum (S_i T_i' - S_i' T_i)$$

и определим также (U, U''), (U', U''), ...

Из п. 70 мы знаем, что все эти величины равны нулю, за исключением (U, U') и (U'', U'''), которые постоянны. Эти постоянные должны делиться на α, но они могут быть в остальном произвольными, поскольку S_i, T_i, S_i', T_i', ... определены лишь с точностью до постоянного множителя. Следовательно, мы можем положить

$$(U, U') = (U'', U''') = \alpha.$$

Если, с другой стороны, заметить, что

$$d\xi_i = \theta_1 \, dS_i + \theta_2 \, dS_i' + \theta_3 \, dS_i'' + \theta_4 \, dS_i''' + S_i \, d\theta_1 + S_i' \, d\theta_2 + S_i'' \, d\theta_3 + S_i''' \, d\theta_4,$$
$$\delta\xi_i = S_i \delta\theta_1 + S_i' \delta\theta_2 + S_i'' \delta\theta_3 + S_i''' \delta\theta_4, \ldots,$$

то можно заключить, что

$$\alpha (d\theta_1 \, \delta\theta_2 - d\theta_2 \delta\theta_1 + d\theta_3 \delta\theta_4 - d\theta_4 \delta\theta_3) = (\delta F^* + \delta\Omega) \, dt,$$

где через $\delta\Omega$ обозначено линейное как по θ_i, так и по $\delta\theta_i$ однородное выражение, причем коэффициенты этой билинейной функции периодичны по t.

Я утверждаю, что $\delta\Omega$ — точный дифференциал; в самом деле, уравнения (14) нам дают

$$\alpha (d\theta_1 \delta\theta_2 - d\theta_2 \delta\theta_1 + d\theta_3 \delta\theta_4 - d\theta_4 \delta\theta_3) = \alpha^2 (\delta G + \delta G') \, dt,$$

где δG — точный дифференциал функции

$$G = \theta_1 \theta_2 + \frac{\theta_4^2}{2}$$

и где

$$\delta G' = \Theta_1 \delta\theta_2 - \Theta_2 \delta\theta_1 + \Theta_3 \delta\vartheta_4 - \Theta_4 \delta\theta_3.$$

Я утверждаю, что $\delta F^* + \delta\Omega = \alpha^2 (\delta G + \delta G')$ — точный дифференциал; чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что в этом выражении члены первой степени по θ_i, сводящиеся к δG, являются полным дифференциалом и то же самое верно для членов степени выше первой, поскольку δF^* — точный дифференциал и $\delta\Omega$ содержит лишь члены первой степени.

Итак, мы можем положить

$$\delta F^* + \delta\Omega = \alpha^2 \delta\Phi,$$

где

$$\Phi = G + \frac{F''}{\alpha^2},$$

причем F'' обозначает множество членов F степени выше второй по ξ_i и η_i.

Следовательно, мы можем записать

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \alpha \frac{\alpha\Phi}{d\theta_2}, \qquad \frac{d\theta_2}{dt} = -\alpha \frac{d\Phi}{d\theta_1}.$$

Вспоминая, что θ зависят от t не только непосредственно, но и через w, мы запишем эти уравнения в виде

$$\frac{d\theta_1}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_1}{dw} = \alpha \frac{d\Phi}{d\theta_2}, \qquad \frac{d\theta_2}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_2}{dw} = -\alpha \frac{d\Phi}{d\theta_1}, \tag{14bis}$$

к которым надо добавить два аналогичных уравнения, получающиеся из предыдущих при замене θ_1 и θ_2 на θ_3 и θ_4.

Таким образом, мы привели уравнения (14) к каноническому виду.

Надо то же самое сделать и с уравнениями (21).

Если в Φ заменить θ_i их значениями (17), то полученная функция разлагается в ряд по возрастающим степеням α и u_i; если затем мы обозначим через $\alpha^{2p}\Phi'$ множество членов степени по меньшей мере $2p$ по α, то наши уравнения превратятся в

$$\frac{du_i}{dt} + \alpha w \frac{du_1}{dw} = \alpha \frac{d\Phi'}{du_2}, \qquad \frac{du_2}{dt} + \alpha w \frac{du_2}{dw} = -\alpha \frac{d\Phi'}{du_1} \tag{21bis}$$

и два аналогичных уравнения.

Таким образом, мы привели уравнения (21) к каноническому виду.

Вид функций V_i

114. Рассмотрим функцию

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

и заменим в ней x_i на

$$x_i^0 + \alpha x_i^1 + \alpha^2 x_i^2 + \ldots + \alpha^{p+1} x_i^{p+1} + \alpha^{p+1} v_i \tag{22}$$

и y_i на

$$n_i t + y_i^0 + \alpha y_i^1 + \alpha^2 y_i^2 + \ldots + \alpha^p y_i^p + \alpha^p v_i'. \tag{22bis}$$

Обозначения

$$x_i^0,\ x_i^1,\ x_i^2,\ \ldots,\ x_i^{p+1},\qquad (23)$$
$$n_i,\ y_i^0,\ y_i^1,\ \ldots,\ y_i^p$$

имеют тот же смысл, что и в п. 108. Единственная разница заключается в том, что у нас имеются здесь лишь две степени свободы и параметр, по которому мы разлагаем в ряд и который играет роль μ, равен здесь α^2; величины (23), следовательно, являются известными функциями v и w. Что касается $\alpha^{p+1}v_i$ и $\alpha^p v_i'$, то это некоторые дополнительные члены. Я намерен исследовать, при каком условии F разлагается в ряд по степеням α, v_i и v_i'.

Положим для краткости

$$\alpha x_i^1 + \alpha^2 x_i^2 + \ldots + \alpha^{p+1}x_i^{p+1} + \alpha^{p+1}v_i = x_i',$$
$$\alpha y_i^1 + \alpha^2 y_i^2 + \ldots + \alpha^p y_i^p + \alpha^p v_i' = y_i'.$$

Для того чтобы функция

$$F\,(x_i^0 + x_i',\ n_i t + y_i^0 + y_i')$$

разлагалась в ряд по возрастающим степеням x_i' и y_i' и, следовательно, по степеням α, v_i и v_i', очевидно, необходимо и достаточно, чтобы точка

$$x_i = x_i^0, \qquad y_i = n_i t + y_i^0$$

не была особой точкой для F.

Но x_i^0 и n_i — константы, а y_i^0 — функции w, определенные уравнениями (8) из п. 108. Далее, в большинстве приложений функция F остается голоморфной, каковы бы ни были вещественные значения y_i^0, если x_i^0 и n_i имеют постоянные значения, соответствующие периодическому решению.

Возьмем, например, задачу из п. 9 и предположим, что $x_1 = L$, $x_2 = G$ определяют форму эллипса, описанного бесконечно малой массой, а $y_1 = l$, $y_2 = g - t$ определяют положение перигелия этого эллипса и положение массы на орбите.

Для того чтобы F перестала быть голоморфной, эта бесконечно малая масса должна была бы встретить одну из двух других масс; если эллипс не пересекает окружности, описанной второй массой, как это и бывает почти во всех приложениях, то эта встреча никогда не сможет произойти, каковы бы ни были вещественные значения l и $g - t$.

Так же обстоит дело в случае большего числа степеней свободы, когда мы исследуем задачу трех тел во всей общности.

Тогда переменные x_i определяют форму эллипсов и взаимное наклонение их плоскостей, переменные y_i определяют положение узлов, перигелиев и самих масс. Тогда в большинстве случаев значениям x_i^0 переменных x_i, соответствующим периодическому решению и предельному значе-

нию $\mu = 0$, отвечают два эллипса, которые не могут пересекаться, как бы они ни вращались в своих плоскостях. Функция F, следовательно, не может перестать быть голоморфной ни при каких вещественных значениях y_i.

Таким образом, мы должны предположить, что при $x_i = x_i^0$ F голоморфна для всех вещественных значений y_i. Случаи, когда это не так, не имеют значения с точки зрения приложений.

Впрочем, мы всегда делали это предположение.

Если теперь заменить в F величины x_i и y_i выражениями (22), то F разлагается в ряд по степеням α, v_i и v_i' и это разложение, коэффициенты которого зависят от t и w, сходится при всех значениях t и w. Радиусы сходимости как по α, так и по v_i и v_i' непрерывно зависят от t и w и не обращаются в нуль ни при одном вещественном значении этих переменных.

Если заметить, что x_i, θ_i, u_i, ξ_i, v_i, ... связаны между собой соотношениями

$$x_i = \varphi_i(t) + \alpha\zeta_i, \qquad y_i = \psi_i(t) + \eta_i$$

и соотношениями (13bis), (17) и (23), то можно заключить, что F и, следовательно, Φ' разлагаются в ряды по степеням α и u_i, что коэффициенты разложений и радиусы сходимости непрерывно зависят от t и w и что эти радиусы сходимости не обращаются в нуль ни при одном вещественном значении t и w.

Из этого факта и из того, что мы уже знаем о функциях V_i' (которые являются не чем иным, как производными Φ'), мы можем заключить следующее.

Можно найти два вещественных положительных числа M и β, не зависящих от t и w и достаточно больших, для того чтобы выполнялось (полагая для краткости $s = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$)

$$V_i \ll Mw^2 + Mws + \frac{M\alpha^p s^2}{1 - \beta\alpha - \beta\alpha^p s} \qquad (\arg\alpha, u_1, u_2, u_3, u_4)$$

для всех вещественных значений t и всех значений w, заключенных между 0 и произвольным верхним пределом W. Величина W может быть сколь угодно велика, но числа M и β должны быть выбраны тем бо́льшими, чем больше будет W.

Фундаментальная лемма

115. Установим теперь следующую лемму.

Пусть $\varphi(x, t, w)$, $\varphi'(x, t, w)$ — две функции от x, t и w, которые разлагаются в ряды по степеням x и такие, что для всех рассматриваемых значений t и w

$$\varphi \ll \varphi' \quad (\arg x).$$

Рассмотрим два следующих уравнения:

$$\frac{dx}{dt} + \alpha w \frac{dx}{dw} = \varphi(x, t, w) \tag{1}$$

и

$$\frac{dx'}{dt} + \alpha w \frac{dx'}{dw} = \varphi'(x', t, w). \tag{1'}$$

Рассмотрим частные решения каждого из этих двух уравнений, выбранные так, что при $w = w_0$ (w_0 — произвольное положительное значение) имеем

$$|x| < x'.$$

Я утверждаю, что при всех значениях w, бо́льших w_0, будет еще выполняться

$$|x| < x'. \tag{2}$$

Заменим переменные, положив

$$t = \frac{1}{\alpha} \log w + \tau.$$

Мы будем иметь, обозначая через ∂ частные производные, взятые по переменным τ и w,

$$\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{dx}{dw} + \frac{1}{\alpha w} \frac{dx}{dt}.$$

Поэтому наши уравнения примут вид

$$\alpha w \frac{\partial x}{\partial w} = \varphi, \qquad \alpha w \frac{\partial x'}{\partial w} = \varphi'.$$

Если для некоторой системы значений переменных

$$w = w_1, \qquad \tau = \tau_1$$

неравенство (2) удовлетворяется, то

$$|\varphi| < \varphi',$$
$$\left|\frac{\partial x}{\partial w}\right| < \frac{\partial x'}{\partial w},$$

так что неравенство (2) будет еще удовлетворяться при

$$w = w_1 + dw, \qquad \tau = \tau_1,$$

поскольку

$$|x| < x', \left|\frac{\partial x}{\partial w} dw\right| < \frac{\partial x'}{\partial w} dw$$

и, следовательно,

$$\left|x + \frac{\partial x}{\partial w} dw\right| < |x| + \left|\frac{\partial x}{\partial w} dw\right| < x' + \frac{\partial x'}{\partial w} dw.$$

Итак, для того чтобы неравенство (2) сохранялось при

$$w > w_0, \qquad \tau = \tau_1,$$

достаточно, чтобы оно было справедливо при

$$w = w_0, \qquad \tau = \tau_1.$$

Но мы предположили, что оно справедливо при любом t и, следовательно, τ при $w = w_0$; следовательно, оно сохранится при любом τ и, следовательно, t при $w > w_0$, что и требовалось доказать.

Можно было бы абсолютно таким же образом доказать немного более общую лемму.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_n'$ — функции $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ и w разлагающиеся в ряды по степеням x и такие, что при всех рассматриваемых значениях t и w имеют место неравенства

$$\varphi_1 \ll \varphi_1', \qquad \varphi_2 \ll \varphi_2', \ldots, \varphi_n \ll \varphi_n' \qquad (\arg x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Рассмотрим уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} + \alpha w \frac{dx_i}{dw} = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t, w) \tag{3}$$

и

$$\frac{dx_i'}{dt} + \alpha w \frac{dx_i'}{dw} = \varphi_i'(x_1', x_2', \ldots, x_n', t, w) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3'}$$

Предположим, что для любого t при $w = w_0$ мы имеем

$$|x_i| < x_i',$$

тогда это неравенство справедливо при любом t_0, если $w > w_0$.

Сделаем теперь более частные предположения о функциях φ_i и φ_i'. Предположим:

1) что эти функции периодические по t с периодом 2π;

2) что для малых значений w они разлагаются в ряды по возрастающим степеням w (это может выполняться не для всех рассмотренных значений w; достаточно, чтобы это было справедливо для малых значений переменной);

3) что эти функции разлагаются в ряды по целым степеням параметра α и делятся на α; кроме того, пусть

$$\varphi_i \ll \varphi_i' \qquad (\arg x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha);$$

4) что, если обозначить через $\varphi_i'^0$ и $\varphi_i'^0$ значения функций φ_i и φ_i' при всех x, равных нулю, эти величины φ_i^0 и $\varphi_i'^0$ делятся на w^2.

Если все эти предположения выполнены, то в силу теории, изложенной в предыдущих пунктах, существуют частные решения уравнений (3) и (3′) следующего вида:

$$\begin{aligned} x_i &= A_{i,2}w^2 + A_{i,3}w^3 + \ldots, \\ x_i' &= A_{i,2}'w^2 + A_{i,3}'w^3 + \ldots, \end{aligned} \tag{4}$$

где $A_{i,n}$ и $A_{i,n}'$ — функции t и α, периодические по t и разлагающиеся в ряды по возрастающим степеням α.

Уравнения (3) [или (3′), которые имеют тот же вид] можно привести к виду уравнений (2) из п. 104.

Действительно, рассмотрим снова уравнения (2) из п. 104; они записываются в виде

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \Xi_i,$$

где Ξ_i разлагаются в ряды по степеням ξ_i и очень малого параметра и, кроме того, зависят от t; они обращаются в нуль вместе с ξ_i.

Величины ξ_i зависят от t не только прямо, но и косвенно, через посредство экспонент

$$A_1 e^{\alpha_1 t}, \; A_2 e^{\alpha_2 t}, \; \ldots, \; A_n e^{\alpha_n t}.$$

Здесь мы предполагаем, что все коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равны нулю, за исключением одного; таким образом, мы будем рассматривать лишь одну экспоненту $w = Ae^{\alpha t}$. Итак, ξ_i будут зависеть от t, во-первых, прямо и, во-вторых, через w. Поэтому, если мы обозначим частные производные через d, а полные производные через ∂, то получим

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \frac{d\xi_i}{dt} + \alpha w \frac{d\xi_i}{dw},$$

и наши уравнения примут вид

$$\frac{d\xi_i}{dt} + \alpha w \frac{d\xi_i}{dw} = \Xi_i. \tag{5}$$

Единственное формальное отличие уравнений (3) от уравнений (5) заключается в том, что правые части уравнений (3) зависят от w и не обра-

щаются в нуль при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Однако легко избавиться от этого формального отличия. Для этого достаточно присоединить к уравнениям (3) следующее уравнение:

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} + \alpha w \frac{dx_{n+1}}{dw} = \alpha x_{n+1},$$

которое допускает решение $x_{n+1} = w$, и заменить w на x_{n+1} в функциях φ_i.

Тогда функции φ_i не будут больше содержать w и будут обращаться в нуль при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+1} = 0.$$

Итак, мы можем применить к уравнениям (3) и (3′) результаты п. 104 и прийти к выводу, что эти уравнения допускают решения вида (4).

Вычисление коэффициентов $A_{i,2}$, $A_{i,3}$, ... производится очень просто по индукции способом п. 104.

Итак, предположим, что мы нашли таким образом

$$|A_{i,2}| < A'_{i,2}$$

при любом t.

Отсюда мы заключаем, что

$$\lim \left| \frac{x_i}{w^2} \right| < \lim \frac{x_i'}{w^2} \quad (\text{при} \quad w = 0)$$

и что, следовательно, можно найти значение w_0 переменной w, достаточно малое для того, чтобы выполнялось

$$|x_i| < x'_i$$

для всех вещественных значений t и всех значений w, меньших w_0 и больших нуля.

Тогда мы будем иметь в силу доказанной выше леммы

$$|x_i| < x'_i$$

для всех вещественных значений t и всех положительных значений w.

Аналогия между рядами п. 108 и рядами Стирлинга

116. Применим предыдущую лемму к уравнениям (21), которые мы запишем в виде

$$\frac{du_i}{dt} + \alpha w \frac{du_i}{dw} = \alpha U'_i. \tag{21}$$

Как мы видели в конце п. 114, мы можем найти два положительных числа M и β, таких, что для всех вещественных значений t и всех значений w, заключенных между 0 и W (и это остается справедливым, как бы велико ни было W), мы будем иметь

$$U_i' \leqslant u_k + Mw^2 + Mws + \frac{M\alpha^p s^2}{1-\beta\alpha-\beta\alpha^p s} \qquad (\arg\alpha, u_1, u_2, u_3, u_4),$$
$$s = u_1 + u_2 + u_3 + u_4.$$

Что касается индекса k у u_k, то он равен i при $i = 1$ или 2 и равен 4 при $i = 3$ или 4. Теперь положим

$$u_k + Mw^2 + Mws + \frac{M\alpha^p s^2}{1-\beta\alpha-\beta\alpha^p s} = \Phi(w, u_1, u_2, u_3, u_4)$$

и сравним уравнения

$$\frac{du_i'}{dt} + \alpha w \frac{du_i'}{dw} = \alpha\Phi(w, u_1', u_2', u_3', u_4') \qquad (21\text{bis})$$

с уравнениями (21).

Среди частных решений уравнений (21) и (21bis) мы выберем те, которые делятся на w^2 (это будут именно те решения, которые мы выше обозначали через u_i).

Ясно, что мы всегда можем взять M достаточно большим, чтобы

$$\left|\lim\frac{u_i}{w^2}\right| < \lim\frac{u_i'}{w^2}.$$

Отсюда мы заключим, что

$$|u_i| < u_i'$$

при

$$0 < w < W.$$

Попытаемся теперь проинтегрировать уравнения (21bis). Я замечу прежде всего, что, так как Φ не зависит от t, u_i' тоже не зависят от t и мы имеем

$$u_1' = u_2' = u_3' = u_4' = \frac{s'}{4},$$
$$\frac{1}{4} w \frac{ds'}{dw} = \frac{s'}{4} + Mw^2 + Ms'w + \frac{M\alpha^p s'^2}{1-\beta\alpha-\beta\alpha^p s'}.$$

Это последнее уравнение имеет интеграл

$$s' = \varphi(w, \alpha),$$

разлагающийся в ряд по степеням w и α и делящийся на w^2. Когда α стремится к 0, s', очевидно, стремится к интегралу уравнения

$$\frac{1}{4} w \frac{ds'}{dw} = \frac{s'}{4} + Mw^2 + Ms'w.$$

Это линейное уравнение интегрируется очень просто, и мы находим

$$\lim s' = w\,(e^{4Mw} - 1) \qquad (\text{при } \alpha = 0).$$

Эта формула нужна мне только для того, чтобы заключить, что если

$$0 < w < W,$$

то s' и, следовательно, u_1, u_2, u_3 и u_4 стремятся к конечному пределу, когда α стремится к 0.

Отсюда следует, что ряд

$$\theta_i^0 + \alpha\theta_i^1 + \alpha^2\theta_i^2 + \ldots$$

представляет функцию θ_i *асимптотически* (т. е. подобно ряду Стирлинга) или, другими словами, что выражение

$$\frac{\theta_i - \theta_i^0 - \alpha\theta_i^1 - \alpha^2\theta_i^2 - \ldots - \alpha^{p-1}\theta_i^{p-1}}{\alpha^{p-1}}$$

стремится к 0 вместе с α. Действительно, это выражение равно $\alpha\,(\theta_i^p + u_i)$ и мы только что видели, что $\theta_i^p + u_i$ остается конечным, когда α стремится к 0.

117. Но это не все; я утверждаю, что du_i/dw остается конечной, когда α стремится к 0.

Действительно, мы имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du_i}{dw}\right) + \alpha w \frac{d}{dw}\left(\frac{du_i}{dw}\right) + \alpha\left(\frac{du_i}{dw}\right) = \alpha \sum\nolimits_k \frac{dU_i'}{du_k}\frac{du_k}{dw} + \alpha\frac{dU_i'}{dw},$$

dU_i'/du_k и dU_i'/dw — функции t, w, α и u_i; но, как мы только что видели, мы можем ограничить u_i сверху; следовательно, мы можем ограничить сверху также и dU_i'/du_k и dU_i'/dw. Предположим, например, что выполняются неравенства

$$\left|\frac{dU_i'}{du_k}\right| < A, \qquad \left|\frac{dU_i'}{dw}\right| < B \qquad (\text{при } w < W),$$

где A и B — положительные числа.

С другой стороны, мы знаем, что можно ограничить du_i/dw сверху при $w = w_1$, если w_1 меньше величины, обозначенной нами через w_0 в конце п. 112.

Например, предположим, что

$$\left|\frac{du_i}{dw}\right| < u_0' \quad \text{при} \quad w = w_1,$$

где u_0' — положительное число. Пусть затем u' — функция, определенная следующим образом:

$$\frac{du'}{dt} + \alpha w \frac{du'}{dw} = \alpha u' (4A + W) + \alpha B,$$
$$u' = u_0' \quad \text{при} \quad w = w_1.$$

Очевидно, будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{du_i}{dw}\right| < u'.$$

Но легко видеть, что u' зависит лишь от w и удовлетворяет уравнению

$$w \frac{du'}{dw} = u' (4A + W) + B.$$

Следовательно, u' конечно; значит, du_i/dw остается конечной, когда α стремится к 0. Итак, мы имеем асимптотически (вкладывая в это слово тот же смысл, что и выше)

$$\frac{d\theta_i}{dw} = \frac{d\theta_i^0}{dw} + \alpha \frac{d\theta_i^1}{dw} + \alpha^2 \frac{d\theta_i^2}{dw} + \ldots.$$

Можно было бы также доказать, что асимптотически

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \frac{d\theta_i^0}{dt} + \alpha \frac{d\theta_i^1}{dt} + \alpha^2 \frac{d\theta_i^2}{dt} + \ldots,$$

$$\frac{d^2\theta_i}{dw^2} = \frac{d^2\theta_i^0}{dw^2} + \alpha \frac{d^2\theta_i^1}{dw^2} + \alpha^2 \frac{d^2\theta_i^2}{dw^2} + \ldots.$$

Итак, вот конечный вывод, к которому мы приходим. Ряды

$$x_i^0 + \sqrt{\mu} x_i^1 + \mu x_i^2 + \ldots, \quad n_i t + y_i^0 + \sqrt{\mu} y_i^1 + \mu y_i^2 + \ldots,$$

определенные в этом пункте, расходятся, но они имеют то же свойство, что и ряды Стирлинга, так что асимптотически выполняются равенства

$$x_i = x_i^0 + \sqrt{\mu} x_i^1 + \mu x_i^2 + \ldots,$$
$$y_i = n_i t + y_i^0 + \sqrt{\mu} y_i^1 + \mu y_i^2 + \ldots.$$

Более того, если D — произвольный символ дифференцирования, т. е. если мы полагаем

$$Df = \frac{d^{\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_k} f}{dt^{\lambda_0} dw_1^{\lambda_1} dw_2^{\lambda_2} \ldots dw_k^{\lambda_k}},$$

то асимптотически

$$Dx_i = Dx_i^0 + \sqrt{\mu} Dx_i^1 + \mu Dx_i^2 + \ldots,$$
$$Dy_i = D(n_i t + y_i^0) + \sqrt{\mu} Dy_i^1 + \mu Dy_i^2 + \ldots.$$

Что касается изучения рядов, аналогичных рядам Стирлинга, я отсылаю читателя к § 1 моего мемуара, опубликованного в «Acta mathematica» (t. VIII, p. 295) [29]. Кроме того, ясно, что подобные же рассуждения остались бы в силе, если бы имелось больше двух степеней свободы и, следовательно, $n - 1$ переменных w_1, w_2, ..., w_{n-1} вместо одной.

НОВЫЕ МЕТОДЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

II

МЕТОДЫ НЬЮКОМА, ГИЛЬДЕНА, ЛИНДШТЕДТА И БОЛИНА

LES MÉTHODES NOUVELLES DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE

II

METHODES DE MM. NEWCOMB, GYLDÉN, LINDSTEDT ET BOHLIN

ПРЕДИСЛОВИЕ

Методы, которые я хочу изложить во втором томе, возникли в результате усилий многих современных астрономов. Однако бóльшую часть этого тома я посвящу методам Гильдена, которые наиболее совершенны.

Одна общая черта присуща всем этим методам. Ученые, разработавшие их, стремились к тому, чтобы разлагать координаты небесных тел в ряды, все члены которых представляют собой периодические функции, и таким образом избавляться от встречавшихся в старых методах последовательных приближений членов, называемых *вековыми*, в которые время не входит под знаком синуса или косинуса. Но зато авторов новых методов не интересовал вопрос о том, сходятся ли получаемые ими ряды в том смысле, в каком понимают сходимость геометры.

Поэтому то, что я намереваюсь изложить, истинно лишь в некотором приближении, точность которого, несомненно, очень велика (причем тем больше, чем меньше массы планет), в то время как результаты, полученные в первом томе, были выведены со всей привычной для геометров строгостью. Оценить точно ошибку, совершаемую в каждом отдельном случае, весьма трудно, но можно найти верхний предел ошибки, который, вероятно, будет значительно завышен.

В самом деле, члены этих рядов сначала очень быстро убывают, а затем начинают возрастать. Но поскольку астрономы обрывают разложение после нескольких первых членов и задолго до того, как эти члены перестают убывать, то для практических целей получаемое приближение оказывается достаточным.

Расходимость таких разложений будет представлять неудобство лишь в том случае, если мы будем пытаться использовать их для строгого обоснования некоторых результатов, например для доказательства устойчивости солнечной системы.

В главе VIII я стараюсь разъяснить, в чем состоит различие в понимании слова «сходимость» между геометрами и астрономами, каким образом астрономы могут пользоваться рядами, которые геометры называют *расходящимися*, и как можно к таким рядам применять обычные правила анализа. Методы, которые позволили мне получить эти последние результаты, быть может, несколько громоздки, но обладают тем преимуществом, что позволяют найти верхний предел ошибки. Впрочем, можно связать главу VIII с теми рассуждениями, которые приведены в конце главы VII.

В последующих главах я излагаю наиболее простые из новых методов, а именно методы Ньюкома и Линдштедта. Я показываю, каким образом можно преодолеть некоторые трудности, с которыми приходится сталкиваться при применении этих методов к наиболее общему случаю задачи трех тел.

Имеются две такие трудности. Во-первых, чтобы метод Линдштедта (либо в своей первоначальной форме, либо в том виде, который я придал ему впоследствии) был применим, необходимо, чтобы средние движения в первом приближении не были связаны никаким линейным соотношением с целыми коэффициентами. Однако в задаче трех тел необходимо принимать во внимание не только средние движения планет, но и средние движения перигелиев и узлов. Между тем в первом приближении, т. е. в кеплеровском движении, перигелии и узлы неподвижны, следовательно, их средние движения равны нулю и то условие, о котором говорилось выше, т. е. отсутствие линейного соотношения с целыми коэффициентами, не выполняется. Разъяснив, каким образом следует строить последовательные приближения для того, чтобы преодолеть эту трудность, я перехожу ко второй. Она возникает в том случае, когда эксцентриситеты очень малы. Я показываю, что вторая трудность носит искусственный характер и что ее можно обойти, если в качестве исходной принять следующую точку зрения. Будем считать, что в том случае, когда эксцентриситеты равны нулю, кеплеровские эллипсы переходят не в окружности, а в орбиты, описываемые планетами в случае периодических решений первого сорта, рассмотренных в главе III.

В последующих главах я прежде всего излагаю первые методы Гильдена. Эти методы основаны на принципах, аналогичных тем, о которых только что говорилось, и позволяют преодолеть те же трудности. Многочисленные же частные затруднения, возникающие помимо двух указанных выше трудностей, преодолеваются с помощью искусственных приемов, столь же изящных, сколь и остроумных.

Несколько пунктов я посвящаю методам интегрирования некоторых дифференциальных уравнений, которые Гильдену пришлось рассматривать. Особенно подробно я останавливаюсь на одном из этих уравнений, представляющем особый интерес. Это уравнение рассматривали также и многие другие геометры.

При рассмотрении этих методов я часто отхожу от первоначального изложения их авторами. Я отнюдь не хочу переделывать то, что было сделано ранее и сделано хорошо. Поэтому при изложении этих методов я не старался представить их в виде, наиболее удобном для численных вычислений. Моя цель состояла лишь в том, чтобы наиболее выпукло показать их существо и облегчить сравнение с другими методами.

Когда читатель дойдет до соответствующих разделов, ему станет ясно, что всегда можно избавиться от членов, называемых *вековыми*, которые возникали более или менее искусственно в старых методах вычислений. Однако вычислители часто сталкиваются с более серьезным затруднением,

а именно с наличием малых знаменателей, когда средние движения почти соизмеримы. В этом случае методы, изложенные в первой части этого тома, становятся неприменимыми и необходимо обратиться либо к методу Делоне, либо к тесно связанному с ним методу Болина. Последнему методу я посвящаю отдельную главу. Однако этот метод несовершенен, ибо он приводит если не к малым знаменателям, то по крайней мере к большим множителям, которые могут в некоторых случаях сделать приближение неудовлетворительным. Следовательно, остается сделать еще один шаг. Он состоит в применении второго метода Гильдена, которым и заканчивается том. Даже если этот метод и не обладает совершенством с точки зрения геометра, то по крайней мере он является наиболее совершенным из известных нам методов.

Употребляемые обозначения

Чтобы избавить читателя от необходимости непрестанно обращаться к первому тому, следует кратко напомнить введенные в нем некоторые обозначения, которые будут использованы во втором томе.

Прежде всего напомним, что тело m_2 рассматривается относительно тела m_1, а тело m_3 — относительно центра тяжести тел m_1 и m_2. Я ввел обозначения (см. п. 11)

$$\beta\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \qquad \beta'\mu = \frac{(m_1 + m_2)\, m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

так что параметр μ будет очень малым, а β и β' конечными.

F означает полную энергию системы, деленную на μ. Эта функция допускает разложение по степеням μ.

Определим теперь оскулирующие элементы первой планеты, т. е. тела m_2 в его движении относительно тела m_1.

Через a я обозначил (п. 8) большую полуось, через e — эксцентриситет, через i — наклонение и положил

$$L = \sqrt{a}, \qquad \beta L = \Lambda, \qquad G = \sqrt{a(1 - e^2)}, \qquad \Theta = G\cos i.$$

Через l я буду обозначать среднюю аномалию, через λ — среднюю долготу, θ — долготу узла, $g + \theta$ — долготу перигелия, которая обозначается также через ϖ.

В п. 12 были введены обозначения

$$\xi = \sqrt{2\beta(L - G)}\cos\varpi, \qquad \eta = -\sqrt{2\beta(L - G)}\sin\varpi,$$
$$p = \sqrt{2\beta(G - \Theta)}\cos\theta, \qquad q = -\sqrt{2\beta(G - \Theta)}\sin\theta.$$

Таков смысл символов

$$\beta,\ L,\ \Lambda,\ G,\ \Theta,\ l,\ \lambda,\ g,\ \theta,\ \varpi,\ \xi,\ \eta,\ p,\ q,$$

относящихся к движению первой планеты. Те же символы, но со штрихами имеют те же значения и относятся к движению второй планеты, т. е. к движению тела m_3 относительно центра тяжести тел m_1 и m_2.

Глава VIII

ИСЧИСЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЯДОВ

Различный смысл слова сходимость

118. Геометры и астрономы по-разному понимают слово сходимость. Геометры, всецело озабоченные достижением безукоризненной строгости и зачастую совершенно безразличные к продолжительности сложных вычислений (выполнимость которых они предполагают, не задумываясь о ее фактическом осуществлении), говорят, что некоторый ряд сходится, если сумма его членов стремится к какому-то определенному пределу, даже в том случае, когда первые члены ряда убывают чрезвычайно медленно. В противоположность этому астрономы обычно говорят, что некоторый ряд сходится, если, например, первые двадцать членов этого ряда убывают очень быстро, несмотря на то, что последующие его члены неограниченно возрастают.

В качестве простого примера рассмотрим два ряда, общий член которых имеет вид

$$\frac{1000^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} \quad \text{и} \quad \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{1000^n}.$$

Геометры скажут, что первый ряд сходится и причем быстро, поскольку его миллионный член много меньше 1/999999. Но второй ряд они будут считать расходящимся, поскольку общий член этого ряда неограниченно возрастает.

Астрономы же, наоборот, будут считать первый ряд расходящимся, поскольку первые 1000 членов этого ряда возрастают, а второй ряд сходящимся, так как его первые 1000 членов убывают, причем сначала это убывание происходит очень быстро.

Обе точки зрения законны: первая — в теоретических исследованиях, вторая — в численных приложениях. Обе господствуют безраздельно, но в различных областях, и границы этих областей необходимо четко различать.

Астрономы не всегда точно знают границы применимости своих методов, но ошибаются они редко. То приближение, которым они довольствуются, обычно лежит в тех пределах, где их методы применимы. Кроме того, интуиция позволяет им предвидеть правильный результат, а если бы они и совершили ошибку, то сравнение с наблюдениями позволило бы исправить ее надлежащим образом.

Все же я полагаю, что будет уместно внести в этот вопрос несколько бóльшую точность, и именно это я и собираюсь сделать, хотя по самой своей природе рассматриваемый вопрос не слишком пригоден для этого. Во избежание всяких недоразумений я с самого начала хочу предупредить, что, если противное не оговорено, я всегда буду употреблять слово *сходимость* в том смысле, в каком его понимают геометры.

Ряды, аналогичные рядам Стирлинга

119. Первым примером, который ясно показал законность использования некоторых расходящихся разложений, явился классический пример ряда Стирлинга. Коши доказал, что члены этого ряда сначала убывают, а затем возрастают, так что ряд расходится. Однако если этот ряд оборвать на самом малом члене, то он будет представлять функцию, рассмотренную Эйлером, причем аппроксимация будет тем лучше, чем больше аргумент.

Впоследствии стали известны многочисленные аналогичные примеры и я сам в т. VIII «Acta mathematica» исследовал важный класс рядов, обладающих теми же свойствами, что и ряд Стирлинга [30].

Я позволю себе привести еще один пример, представляющий особый интерес. Этот пример может понадобиться нам в дальнейшем.

Пусть w_0 — положительное число, меньшее 1.

Ряд

$$\varphi(w, \mu) = \sum \frac{w^n}{1 + n\mu} \tag{1}$$

сходится при всех значениях w и μ таких, что

$$|w| < w_0, \qquad \mu \geqslant 0.$$

Кроме того, эта сходимость абсолютна и равномерна.

С другой стороны,

$$\frac{w^n}{1 + n\mu} = \sum_p w^n (-1)^p n^p \mu^p.$$

Поэтому можно попытаться приравнять $\varphi(w, \mu)$ двойному ряду

$$\sum_n \sum_p w^n (-1)^p n^p \mu^p.$$

Но этот ряд не сходится абсолютно. Расположим все же его члены по возрастающим степеням μ и получим

$$A_0 - A_1\mu + A_2\mu^2 - A_3\mu^2 + \ldots, \tag{2}$$

где

$$A_0 = \sum w^n, \qquad A_1 = \sum n w^n, \qquad A_2 = \sum n^2 w^n, \qquad A_3 = \sum n^3 w^n, \ldots$$

Ряд (2), расположенный по возрастающим степеням μ, расходится. Предположив для определенности, что w — вещественная положительная величина, получим

$$k^k w^k < A_k < \frac{k!}{(1-w)^k}.$$

Ясно, что ряд

$$\sum (-kw\mu)^k$$

расходится и что *a fortiori* расходится ряд (2). Однако из рассмотрения ряда

$$\sum \frac{(-\mu)^k k!}{(1-w)^k}$$

видно, что если выражение $\mu/(1-w)$ очень мало, то первые члены этого ряда убывают весьма быстро, хотя последующие члены возрастают неограниченно.

Представляет ли ряд (2) приближенно функцию $\varphi(w, \mu)$? Чтобы ответить на этот вопрос, положим

$$\varphi_p(w, \mu) = A_0 - A_1\mu + A_2\mu^2 - \ldots \pm A_p\mu^p.$$

Я утверждаю, что

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{\varphi - \varphi_p}{\mu^p} = 0.$$

В самом деле,

$$\frac{\varphi - \varphi_p}{\mu^p} = (-1)^{p+1}\mu \sum \frac{n^{p+1} w^n}{1+n\mu}.$$

Нетрудно видеть, что ряд

$$\sum \frac{n^{p+1} w^n}{1+n\mu}$$

сходится равномерно, следовательно, при $\mu \to 0$

$$\lim \sum \frac{n^{p+1} w^n}{1+n\mu} = \sum n^{p+1} w^n = \text{конечная величина}$$

и, следовательно,

$$\lim \frac{\varphi - \varphi_p}{\mu^p} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Исчисление асимптотических рядов

120. Итак, мы должны рассмотреть соотношение новой природы, которое может существовать между функцией аргументов x и μ, которую мы будем обозначать символом $\varphi(x, \mu)$, и расходящимся рядом, расположенным по степеням μ,

$$f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \ldots + \mu^p f_p + \ldots \quad . \tag{1}$$

Коэффициенты f_0, f_1, ... могут быть функциями, зависящими лишь от x и не зависящими от μ (именно так обстояло дело в предыдущем примере) или же зависящими одновременно и от x, и от μ.

Положим

$$\varphi_p = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \ldots + \mu^p f_p.$$

Если

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{\varphi - \varphi_p}{\mu^p} = 0,$$

то я буду говорить, что ряд (1) является асимптотическим представлением функции φ, и употреблять запись

$$\varphi(x, \mu) \equiv f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \ldots \quad . \tag{2}$$

Соотношения вида (2) я буду называть асимптотическими равенствами.

Ясно, что если параметр μ очень мал, то разность $\varphi - \varphi_p$ также будет очень мала, и хотя ряд (2) и будет расходиться, сумма $p + 1$ его первых членов будет служить очень хорошей аппроксимацией функции φ.

Астрономы сказали бы, что этот ряд сходится и что он представляет функцию φ. Они постоянно имеют дело с рядами, которые формально удовлетворяют дифференциальным уравнениям, и оставляют в стороне вопрос о сходимости этих рядов. На первый взгляд такой подход кажется совершенно незаконным и тем не менее именно такой подход часто приводит к цели.

Чтобы объяснить, в чем здесь дело, необходимо более подробно остановиться на этом вопросе. Именно это я и собираюсь сделать.

Введем несколько новых определений.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Я предполагаю, что X_i — однозначная функция, зависящая от t, x_1, x_2, ..., x_n и параметра μ, которая разлагается в ряд по возрастающим степеням μ.

Рассмотрим теперь n расходящихся рядов, которые я запишу в виде

$$S_1 = f_{0,1} + \mu f_{1,1} + \mu^2 f_{1,2} + \ldots,$$
$$S_2 = f_{0,2} + \mu f_{1,2} + \mu^2 f_{2,2} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = f_{0,n} + \mu f_{1,n} + \mu^2 f_{2,n} + \ldots.$$

Я предполагаю, что $f_{i,k}$ — известные функции, зависящие от t и μ, и что, кроме того, эти функции допускают разложение в сходящиеся ряды по возрастающим степеням μ.

Пусть $\varphi_{p,k}$ — сумма первых $p+1$ членов ряда S_k. Я буду говорить, что ряды $S_1, S_2, \ldots, S_n$ формально удовлетворяют дифференциальным уравнениям (3), если после подстановки величин

$$\varphi_{p,1},\ \varphi_{p,2},\ \ldots,\ \varphi_{p,n}$$

вместо

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

разность $dx_i/dt - X_i$ будет делиться на μ^{p+1}.

Введя это определение, я намереваюсь доказать следующее. Рассмотрим частное решение уравнений (3), а именно то, для которого

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

при $t = 0$.

Пусть

$$x_1 = \theta_1(t), \quad x_2 = \theta_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \theta_n(t).$$

Я предполагаю, что все функции $f_{i,k}$ при $t = 0$ обращаются в нуль.

Я утверждаю, что будут выполняться следующие асимптотические равенства:

$$\theta_1(t, \mu) \equiv S_1,\ \theta_2(t, \mu) \equiv S_2, \ldots, \theta_n(t, \mu) \equiv S_n. \tag{4}$$

В самом деле, положим

$$x_1 = \varphi_{p,1} + \mu^{p+1}\xi, \quad x_2 = \varphi_{p,2} + \mu^{p+1}\xi, \ \ldots, \ x_n = \varphi_{p,n} + \mu^{p+1}\xi.$$

Подставляя в (3) вместо x_i выражения $\varphi_{p,i} + \mu^{p+1}\xi$, мы сможем записать эти уравнения в виде

$$\mu^{p+1}\frac{d\xi_i}{dt} = X_i - \frac{d\varphi_{p,i}}{dt}.$$

После такой подстановки X_i можно разложить в ряды по возрастающим степеням μ и величин

$$\mu^{p+1}\xi_1,\ \mu^{p+1}\xi_2, \ldots,\ \mu^{p+1}\xi_n,$$

причем коэффициенты разложения будут известными функциями времени.

Не представляет исключения и тот случай, когда частное решение

$$x_1 = \theta_1(t, 0), \quad x_2 = \theta_2(t, 0), \quad \ldots, \quad x_n = \theta_n(t, 0), \quad \mu = 0$$

при каком-нибудь из рассмотренных значений t будет проходить через одну из особых точек дифференциального уравнения [так же, как и в главе II (п. 27), я буду называть особыми те совокупности значений x_1, x_2, ..., x_n, t и μ, при которых функции X_i перестают быть голоморфными].

Точно так же, как в п. 27, можно найти два положительных числа M и α, таких, что

$$X_i - \frac{d\varphi_{p,i}}{dt} \ll \frac{M}{1 - \alpha(\mu + \mu^{p+1}\xi_1 + \ldots + \mu^{p+1}\xi_n)} (\arg(\mu, \xi_k)).$$

Однако по предположению ряды S_1, S_2, ..., S_n формально удовлетворяют уравнениям (3). Это означает, что если положить

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0,$$

откуда

$$x_i = \varphi_{p,i},$$

то разности $X_i - d\varphi_{p,i}/dt$ будут делиться на μ^{p+1}. Следовательно, можно записать неравенство

$$X_i - \frac{d\varphi_{p,i}}{dt} \ll \frac{M\mu^{p+1}\alpha(\alpha^p + \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)}{1 - \alpha(\mu + \mu^{p+1}\xi_1 + \ldots + \mu^{p+1}\xi_n)}. \tag{5}$$

Если для краткости мы обозначим правую часть неравенства (5) символом $\mu^{p+1} Z$ и положим

$$X_i - \frac{d\varphi_{p,i}}{dt} = \mu^{p+1} Y_i,$$

то уравнения (3) запишутся в виде

$$\frac{d\xi_i}{dt} = Y_i, \tag{6}$$

причем

$$Y_i \ll Z.$$

Рассмотрим частное решение уравнений (6), такое, что при $t = 0$

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0.$$

Это решение можно записать в виде

$$\xi_i = \frac{\theta_i(t, \mu) - \varphi_{p,i}}{\mu^{p+1}}.$$

Для того чтобы доказать асимптотические равенства (4), достаточно установить, что величины ξ_i ограничены. Для этого достаточно сравнить уравнения (6) с уравнениями

$$\frac{d\xi_i}{dt} = Z. \tag{6bis}$$

Поскольку решение уравнений (6 bis) ограничено, то ограниченным будет и решение уравнений (6). Однако уравнения (6bis) легко интегрировать, ибо если положить

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = \sigma,$$

то для рассматриваемого нами частного решения

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = \frac{\sigma}{n}$$

и

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{M\alpha\,(\alpha^p + \sigma)}{1 - \alpha\mu - \sigma\mu^{p+1}}.$$

Последнее уравнение легко интегрируется, откуда мы получаем, что величина σ ограничена и что σ стремится к конечному пределу, когда μ стремится к нулю.

То же относится и к ξ_i, что и требовалось доказать.

Эта теорема служит обоснованием метода, применяемого астрономами, если только параметр μ достаточно мал. Вероятно, этот результат можно было бы установить и более просто, однако приведенное выше доказательство дает нам простой способ для нахождения верхнего предела совершаемой ошибки.

121. Нам осталось рассмотреть вопрос о том, в какой мере обычные правила математического анализа применимы к исчислению формальных рядов.

Для этого рассмотрим систему двух уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y, \tag{1}$$

где X и Y — однозначные функции от x, y, t и μ, допускающие разложение по степеням μ.

Произведем замену переменных

$$x = \psi_1(\xi, \eta),$$
$$y = \psi_2(\xi, \eta),$$

где ψ_1 и ψ_2 зависят от ξ, η, t и μ. Рассматриваемые дифференциальные уравнения запишутся в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = X', \qquad \frac{d\eta}{dt} = Y', \tag{2}$$

где

$$X = \frac{dx}{d\xi} X' + \frac{dx}{d\eta} Y',$$
$$Y = \frac{dy}{d\xi} X' + \frac{dy}{d\eta} Y'.$$

Функции X' и Y' можно разложить по возрастающим степеням μ, если только определитель $\frac{dx}{d\xi}\frac{dy}{d\eta} - \frac{dx}{d\eta}\frac{dy}{d\xi}$ *не будет делиться на* μ, *что мы заранее не предполагаем.*

Установив это, введем в рассмотрение два расходящихся ряда

$$S = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \ldots,$$
$$S' = f_0' + \mu f_1' + \mu^2 f_2' + \ldots,$$

где функции f_i и f_i' зависят от t и μ' и допускают разложение в ряд по возрастающим степеням μ'.

Я предполагаю, что ряды S и S' формально удовлетворяют уравнениям (2), если подставить их вместо ξ и η и положить $\mu' = \mu$.

Произведем теперь в этих двух уравнениях замену переменных

$$x = \psi_1(\xi, \eta), \quad y = \psi_2(\xi, \eta),$$

а вместо ξ и η подставим S и S'. Затем разложим функции

$$\psi_1(S, S'), \quad \psi_2(S, S')$$

по возрастающим степеням μ. Несмотря на то, что ряды S и S', по предположению, расходятся, это разложение производится по обычным правилам. Под этим я понимаю следующее.

Пусть S_p и S_p' — суммы $p+1$ первых членов рядов S и S'. Предположим, что требуется вычислить $p+1$ первых членов разложения функций $\psi_1(S, S')$ и $\psi_2(S, S')$. Чтобы получить $p+1$ член этих разложений, необходимо взять $p+1$ член разложения функций

$$\psi_1(S_p, S_p') \quad \text{и} \quad \psi_2(S_p, S_p').$$

При этом мы получим два расходящихся ряда, которые можно записать следующим образом:

$$\psi_1(S, S') = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots,$$
$$\psi_2(S, S') = F_0' + \mu F_1' + \mu^2 F_2' + \ldots. \tag{3}$$

Эти ряды имеют тот же вид, что и ряды S и S'.

Я утверждаю, что эти ряды формально удовлетворяют уравнениям (1), если подставить их вместо x и y, а затем положить $\mu' = \mu$.

Действительно, если

$$x = \psi_1(S_p,\ S'_p), \qquad y = \psi_2(S_p,\ S'_p),$$

то разность между правой и левой частью уравнений (1) будет делиться на μ^{p+1}.

С другой стороны, если обозначить через Σ_p и Σ'_p суммы первых $p+1$ членов рядов (3), то разности

$$\Sigma_p - \psi_1(S_p,\ S'_p), \qquad \Sigma_p - \psi_2(S_p,\ S'_p)$$

будут делиться на μ^{p+1}.

Теперь нетрудно видеть, что если

$$x = \Sigma_p, \qquad y = \Sigma_\mu,$$

то разность между правой и левой частью уравнений (1) будет делиться на μ^{p+1}, что и требовалось доказать.

Пусть теперь имеется одно уравнение

$$\frac{dx}{dt} = X, \tag{4}$$

где X зависит от x, t и μ.

Положим

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

тогда

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dX}{dt} + y\frac{dX}{dx}. \tag{5}$$

Пусть

$$S = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \ldots$$

— некоторый расходящийся ряд, который формально удовлетворяет уравнению (4).

Составим ряд

$$S' = f'_0 + \mu f'_1 + \mu^2 f'_2 + \ldots,$$

полученный почленным дифференцированием первого ряда по t.

Я утверждаю, что ряды S и S' формально удовлетворяют уравнениям (4) и (5).

В самом деле, пусть S_p и S'_p означают сумму $p+1$ первых членов рядов S и S', тогда

$$S'_p = \frac{dS_p}{dt}.$$

Положим

$$X = X(x, t),$$
$$\frac{dX}{dt} + y\frac{dX}{dx} = Y(x, y, t).$$

Я утверждаю, что разность

$$Y(S_p, S_p', t) - \frac{dS_p'}{dt}$$

делится на μ^{p+1}.

В самом деле, по предположению разность

$$U = X(S_p, t) - \frac{dS_p}{dt}$$

делится на μ^{p+1}, следовательно, точно так же будет делиться на μ^{p+1} и ее производная

$$\frac{dU}{dt} = Y(S_p, S_p', t) - \frac{dS_p'}{dt},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, обычные правила анализа оказываются применимыми и к исчислению формальных рядов.

Чрезвычайно интересный для последующего вопрос состоит в том, чтобы выяснить, будут ли теоремы Якоби, изложенные в пунктах 3 и 4, применимы в формальном исчислении.

Ответ на этот вопрос должен быть утвердительным. Мы покажем это несколько дальше, в п. 125, на одном частном примере, однако доказательство можно без изменений перенести и на общий случай.

122. На стр. 295 т.VIII журнала «Acta mathematica» я привел доказательства некоторых свойств асимптотических равенств.

Два асимптотических равенства можно складывать, точно так же два асимптотических равенства можно умножать друг на друга.

Пусть теперь

$$S = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \dots$$

— расходящийся ряд, а функции f_i зависят от t. Пусть

$$\varphi(t, \mu) = S$$

— некоторое асимптотическое равенство.

Предположим, что $f_0 = 0$, чтобы при $\mu = 0$ выполнялись равенства

$$S = 0, \qquad \varphi(t, 0) = 0.$$

Пусть, кроме того, некоторая функция, зависящая от z, голоморфна в окрестности точки $z = 0$.

Подставим ряд S вместо аргумента z в $F(z)$ и разложим $F(S)$ по степеням μ, следуя обычным правилам анализа так, как это сделано в предыдущем пункте. Мы получим асимптотическое равенство

$$F[\varphi(t, \mu)] \equiv F(S).$$

Вряд ли стоит воспроизводить здесь доказательства этих утверждений. Читатель сможет найти их в указанном выше мемуаре, однако я не советую этого делать, поскольку доказательства настолько легки, что можно очень быстро восстановить их самому.

Пусть теперь у нас имеется некоторое асимптотическое равенство

$$\varphi(t, \mu) \equiv f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \ldots,$$

в котором функции f зависят от t и μ. Я предполагаю, что эти равенства выполняются *равномерно*. Этим я хочу сказать, что выражение

$$\frac{\varphi - \varphi_p}{\mu^p},$$

где φ_p означает сумму первых $p+1$ членов ряда, стремится вместе с μ к нулю равномерно относительно t. Другими словами, можно найти некоторое число ε, не зависящее от t, а зависящее только от μ и обращающееся в нуль вместе с μ, такое, что

$$|\varphi - \varphi_p| < \mu^p \varepsilon.$$

Тогда

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} (\varphi - \varphi_p)\, dt \right| < \mu^p \varepsilon\, (t_1 - t_0),$$

что и доказывает справедливость асимптотического равенства

$$\int \varphi\, dt \equiv \int f_0\, dt + \mu \int f_1\, dt + \mu^2 \int f_2\, dt + \ldots.$$

Следовательно, асимптотическое равенство можно интегрировать Напротив, дифференцировать же его, вообще говоря, нельзя. Однако имеется один случай, когда изложенные выше принципы позволяют нам выполнить дифференцирование.

Пусть $\varphi(t, \mu)$ — решение некоторого дифференциального уравнения, а S — ряд, формально удовлетворяющий этому уравнению.

Можно записать асимптотическое равенство $\varphi(t, \mu) \equiv S$.

Пусть S' — ряд, полученный почленным дифференцированием ряда S.

Из сказанного в предыдущем пункте следует, что этот ряд формально удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, которому удовлетворяет в обычном смысле производная $d\varphi/dt$.

Следовательно, выполняется следующее асимптотическое равенство:

$$\frac{d\varphi}{dt} \equiv S'.$$

Я приношу свои извинения читателю за то, что так подробно останавливался на столь простых вопросах. Однако мне хотелось отчетливо показать сущность того различия в понимании слова сходимость, о котором говорилось выше. Точно так же, прежде чем приступить к изучению методов последовательных приближений, применяемых в небесной механике, я хотел объяснить, почему астрономы могут использовать эти методы, хотя с точки зрения геометров они приводят к расходящимся выражениям.

Глава IX

МЕТОДЫ НЬЮКОМА И ЛИНДШТЕДТА

Исторический очерк

123. В 1882 г. в журнале «Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersburg» Линдштедт изложил метод интегрирования с помощью последовательных приближений следующего уравнения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \mu\varphi(x, t), \tag{1}$$

где $\varphi(x, t)$ — функция, допускающая разложение в ряд по возрастающим степеням x с коэффициентами, периодически зависящими от времени t.

Линдштедт также показал, что тот же метод применим и к уравнениям

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n_1^2 x = \mu\varphi(x, y, t),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n_2^2 y = \mu\psi(x, y, t),$$

имеющим более общий характер, чем уравнение (1). Эти уравнения при условии, что

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\psi}{dx},$$

являются одним из частных случаев уравнений динамики.

Уравнение (1) играет чрезвычайно важную роль в небесной механике, так как Гильден неоднократно приходил к этому уравнению в ходе своих прекрасных исследований.

Линдштедт не доказывал сходимость тех разложений, к которым приводит его метод, и в действительности эти ряды расходятся. Однако в предыдущей главе мы видели, что они тем не менее могут представлять интерес и быть полезными.

Имеется и еще одна весьма серьезная трудность. Легко доказать, что этот метод применим в первых приближениях, но можно усомниться, будет ли он применим в последующих приближениях. Линдштедт не су-

мел доказать это строго и оставил здесь кое-какие сомнения. Эти сомнения оказываются безосновательными, и его прекрасный метод всегда законен. Я доказал это сначала с помощью интегральных инвариантов в мемуаре, помещенном в журнале «Bulletin astronomique» (т. III, стр. 57), а затем, уже не прибегая к этим инвариантам, в «Comptes rendus» (т. CVIII, стр. 21) [31]. Именно это второе доказательство я и воспроизведу в этой главе. Я укажу также один способ изложения метода Линдштедта, который позволяет применить его к наиболее общему случаю уравнений динамики.

Тем не менее имелось еще несколько частных случаев, не поддававшихся этому методу, и среди них общий случай задачи трех тел.

Последний в силу своей важности привлек внимание Линдштедта. В «Comptes rendus» (т. XCVII, стр. 1276 и 1353) он показал, каким образом можно было бы применить его метод в этом случае.

К сожалению, те трудности, о которых шла речь выше, все еще оставались, и разложения не только становились расходящимися, о чем по причинам, изложенным в предыдущей главе, можно было бы не беспокоиться, но и сама возможность таких разложений и, следовательно, законность самого метода оказывались под сомнением.

Я полагаю, что мне удалось устранить эти сомнения. Именно этому я и посвящаю главу XI.

Чтобы показать, каким образом метод Линдштедта можно применить к задаче трех тел, я буду придерживаться такого способа изложения, который не совпадает со способом изложения самого автора этого метода и не приспособлен для вычисления различных членов разложения, но зато наилучшим образом подходит для доказательства законности метода.

На том пути, по которому пошел Линдштедт, он имел предшественника — Ньюкома («Smithsonian contributious to Knowledge», декабрь 1874), который первый указал ряды, представляющие движение планет и содержащие лишь синусы и косинусы. Его метод, к рассмотрению которого я еще вернусь, основан на вариации произвольных постоянных.

124. Хотя среди методов, недавно появившихся в небесной механике, методы Линдштедта не являются первыми по времени, я все же считаю, что изложение новых методов последовательных приближений удобно начать именно с них. В самом деле, я не мог бы отделить их изложение от изложения методов Ньюкома, которые хронологически были предложены первыми. К тому же методы Линдштедта по существу являются наименее сложными из всех методов и более других пригодны при рассмотрении наиболее простых случаев. Эти методы оказываются несостоятельными лишь тогда, когда имеются весьма малые знаменатели. В этом случае предпочтение приходится отдавать более совершенным методам Гильдена. Мой способ изложения теории Линдштедта значительно отличается от изложения самого автора. Кроме того, я применяю методы Линдштедта к бо́льшему числу случаев. Однако, как я покажу

несколько дальше, ряды, которые я получу, оказываются тождественными с его рядами.

Кроме того, я во многом дополнил эти результаты и попытался применить их к возможно большему числу задач.

Изложение метода

125. Рассмотрим еще раз уравнения, указанные в п. 13 [32]:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$
$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots.$$

Задача состоит в том, чтобы *формально* удовлетворить уравнениям (1) с помощью рядов, имеющих следующий вид:

$$x_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots + \mu^n x_i^n + \ldots,$$
$$y_i = y_i^0 + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots + \mu^n y_i^n + \ldots, \tag{2}$$

где сами величины x_i^k и y_i^k имеют вид

$$x_i^k = \Sigma A \cos ht + \Sigma B \sin ht + C,$$
$$y_i^k = \Sigma A' \cos ht + \Sigma B' \sin ht + C't + D'.$$

Коэффициенты A, B, C, A', B', C' и D' не зависят от параметра μ и времени t, но могут зависеть от некоторого числа постоянных интегрирования, величины h представляют собой коэффициенты, *зависящие* от μ и допускающие разложение по степеням этого параметра.

Когда я говорю, что ряды (2) формально удовлетворяют уравнениям (1), я подразумеваю под этим следующее.

Подставим в уравнения (1) ряды (2), оборванные на $p + 1$ члене, т. е.

$$x_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots + \mu^p x_i^p,$$
$$y_i = y_i^0 + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots + \mu^p y_i^p.$$

Я буду говорить, что ряды (2) формально удовлетворяют уравнениям (1), если в результате этой подстановки разность между правыми и левыми частями этих уравнений будет делиться на μ^{p+1}.

Чтобы найти ряды (2), воспользуемся методом, полностью отличным от того метода, которым пользовался Линдштедт.

Попытаемся построить ряд, имеющий вид

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \ldots + \mu^p S_p + \ldots, \tag{3}$$

несколько дальше, ряды, которые я получу, оказываются тождественными с его рядами.

Кроме того, я во многом дополнил эти результаты и попытался применить их к возможно большему числу задач.

Изложение метода

125. Рассмотрим еще раз уравнения, указанные в п. 13 [32]:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$
$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots.$$

Задача состоит в том, чтобы *формально* удовлетворить уравнениям (1) с помощью рядов, имеющих следующий вид:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots + \mu^n x_i^n + \ldots, \\ y_i &= y_i^0 + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots + \mu^n y_i^n + \ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

где сами величины x_i^k и y_i^k имеют вид

$$\begin{aligned} x_i^k &= \Sigma A \cos ht + \Sigma B \sin ht + C, \\ y_i^k &= \Sigma A' \cos ht + \Sigma B' \sin ht + C't + D'. \end{aligned}$$

Коэффициенты A, B, C, A', B', C' и D' не зависят от параметра μ и времени t, но могут зависеть от некоторого числа постоянных интегрирования, величины h представляют собой коэффициенты, *зависящие* от μ и допускающие разложение по степеням этого параметра.

Когда я говорю, что ряды (2) формально удовлетворяют уравнениям (1), я подразумеваю под этим следующее.

Подставим в уравнения (1) ряды (2), оборванные на $p + 1$ члене, т. е.

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots + \mu^p x_i^p, \\ y_i &= y_i^0 + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots + \mu^p y_i^p. \end{aligned}$$

Я буду говорить, что ряды (2) формально удовлетворяют уравнениям (1), если в результате этой подстановки разность между правыми и левыми частями этих уравнений будет делиться на μ^{p+1}.

Чтобы найти ряды (2), воспользуемся методом, полностью отличным от того метода, которым пользовался Линдштедт.

Попытаемся построить ряд, имеющий вид

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \ldots + \mu^p S_p + \ldots, \tag{3}$$

Коэффициенты этого полинома являются периодическими функциями от x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 и y_1, y_2, ..., y_n (период по y равен 2π).

Я утверждаю, что функцию S_p можно найти из уравнения (6), причем так, что производные dS_p/dy_1, dS_p/dy_2, ..., dS_p/dy_n будут периодическими функциями по y с периодом 2π.

В самом деле, предположим, что это верно для производных от S_1, S_2, ..., S_{p-1} по y.

Тогда Φ_p будет периодической функцией от y_1, y_2, ..., y_n и я могу записать, что

$$\Phi_p = A + \sum B\cos(m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n) + \sum C\sin(m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n).$$

Числа m_1, m_2, ..., m_n — целые, в то время как коэффициенты A, B и C постоянны и не зависят от y.

Функцию S_p можно представить в виде

$$S_p = \alpha_{p,1}y_1 + \alpha_{p,2}y_2 + \ldots + \alpha_{p,n}y_n + \sum \frac{B\sin(m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n)}{m_1n_1^0 + m_2n_2^0 + \ldots + m_nn_n^0} + \sum \frac{C\cos(m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n)}{m_1n_1^0 + m_2n_2^0 + \ldots + m_nn_n^0}.$$

Величины $\alpha_{p,i}$ являются константами, которые можно выбирать произвольно, лишь бы они удовлетворяли условию

$$\alpha_{p,1}n_1^0 + \alpha_{p,2}n_2^0 + \ldots + \alpha_{p,n}n_n^0 = A + C_p$$

и слагаемое C_p было произвольным.

Этот метод оказывается несостоятельным, если найдутся целые числа m_1, m_2, ..., m_n, такие, что

$$\sum m_in_i^0 = 0.$$

Мы предполагаем, что этот случай не имеет места.

Следует заметить, что определенные таким образом функции S_p содержат произвольные постоянные. Они зависят прежде всего от

$$x_1^0,\ x_2^0, \ldots, x_n^0,$$

затем от

$$\alpha_{1,1},\ \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{1,n},$$

затем от

$$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \ldots, \alpha_{2,n}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

затем от

$$\alpha_{p,1},\ \alpha_{p,2}, \ldots, \alpha_{p,n},$$
$$\ldots, \ldots, \ldots$$

Мы хотим оставить произвольными лишь n констант. Этими произвольными постоянными будем считать x_i^0, а величины $\alpha_{i,k}$ выберем каким-нибудь произвольным образом и зафиксируем их. Например, $\alpha_{i,k}$ можно выбрать так, чтобы

$$0 = C_1 = C_2 = \ldots = C_p = \ldots,$$

но я предпочитаю полагать все $\alpha_{i,k}$ равными нулю. В этом случае константы C_1, C_2, ..., C_p, ... уже не равны нулю. Вообще говоря, они так же, как и C_p, зависят от x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0.

Условившись об этом, положим

$$\Sigma_p = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \ldots + \mu^p S_p.$$

Пусть

$$\frac{d\Sigma_p}{dy_i} = x_i, \quad \frac{d\Sigma_p}{dx_i^0} = w_i. \tag{7}$$

Если мы произведем замену переменных, выбрав в качестве новых переменных x_i^0 и w_i вместо x_i и y_i [новые переменные связаны со старыми соотношениями (7)], то теорема из п. 4 будет означать, что уравнения попрежнему будут иметь канонический вид, и мы получим [33]

$$\frac{dx_i^0}{dt} = \frac{dF}{dw_i}, \quad \frac{dw_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i^0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Посмотрим теперь, какой вид будет иметь функция F, если ее выразить через новые переменные x_i^0 и w_i. По предположению ряд S формально удовлетворяет уравнению (4). Это означает, что

$$F(x_i, y_i) = F\left(\frac{d\Sigma_p}{dy_i}, y_i\right) = C_0 + \mu C_1 + \mu^2 C_2 + \ldots + \mu^p C_p + \mu^{p+1}\Phi_p.$$

Функция Φ_p зависит от x_i^0, w_i и μ и может быть разложена по степеням μ. Что же касается величин C_0, C_1, ..., C_p, то мы видели, что они зависят от x_i^0.

Положим

$$\nu_i^p = -\frac{dC_0}{dx_i^0} - \mu\frac{dC_1}{dx_i^0} - \mu^2\frac{dC_2}{dx_i^0} - \ldots - \mu^p\frac{dC_p}{dx_i^0}.$$

Тогда при $\mu = 0$ величина ν_i^p будет равна n^0.

Отсюда

$$\frac{dx_i^0}{dt} = \mu^{p+1}\frac{d\Phi_p}{dw_i}, \quad \frac{dw_i}{dt} = \nu_i^p - \mu^{p+1}\frac{d\Phi_p}{dx_i^0}.$$

Если пренебречь величинами порядка μ^{p+1}, то из этих уравнений следует

$$x_i^0 = \text{const}, \quad w_i = \nu_i^p t + \text{const}.$$

На языке главы VIII этот результат означает, что теорема Якоби, приведенная в п. 3, применима и в формальном исчислении.

Положим

$$n_i = -\frac{dC_0}{dx_i^0} - \mu\frac{dC_1}{dx_i^0} - \mu^2\frac{dC_0}{dx_i^0} - \ldots \text{ и т. д. до бесконечности.}$$

Мы получим при этом ряд, расположенный по степеням μ, который может расходиться. Однако это обстоятельство не имеет для нас особого значения, поскольку мы стоим на точке зрения, изложенной в предыдущей главе, т.е. на формальной.

Положим затем

$$w_i = n_i t + \varpi_i.$$

Величины ϖ_i можно считать постоянными интегрирования. Рассмотрим уравнения

$$\frac{dS}{dy_i} = x_i, \qquad \frac{dS}{dx_i^0} = w_i. \tag{8}$$

Величины x_i и y_i можно найти из уравнений (8) в виде ряда, расположенного по степеням μ, коэффициенты которого зависят от x_i^0 и w_i. Несущественно, между прочим, будут ли эти ряды сходящимися или расходящимися.

Если в эти ряды вместо w_i подставить $n_i t + \varpi_i$ и считать x_i^0 постоянными, то они будут формально удовлетворять уравнениям (1).

Пусть этими рядами будут ряды

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots, \\ y_i &= y_i^0 + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots. \end{aligned} \tag{2}$$

Посмотрим, какой вид имеют коэффициенты x_i^k и y_i^k. При $\mu = 0$ ряд S сводится к сумме

$$S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 + \ldots + x_n^0 y_n$$

и, следовательно, в этом случае

$$x_i = x_i^0, \qquad y_i = w_i.$$

Итак, первый член разложения x_i представляет собой константу, а первый член разложения y_i (т. е. y_i^0) равен выражению

$$w_i = n_i t + \varpi_i.$$

Если вместо того, чтобы выражать x_i и y_i из уравнений (8), мы нашли эти величины из уравнений (7), то первые $p+1$ члены остались теми же, поскольку разность $S - \Sigma_p$ имеет порядок μ^{p+1}.

Чтобы найти величины

$$x_i^k,\ y_i^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, 2, \ldots, p),$$

рассмотрим уравнения (7), которые запишем в следующем виде:

$$x_i = x_i^0 + \frac{d(\Sigma_p - S_0)}{dy_i}, \qquad y_i = w_i + \frac{d(\Sigma_p - S_0)}{dx_i^0} \tag{7bis}$$

Мы можем найти x_i и y_i из уравнений (7bis) в виде рядов, расположенных по степеням μ и сходящихся, если параметр μ достаточно мал. Для этого достаточно применить теорему, изложенную в п. 30, поскольку разность $\Sigma_p - S_0$ представляет собой вполне определенную функцию, а не только формальное выражение.

Мы предположили, что величины $\alpha_{k,i}$ равны нулю; отсюда вытекает, что S_k $(k > 0)$ и, следовательно, $\Sigma_p - S_0$ являются периодическими функциями с периодом 2π по y_i. Значит, если в уравнениях (7bis) произвести замену y_i на $y_i + 2k_i\pi$ и w_i на $w_i + 2k_i\pi$ ($k_1, k_2, \ldots, k_n$ — целые), то эти уравнения не изменятся. Следовательно, найденные из этих уравнений величины x_i и $y_i - w_i$ будут периодическими с периодом 2π относительно w.

Итак, величины x_i^k и y_i^k в рядах (2) представляют собой периодические функции с периодом 2π относительно w_i.

Различные виды рядов

126. Итак, существование рядов (8) доказано. Можно попытаться получить эти ряды, не обращаясь на промежуточных этапах к вспомогательному выражению S.

Однако прежде я хочу доказать, что можно формально удовлетворить уравнениям (1) предыдущего пункта с помощью бесконечного набора других рядов, имеющих тот же вид, что и ряды (2).

1. Рассмотренная выше функция S определяется уравнением (4) лишь с точностью до некоторой константы или, точнее, поскольку величины $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ рассматриваются как постоянные, с точностью до произвольной функции, зависящей от $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$.

Таким образом, если функция S удовлетворяет уравнению (4), то и функция

$$S' = S + R$$

будет также удовлетворять уравнению (4). Здесь R означает некоторую функцию, зависящую от $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ и μ, которую можно разлагать по возрастающим степеням μ.

Рассмотрим вместо уравнений (8) следующие уравнения:

$$x_i = \frac{dS'}{dy_i} = \frac{dS}{dy_i}, \qquad w_i = \frac{dS'}{dx_i^0} = \frac{dS}{dx_i^0} + \frac{dR}{dx_i^0}. \tag{8bis}$$

Мы можем предположить, что R делится на μ. Тогда x_i и y_i можно найти из уравнений (8bis) в виде рядов (2bis), аналогичных рядам (2).

Имеем

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^0 + \mu x_i'^1 + \mu^2 x_i'^2 + \dots, \\ y_i &= w_i + \mu y_i'^1 + \mu^2 y_i'^2 + \dots. \end{aligned} \tag{2bis}$$

Коэффициенты $x_i'^k$ и $y_i'^k$ так же, как и x_i^k и y_i^k, представляют собой периодические функции от w.

Сравнение уравнений (8bis) и (8) показывает, что ряды (2bis) получаются из рядов (2), если в последних заменить w_i на $w_i + dR/dx_i^0$.

2. Рассмотрим более общий случай.

Пусть

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$$

— n функций, зависящих от x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 и μ, которые допускают разложение по степеням μ.

Если в рядах (2) заменить w_1, w_2, ..., w_n на

$$w_1 + \mu\omega_1, \; w_2 + \mu\omega_2, \dots, w_n + \mu\omega_n,$$

то вид этих рядов не изменится. В самом деле,

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^0 + \mu\varphi_i(w_k, \mu), \\ y_i &= w_i + \mu\psi_i(w_k, \mu), \end{aligned} \tag{2}$$

где функции φ_i и ψ_i допускают разложение по степеням μ и периодичны по w.

Если w_i заменить на $w_i + \mu\omega_i$, то

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^0 + \mu\psi_i(w_k + \mu\omega_k, \mu), \\ y_i &= w_i + \mu[w_i + \psi_i(w_k + \mu\omega_k, \mu)]. \end{aligned} \tag{2ter}$$

Отсюда следует, что функции $\varphi(w_k + \mu\omega_k, \mu)$ и $\omega_i + \psi_i(w_k + \mu\omega_k, \mu)$ также допускают разложение по степеням μ и также периодичны по w.

Кроме того, ряды (2ter) формально удовлетворяют уравнениям (1). В самом деле, ряды (2) удовлетворяют этим уравнениям, если произве-

сти замену переменных

$$w_i = n_i t + \varpi_i,$$

при любых значениях ϖ_i.

Величины ω_i являются функциями от x_i^0, которые являются константами. Следовательно, сами ω_i также константы. Таким образом, замена w_i на $w_i + \mu\omega_i$ приводит к тому, что константы интегрирования ϖ_i заменяется другими константами $\varpi_i + \mu\omega_i$, что в силу только что сделанного нами замечания не мешает нашим рядам по-прежнему удовлетворять дифференциальным уравнениям (1).

Итак, ряды (2 ter) *формально удовлетворяют уравнениям* (1).

Лишь при одном условии эти ряды нельзя найти из уравнений (8) и (8bis), а именно при условии, что выражение

$$\mu(\omega_1 dx_1^0 + \omega_2 dx_2^0 + \ldots + \omega_n dx_n^0)$$

не будет полным дифференциалом некоторой функции, зависящей от x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0. Эта функция представляет собой не что иное, как рассмотренную нами несколько выше функцию R.

3. Подставим в ряды (2) вместо

$$x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0$$

величины

$$x_1^0 + \mu\nu_1,\ x_2^0 + \mu\nu_2, \ldots,\ x_n^0 + \mu\nu_n,$$

где $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ зависят от $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ и μ и допускают разложение по степеням μ.

Если величины x_i^0 считать константами, то и ν_i будут константами.

Если изменить каким-либо образом значения постоянных интегрирования, то вид рядов (2) не изменится и эти ряды будут по-прежнему формально удовлетворять уравнениям (1).

Итак, записав ряды (2) в виде

$$x_i = x_i^0 + \mu\varphi_i(w_k, x_k^0, \mu),$$
$$y_i = w_i + \mu\psi_i(w_k, x_k^0, \mu),$$

мы видим, что $x_i - x_i^0$ и $y_i - w_i$ зависят не только от w_k и μ, но и от x_k^0.

Пусть теперь

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n;\ \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$$

— $2n$ функций, зависящих от x_i^0 и μ и допускающих разложение по степеням μ.

Запишем ряды

$$x_i = x_i^0 + \mu\,[\nu_i + \varphi_i(w_k + \mu\omega_k,\ x_k^0 + \mu\nu_k, \mu)],$$
$$y_i = w_i + \mu\,[\omega_i + \psi_i(w_k + \mu\omega_k,\ x_k^0 + \mu\nu_k, \mu)]. \qquad \text{(2quater)}$$

Каковы бы ни были функции ω_i и ν_i, эти ряды будут формально удовлетворять уравнениям (1).

Кроме того, если функции

$$\varphi_i(w_k, x_k^0, \mu) \text{ и } \psi_i(w_k, x_k^0, \mu)$$

периодичны по w, то и функции

$$\nu_i + \varphi_i(w_k + \mu\omega_k, x_k^0 + \mu\nu_k, \mu) \text{ и } \omega_i + \psi_i(w_k + \mu\omega_k, x_k^0 + \mu\nu_k, \mu)$$

также будут периодическими.

Еще одно замечание.

Положим

$$\nu_i + \varphi_i(w_k + \mu\omega_k, x_k^0 + \mu\nu_k, \mu) = \varphi_i'(w_k, x_k^0, \mu),$$
$$\omega_i + \psi_i(w_k + \mu\omega_k, x_k^0 + \mu\nu_k, \mu) = \psi_i'(w_k, x_k^0, \mu).$$

Функции φ_i, ψ_i, φ_i' и ψ_i' являются периодическими функциями от w. Я намереваюсь рассмотреть средние значения этих периодических функций и обозначу их соответственно символами

$$\varphi_i^0(x_k^0, \mu),\ \psi_i^0(x_k^0, \mu),\ \varphi_i'^0(x_k^0, \mu),\ \psi_i'^0(x_k^0, \mu).$$

После этого я намереваюсь доказать следующее.

Пусть θ_i и η_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — $2n$ совершенно произвольных функций, зависящих от x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 и μ, которые должны лишь разлагаться по степеням μ.

Я утверждаю, что каковы бы ни были функции θ_i и η_i, всегда можно выбрать функции ν_i и ω_i так, чтобы

$$\varphi_i^0 = \theta_i,\ \psi_i^0 = \eta_i.$$

В самом деле, для этого достаточно определить ν_i и ω_i из следующих уравнений:

$$\nu_i + \varphi_i^0(x_k^0 + \mu\nu_k, \mu) = \theta_i(x_k^0, \mu),$$
$$\omega_i + \psi_i^0(x_k^0 + \mu\nu_k, \mu) = \eta_i(x_k^0, \mu).$$

Итак, функции ν_i и ω_i всегда можно найти из этих уравнений в виде рядов, расположенных по степеням μ, коэффициенты которых зависят от x_k^0.

Если ряды (2 quater) представить в виде

$$x_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots,$$
$$y_i = w_i + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots,$$

то y_i^k и x_i^k будут периодическими функциями от w. *В силу предыдущего замечания эти периодические функции* x_i^k *и* y_i^k *всегда можно подобрать так, чтобы их средние значения были искомыми функциями от* $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$.

Прямое вычисление рядов

127. Перейдем теперь к непосредственному вычислению рядов (2quater).

Для этого предположим, например, что в производную dF/dy_i, которая зависит от x_i, y_i и μ, вместо этих переменных подставлены их разложения

$$x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots,$$
$$w_i + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots,$$

после чего эта производная dF/dy_i стала функцией переменных x_i^0, x_i^k y_i^k, w_i и μ.

Эта функция периодична по w_i, разлагается по степеням μ, x_i^k и y_i^k (при $k > 1$) и как-то зависит от x_i^0.

Запишем эту производную в виде

$$\frac{dF}{dy_i} = X_i^0 + \mu X_i^1 + \mu^2 X_i^2 + \ldots + \mu^k X_i^k + \ldots, \qquad (9)$$

где коэффициенты X_i^k представляют собой функции, зависящие от w_i, x_i^k, y_i^k, x_i^0 и периодические по w_i.

Аналогичным образом получим

$$-\frac{dF}{dx_i} = Y_i^0 + \mu Y_i^1 + \mu^2 Y_i^2 + \ldots + \mu^k Y_i^k + \ldots. \qquad (10)$$

Функции Y_i^k имеют такой же вид, как и функции X_i^k.

Если вспомнить, что производная dF_0/dy_i равна нулю, а производная dF_0/dx_i не зависит от y_i, то нетрудно понять, что коэффициенты X_i^k зависят только от

$$x_i^0, x_i^1, \ldots, x_i^{k-1},$$
$$w_i, y_i^1, \ldots y_i^{k-1}.$$

Коэффициенты Y_i зависят от этих же величин и, кроме того, от x_i^k, но не зависят от y_i^k. Коэффициент X_i^1 равен нулю, а коэффициент Y_i^0 равен $\overline{h}_i$.

Предположим, что

$$w_i = n_i t + \overline{\omega}_i;$$

тогда

$$\frac{dw_i}{dt} = n_i.$$

Мы предполагаем, что n_i можно разложить по степеням μ, и записываем

$$n_i = n_i^0 + \mu n_i^1 + \mu n_i^2 + \ldots. \tag{11}$$

Тогда наши дифференциальные уравнения приобретают вид

$$\sum_k n_k \frac{dx_i}{dw_k} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \sum_k n_k \frac{dy_i}{dw_k} = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{12}$$

В самом деле,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum \frac{dx_i}{dw_k}\frac{dw_k}{dt} = \sum n_k \frac{dx_i}{dw_k}.$$

Заменим в уравнениях (12) величины dF/dy_i, $-dF/dx_i$ и n_k их разложениями (9), (10) и (11) и приравняем затем коэффициенты при одинаковых степенях μ.

Обозначим для краткости

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{p-1} n_k^q \frac{dx_i^{p-q}}{dw_k} = -Z_i^p \quad (\text{если } p>1), \qquad Z_i^1 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{p-1} n_k^q \frac{dy_i^{p-q}}{dw_k} = -T_i^p \quad (\text{если } p>1), \qquad T_i^1 = 0.$$

Приравняв коэффициенты при μ^p $(p > 1)$, получим

$$\sum_k n_k^0 \frac{dx_i^p}{dw_k} = X_i^p + Z_i^p - \sum_k n_k^p \frac{dx_i^0}{dw_k},$$

$$\sum_k n_p^0 \frac{dy_i^p}{dw_k} = Y_i^p + T_i^p - \sum_k n_k^p \frac{dy_i^0}{dw_k}. \tag{13}$$

Приравняв члены, не зависящие от μ, получим

$$\sum n_k^0 \frac{dx_i^0}{dw_k} = 0, \qquad \sum n_k^0 \frac{dy_i^0}{dw_k} = n_i^0$$

— уравнения, которым, как мы уже видели, можно удовлетворить, положив

$$x_i^0 = \text{const}, \qquad y_i^0 = w_i.$$

После этого уравнения (13) приводятся к виду

$$\sum n_k^0 \frac{dx_i^p}{dw_k} = X_i^p + Z_i^p, \quad \sum n_k^0 \frac{dy_i^p}{dw_k} = Y_i^p + T_i^p - n_i^p. \tag{14}$$

Посмотрим, каким образом можно воспользоваться уравнениями (14), чтобы последовательно найти функции

$$x_i^p \quad \text{и} \quad y_i^p,$$

периодические по w, средние значения которых являются искомыми функциями от x_k^0.

В двух предыдущих пунктах мы видели, что найти такие функции можно.

Предположим, что мы уже вычислили

$$x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^{p-1}, y_i^1, y_i^2, \ldots, y_i^{p-1} \tag{15}$$

и что требуется найти x_i^p и y_i^p с помощью уравнений (14).

Так как X_i^p и Z_i^p зависят лишь от переменных (15), правая часть первого из уравнений (14) представляет собой известную функцию от w, периодическую по этим переменным.

Пусть

$$X_i^p + Z_i^p = \sum A \cos(m_1 w_1 + m_2 w_2 + \ldots + m_n w_n + h)$$

— такая функция. Интегрируя уравнение (14), мы получаем

$$x_i^p = \sum \frac{A \sin(m_1\omega_1 + m_2 w_2 + \ldots + m_n w_n + h)}{m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 + \ldots + m_n n_n^0} + K_i^p.$$

Отсюда видно, что величины x_i^p, вообще говоря, являются периодическими функциями от w. Исключение могло бы представиться лишь в двух случаях: если бы величины n_i^0 удовлетворяли какому-то линейному соотношению с целыми коэффициентами

$$\sum m_i n_i^0 = 0$$

и если бы среднее значение периодической функции $X_i^p + Z_i^p$ было отлично от нуля. В силу сделанного ранее предположения первый случай невозможен. Непосредственное доказательство того, что второй случай также не имеет места, нелегко, но поскольку мы заранее знаем, что величина x_i^p должна быть периодической функцией от w, мы уверены, что среднее значение $X_i^p + Z_i^p$ равно нулю. *Именно поэтому я и начал изложение метода Линдштедта с общих соображений, содержащихся в пунктах* **125** *и* **126**, *вместо того, чтобы сразу же перейти к вычислениям.*

Что касается константы K_k^p, то, как мы видели в предыдущем пункте, ее можно произвольным образом приравнять какой-нибудь функции от x_k^0.

Нам осталось еще вычислить y_i^p с помощью второго из уравнений (14). Ясно, что так же, как и x_i^p, величины y_i^p можно найти в виде периодической функции от w при условии, что среднее значение функции

$$Y_i^p + T_i^p - n_i^p$$

равно нулю. Однако константа n_i^p остается произвольной и ясно, что ее всегда можно подобрать так, чтобы обратить это среднее значение в нуль.

Таким образом, вычисление различных членов рядов (2 quater) всегда выполнимо.

Полученные формулы содержат достаточно много произвола, которым вычислитель может искусно пользоваться для сокращения выкладок. В самом деле, средние значения x_i^p и y_i^p можно выбирать произвольно.

Среди тех возможностей, на которых можно остановить свой выбор, я укажу на следующую, отнюдь не желая рекомендовать ее как-то особо. Константы K_i^p можно выбрать так, чтобы

$$n_i^p = 0, \quad n_i = n_i^0.$$

Этот метод применим всякий раз, когда величины n_i^0 можно выбрать так, чтобы между ними не существовало никаких линейных соотношений с целыми коэффицентами и, следовательно, всякий раз, когда соотношение между этими n величинами можно выбирать произвольно.

Именно так обстоит дело, например, в том частном случае задачи трех тел, о котором шла речь в п. 9. В самом деле, в этом случае

$$F_0 = \frac{1}{2x_1^2} + x_2,$$

откуда

$$n_1^0 = \frac{1}{x_1^3}, \qquad n_2^0 = -1.$$

Ясно, что x_1 можно выбрать так, чтобы отношение n_1^0/n_2^0 имело необходимое нам значение.

Точно так же обстоит дело и при рассмотрении следующего уравнения, возникающего в приложениях методов Гильдена, которое было подробно изучено Линдштедтом

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = \mu\varphi'(x, y), \tag{16}$$

где φ' — функция, допускающая разложение по степеням y и периодическая по x.

Замечу прежде всего, что функцию φ' можно рассматривать как производную по y от некоторой функции φ того же вида. Поэтому, как мы уже видели в п. 2, я могу вместо предыдущего уравнения рассматривать следующие:

$$-F = \frac{q^2}{2} + \frac{n^2y^2}{2} - \mu\varphi(y, x) + p,$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dF}{dp} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{dF}{dq} = q, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{dF}{dx},$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dF}{dy} = -n^2y + \mu\varphi'(y, x).$$

Положим затем

$$y = \rho\sin y_1, \quad q = n\rho\cos y_1, \quad \frac{n\rho^2}{2} = x_1, \quad p = x_2, \quad x = y_2.$$

Тогда наши уравнения запишутся в виде

$$-F = nx_1 + x_2 - \mu\varphi\left(\sqrt{\frac{2x_1}{n}}\sin y_1, y_2\right),$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = +\frac{dF}{dy_2}, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}.$$

В самом деле, из п. 6 следует, что каноническая форма уравнений не изменится.

Положив $\mu = 0$, получим

$$F_0 = -nx_1 - x_2,$$

откуда

$$n_1^0 = -\frac{dF_0}{dx_1} = -n, \quad n_2^0 = -\frac{dF_0}{dx_2} = 1.$$

Следовательно, если число n иррационально, то между n_1^0 и n_2^0 не существует никаких линейных соотношений с целыми коэффициентами и метод оказывается применимым.

Точно так же метод будет применим и в общем случае задачи трех тел, если эти тела движутся в одной плоскости и закон притяжения отличен

от ньютоновского. Для ньютоновского закона притяжения рассматриваемый метод теряет силу, если только речь идет не о тех его важных модификациях, которые составят содержание последующих пунктов.

В самом деле, в этом случае (мы придерживаемся обозначений, указанных в п. 125) F_0 не будет содержать x_3, следовательно, число n_3^0 равно нулю. Это означает, что между n_i^0 существует некое линейное соотношение с целыми коэффициентами, а именно:

$$n_3^0 = 0.$$

Излагаемый здесь прямой метод весьма схож с оригинальным методом Линдштедта. По сравнению с косвенными методами двух предыдущих пунктов он обладает важным преимуществом, поскольку дает нам непосредственно значения x_i и y_i как функции от w, а следовательно, и от времени, и таким образом особенно удобен при вычислении эфемерид. Однако эти косвенные методы необходимы нам, ибо без них я не мог бы доказать законность прямых методов (которые остаются в силе лишь при условии, что среднее значение функции $X_i^p + Z_i^p$ равно нулю) или по крайней мере не мог бы доказать, не используя интегральные инварианты, о которых я буду говорить лишь в одной из следующих глав. Знание этих косвенных методов отнюдь не будет для нас бесполезным и с другой точки зрения. В самом деле, мы видели во введении, что иногда вместо решения можно с успехом использовать какой-нибудь интеграл или (если говорить на языке пунктов 1 и 19) какое-нибудь инвариантное соотношение. Кроме того, нахождение функции S можно использовать для проверки прямых вычислений.

128. Определенную выше константу K_i^p можно выбрать так, чтобы $[Y_i^p + T_i^p]$, т. е. среднее значение функции $Y_i^p + T_i^p$, было равно нулю и, следовательно,

$$n_i^p = 0, \qquad n_i = n_i^0.$$

В самом деле,

$$Y_i^p = -\frac{d^2F_0}{dx_i\,dx_1}x_1^p - \frac{d^2F_0}{dx_i\,dx_2}x_2^p - \ldots - \frac{d^2F_0}{dx_i\,dx_n}x_n^p + U_i^p,$$

где U_i^p зависит только от x_i^k и y_i^k ($i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$). Приравнивая средние значения, получим

$$[Y_i^p + Z_i^p] = -\sum_p \frac{d^2F_0}{dx_i\,dx_k}K_k^p + [U_i^p + T_i^p].$$

Функции U_i^p и T_i^p полностью известны. Поэтому известна и функция $[U_i^p + T_i^p]$. Следовательно, для того чтобы обратить в нуль h_i^p, доста-

точно так подобрать константы K_i^p, чтобы удовлетворялось n линейных уравнений

$$\frac{d^2F_0}{dx_i\,dx_1}K_1^p+\frac{d^2F_0}{dx_i\,dx_2}K_2^p+\ldots+\frac{d^2F_0}{dx_i\,dx_n}K_n^p=[U_i^p+T_i^n]. \qquad (1)$$

Для этого необходимо и достаточно [34], чтобы гессиан функции F_0 не обращался в нуль. Однако в случае уравнения (16), т. е. в том случае, который особенно подробно рассматривал Линдштедт, гессиан оказывается в точности равным нулю. Именно это и объясняет, почему Линдштедт не заметил, что n_i можно положить равным n_i^0.

Этот гессиан равен нулю и в частном случае задачи трех тел, сформулированном в пункте 9, но в п. 43 мы видели, каким образом можно с помощью простого искусственного приема устранить эту трудность.

Сравнение с методом Ньюкома

129. Чтобы привести ряды к тому же виду, который мы уже рассматривали в этой главе, Ньюком воспользовался методом вариации произвольных постоянных. Для того чтобы доказать, что его результат не может отличаться от результатов, полученных нами в предыдущих параграфах, мы сейчас изложим этот метод в следующем виде.

Обратимся еще раз к уравнению с частными производными

$$F\left(\frac{dS}{dy_i},\ y_i\right)=\text{const}, \qquad (1)$$

которое в п. 125 фигурировало как уравнение (4).

Пусть S' — функция, зависящая от y_1, y_2, ..., y_n и n констант x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, которая приближенно удовлетворяет уравнению (1), так что

$$F\left(\frac{dS'}{dy_i},\ y_i\right)=\varphi(x_i^0,\ y_i)=\varphi_0(x_i^0)+\varepsilon\varphi_1(x_i^0,\ y_i),$$

где φ_0 зависит лишь от x_i^0, а величина ε очень мала. Приближенное решение канонических уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i},\qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i} \qquad (2)$$

мы получим, полагая

$$\frac{dS'}{dy_i}=x_i,\qquad \frac{dS'}{dx_i^0}=y_i^0=n_it+\omega_i,\qquad n_i=-\frac{d\varphi_0}{dx_i^0} \qquad (3)$$

и рассматривая x_i^0 и ω_i как произвольные постоянные.

Предположим теперь, что требуется перейти к аппроксимации более высокого порядка, пользуясь методом Лагранжа. В этом случае величины x_i^0 и ϖ_i уже нельзя будет считать константами. Их следует рассматривать как новые неизвестные функции. Эти новые уравнения, по теореме, сформулированной в п. 4, мы получим следующим образом. Подставим вместо y_i их выражения через x_i^0 и y_i^0, полученные из уравнений (3). Тогда

$$\varphi(x_i^0, y_i) = \psi(x_i^0, y_i^0),$$

и мы получим канонические уравнения

$$\frac{dx_i^0}{dt} = \frac{d\psi}{dy_i^0}, \qquad \frac{dy_i^0}{dt} = -\frac{d\psi}{dx_i^0}. \tag{4}$$

Вместо ϖ_i я выбрал в качестве переменных y_i^0 (что одно и то же) для того, чтобы сделать по возможности более наглядной каноническую форму этих уравнений.

Интегрирование уравнений (4) можно свести к интегрированию уравнения с частными производными

$$\psi\left(\frac{dS}{dy_i^0}, y_i^0\right) = \text{const}. \tag{5}$$

Пусть S' — функция, зависящая от y_i^0 и n новых констант x_i^1 и удовлетворяющая этому уравнению. Если положить

$$\frac{dS''}{dy_i^0} = x_i^0, \qquad \frac{dS''}{dx_i^1} = y_i^1, \tag{6}$$

то уравнениям (4) мы удовлетворим, приравняв величины x_i^1 этим константам, а величины y_i^1 — линейным функциям времени.

Если S'' — приближенный интеграл уравнения (5), то мы тем самым получаем и приближенные решения уравнений (4).

Таков метод вариации постоянных. Он совсем не совпадает с тем методом, который мы применяли в п. 125. Оставляя все время уравнение (1) в неизменном виде, мы, найдя некоторое приближенное решение, пытаемся найти другое решение, дающее лучшую аппроксимацию. Пусть S''' — такое решение, зависящее от y_i и n констант x_i. Если мы затем положим

$$\frac{dS'''}{dy_i} = x_i, \qquad \frac{dS'''}{dx_i^1} = y_i^1, \tag{7}$$

то x_i^1 будут константами, а y_i^1 — линейными функциями времени, причем либо точно, если S''' представляет собой точное решение уравнения (1), либо приближенно, если S''' является всего лишь приближенным решением. Можно ли выбрать S''' так, чтобы уравнения (7) были экви-

валентны уравнениям (3) и (6)? Уравнения (3) и (6) можно записать в виде

$$dS' = \Sigma x_i\, dy_i + \Sigma y_i^0\, dx_i^0,$$
$$dS'' = \Sigma x_i^0\, dy_i^0 + \Sigma y_i^1\, dx_i^1,$$

а уравнения (7) в виде

$$dS''' = \Sigma x_i dy_i + \Sigma y_i^1\, dx_i^1.$$

Достаточно положить, следовательно,

$$S''' = S' + S'' - \Sigma x_i^0 y_i^0,$$

чтобы изложенный в п.125 метод уже не отличался сколько-нибудь существенно от метода Ньюкома и по сравнению с последним обладал лишь тем преимуществом, что позволил избежать большого числа замен переменных.

Я добавлю, что константы интегрирования мы специально подобрали так, чтобы уравнения сохраняли каноническую форму. Ньюком, а впрочем, и другие астрономы не часто прибегали к методу Лагранжа, поскольку уравнения, в которых появляются скобки Лагранжа, на первый взгляд представляются чрезвычайно сложными. Однако это различие несущественно.

Глава X

ПРИМЕНЕНИЕ РАССМОТРЕННЫХ МЕТОДОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Постановка задачи

130. Принципы, изложенные в предыдущей главе, находят важное применение при изучении некоторых уравнений, часто рассматриваемых астрономами.

Пусть

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \tag{1}$$

— наши канонические уравнения и пусть

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots .$$

Предположим, что сопряженные переменные x_i и y_i являются кеплеровскими переменными, введенными в п. **11**, функция F_0 зависит только от βL и $\beta' L'$, т. е. от двух больших осей, и что та часть разложения функции F, которая получится, если отбросить $\mu^2 F_2$ и все другие члены, следующие за μF_1, представляет возмущающую функцию.

Тогда F_1 разлагается по синусам и косинусам линейных комбинаций двух средних аномалий l и l' с целыми коэффициентами. Среднее значение этой функции, периодической по l и l', я обозначу символом R.

Часто при изучении вековых возмущений элементов двух планет в разложении функции F_1 пренебрегают периодическими членами и, таким образом, заменяют эту функцию ее средним значением R. В результате такой замены уравнения примут вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF_0}{dy_i} + \mu \frac{dR}{dy_i}; \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_i} - \mu \frac{dR}{dx_i}. \tag{1bis}$$

Можно ли быть уверенным в том, что, поступая таким образом, мы получим именно коэффициенты при вековых членах в x_i и y_i, иными словами, коэффициенты при членах, периоды которых неограниченно возрастают, когда массы планет стремятся к нулю? Очевидно, что нет, однако степень приближения, вообще говоря, достаточно велика, и астрономы с полным основанием довольствуются ею. Именно с этим обстоятельством и связано изучение уравнений (1bis).

Поскольку F_0 и R не зависят от l и l', мы прежде всего получим

$$\frac{d(\beta L)}{dt} = \frac{d(\beta' L')}{dt} = 0,$$

вследствие чего L и L' можно считать константами. Следовательно, мы можем ограничиться рассмотрением четырех пар сопряженных переменных

$$\begin{array}{cccc} \beta G, & \beta\Theta, & \beta' G', & \beta'\Theta', \\ g, & \theta, & g', & \theta' \end{array}$$

(обозначения п. 11), которые временно обозначим

$$\begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4. \end{array}$$

Функция F_0 не зависит ни от одной из этих восьми переменных, и уравнения (1bis) запишутся в виде

$$\frac{dx_i}{\mu\, dt} = \frac{dR}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{\mu\, dt} = -\frac{dR}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{1ter}$$

Функция R зависит лишь от восьми переменных x_i и y_i, поскольку она не зависит от l и l', а L и L' впредь будут считаться постоянными. Таким образом, уравнения (1ter) записаны в канонической форме.

После того как x_i и y_i вычислены из уравнений (1ter), величины l и l' находят из уравнений

$$\frac{dl}{dt} = -\mu \frac{dR}{\beta\, dL}, \qquad \frac{dl'}{dt} = -\mu \frac{dR}{\beta'\, dL'},$$

которые интегрируются в квадратурах, поскольку величины l и l' не входят в их правые части.

Основатели небесной механики рассматривали эти уравнения, ограничиваясь лишь первыми членами в разложении функции R, т. е. членами второго порядка относительно эксцентриситетов и наклонений. В этом случае уравнения оказываются линейными и с постоянными коэффициентами. Затем Леверрье и Селлерье рассмотрели члены четвертого порядка и убедились, что эти члены не оказывают влияния на устойчивость.

Однако как мы только что видели, принципы, изложенные в предыдущей главе, позволяют обобщить этот результат и доказать, что он остается в силе несколько дольше, чем можно было бы ожидать, исходя из рассматриваемого приближения (что понятно с точки зрения формального анализа).

Новая замена переменных

131. Если ввести переменные (4) п. 12, то функцию R можно будет разлагать по степеням ξ, ξ', η, η', p, p', q и q'. Как мы уже видели, членов нечетной степени относительно

$$\xi, \quad \xi', \quad \eta, \quad \eta', \quad p, \quad p', \quad q, \quad q' \tag{2}$$

не будет [35].

В силу этого мы можем записать

$$R(\xi, \xi', \eta, \eta', p, p', q, q') = R_0 + R_2 + R_4 + R_6 + \ldots,$$

где R_k представляет собой совокупность членов k-й степени относительно величин (2). Нам необходимо проинтегрировать канонические уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dR}{d\eta}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dR}{d\xi} \ldots.$$

Однако для того чтобы привести наши уравнения к наиболее удобному виду, нам потребуется еще одна замена переменных.

Предположим прежде всего, что мы пренебрегли всеми членами порядка выше второго относительно величин (2), т. е. что

$$R = R_0 + R_2.$$

R_0 есть константа, R_2 представляет собой однородный полином второй степени относительно переменных (2). Следовательно, если записать канонические уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{d\xi}{dt} = \frac{dR_2}{d\eta}, \quad \frac{d\xi'}{dt} = \frac{dR_2}{d\eta'}, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{dR_2}{dq}, \quad \frac{dp'}{dt} = \frac{dR_2}{dq'},\\
&\frac{d\eta}{dt} = -\frac{dR_2}{d\xi}, \quad \frac{d\eta'}{dt} = -\frac{dR_2}{d\xi}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{dR_2}{dp}, \quad \frac{dq'}{dt} = -\frac{dR_2}{dp'},
\end{aligned} \tag{3}$$

то эти уравнения будут линейными относительно переменных (2).

Предположим, что вместо разложения R по степеням переменных (2), мы разложим эту функцию по степеням эксцентриситетов и наклонений. Пусть

$$R = R_0^* + R_2^* + R_1^* + \ldots$$

— полученное разложение, где R_k^* означает совокупность членов степени k относительно эксцентриситетов и наклонений.

Из результатов в п. 12 следует, что переменные (2) допускают разложение по степеням эксцентриситетов и наклонений, так что если каждое

из этих разложений оборвать на его первом члене, то получим

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{\Lambda}\, e\cos\varpi, & \xi' &= \sqrt{\Lambda'}\, e'\cos\varpi', \\ \eta &= -\sqrt{\Lambda}\, e\sin\varpi, & \eta' &= -\sqrt{\Lambda'}\, e'\sin\varpi', \\ p &= \sqrt{\Lambda}\, i\cos\theta, & p' &= \sqrt{\Lambda'}\, i'\cos\theta', \\ q &= -\sqrt{\Lambda}\, i\sin\theta, & q' &= -\sqrt{\Lambda'}\, i'\sin\theta' \end{aligned} \qquad (1)$$

(так же, как и в п. 12, я для краткости обозначаю $\Lambda = \beta L$, $\Lambda' = \beta' L'$).

Отсюда следует, что

$$R_0 = R_0^*$$

и что для получения R_2^* достаточно заменить переменные (2) в R_2 их приближенными значениями (4).

Наоборот, функции R_2 мы получим, заменив в R_2^* переменные

$$e\cos\varpi,\quad e'\cos\varpi',\quad e\sin\varpi,\quad e'\sin\varpi',\quad i\cos\theta,\quad i'\cos\theta',\quad i\sin\theta,\quad i'\sin\theta'$$

на

$$\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}},\quad \frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}},\quad \frac{-\eta}{\sqrt{\Lambda}},\quad \frac{-\eta'}{\sqrt{\Lambda'}},\quad \frac{p}{\sqrt{\Lambda}},\quad \frac{p'}{\sqrt{\Lambda'}},\quad \frac{-q}{\sqrt{\Lambda}},\quad \frac{-q'}{\sqrt{\Lambda'}}.$$

Но разложение функции R_2^* хорошо известно. В самом деле, R_2^* представляет собой не что иное, как совокупность вековых членов возмущающей функции, имеющей вторую степень относительно эксцентриситетов и наклонений.

Я могу сделать два вывода: во-первых, что линейные уравнения (3) можно с помощью очень простой замены переменных свести к уравнениям (A) и (C) «*Небесной механики*» Лапласа (кн. II, гл. VII, т. I, § 55 и 59, стр. 321 и 334, Gauthier-Villars, 1878 г.), которые служат для вычисления вековых возмущений эксцентриситетов и перигелиев, наклонений и узлов; во-вторых, что функция R_2 имеет особый вид и может быть записана следующим образом:

$$R_2 = R_2'(\xi, \xi') + R_2'(\eta, \eta') + R_2''(p, p') + R_2''(q, q').$$

Иначе говоря, она является суммой четырех квадратичных форм: первой, зависящей только от ξ и ξ', второй, зависящей от η и η' точно таким же образом, как первая форма от ξ и ξ'; третьей, зависящей только от p и p', четвертой, зависящей от q и q' так же, как третья форма зависит от p и p'.

Установив это, произведем линейную замену переменных, подобрав ее так, чтобы не изменить канонической формы наших уравнений.

Для этого положим

$$V = \xi(\sigma_1 \cos\varphi + \sigma_2 \sin\varphi) + \xi'(-\sigma_1 \sin\varphi + \sigma_2 \cos\varphi) + p(\sigma_3 \cos\varphi' + \sigma_4 \sin\varphi') + p'(-\sigma_3 \sin\varphi' + \sigma_4 \cos\varphi'),$$

где φ и φ' — два угла, зависящие от Λ и Λ'.

Положим затем

$$\eta = \frac{dV}{d\xi} = \sigma_1 \cos\varphi + \sigma_2 \sin\varphi, \qquad \eta' = \frac{dV}{d\xi'} = -\sigma_1 \sin\varphi + \sigma_2 \cos\varphi,$$

$$q = \frac{dV}{dp} = \sigma_3 \cos\varphi' + \sigma_4 \sin\varphi', \quad q' = \frac{dV}{dp'} = -\sigma_3 \sin\varphi' + \sigma_4 \cos\varphi'.$$

Таким образом, я получаю соотношения, определяющие новые переменные σ_i как функции старых переменных.

Я введу еще четыре новых переменных τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, определяемых соотношениями

$$\tau_i = \frac{dV}{d\sigma_i},$$

откуда

$$\xi = \tau_1 \cos\varphi + \tau_2 \sin\varphi, \qquad \xi' = -\tau_1 \sin\varphi + \tau_2 \cos\varphi,$$

$$p = \tau_3 \cos\varphi' + \tau_4 \sin\varphi', \quad p' = -\tau_3 \sin\varphi' + \tau_4 \cos\varphi'.$$

По теореме п. 4 каноническая форма уравнений не изменится, если заменить старые переменные

$$\xi, \quad \xi', \quad p, \quad p',$$
$$\eta, \quad \eta', \quad q, \quad q'$$

новыми переменными

$$\tau_1, \quad \tau_2, \quad \tau_3, \quad \tau_4,$$
$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3, \quad \sigma_4.$$

Осталось показать, как следует выбирать углы φ и φ' в виде функций от Λ и Λ'.

Угол φ выбирают так, чтобы квадратичная форма

$$R_2'(\xi, \xi') = R_2'(\tau_1 \cos\varphi + \tau_2 \sin\varphi, -\tau_1 \sin\varphi + \tau_2 \cos\varphi)$$

свелась к сумме двух квадратов

$$A_1\tau_1^2 + A_2\tau_2^2.$$

При этом получают

$$R_2'(\eta, \eta') = R_2'(\sigma_1 \cos\varphi + \sigma_2 \sin\varphi, -\sigma_1 \sin\varphi + \sigma_2 \cos\varphi) = A_1\sigma_1^2 + A_2\sigma_2^2.$$

Аналогично угол φ' выбирают так, чтобы

$$R_2''(p, p') = A_3\tau_3^2 + A_4\tau_4^2,$$
$$R_2''(q, q') = A_3\sigma_3^2 + A_4\sigma_4^2.$$

В результате мы получаем

$$R_2 = A_1(\sigma_1^2 + \tau_1^2) + A_2(\sigma_2^2 + \tau_2^2) + A_3(\sigma_3^2 + \tau_3^2) + A_4(\sigma_4^2 + \tau_4^2).$$

Заметим, что A_1, A_2, A_3, A_4 зависят от Λ и Λ'.

Соотношение между переменными ξ, η, σ и τ, которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} \xi &= \tau_1\cos\varphi + \tau_2\sin\varphi, & \eta &= \sigma_1\cos\varphi + \sigma_2\sin\varphi, \\ \xi' &= -\tau_1\sin\varphi + \tau_2\cos\varphi, & \eta' &= -\sigma_1\sin\varphi + \sigma_2\cos\varphi, \end{aligned} \tag{5}$$

представляет собой линейную *ортогональную* подстановку; как мы объяснили в п. 5, именно благодаря этому обстоятельству не изменяется каноническая форма уравнений. Следовательно, рассматриваемая задача сводится к отысканию углов φ и φ', т. е. к выбору ортогональной подстановки (5). Но отыскание этой подстановки в свою очередь сводится к интегрированию упоминавшихся выше уравнений (A) и (C) Лапласа. Численные вычисления могут быть в силу этого весьма продолжительными, но те вычисления, которые относятся к солнечной системе, уже выполнены.

Аналогичные результаты получаются и в том случае, когда вместо трех тел рассматривают $n + 1$ тело.

Функция R_2 была бы по-прежнему суммой четырех квадратичных форм, но каждая из этих четырех форм вместо того, чтобы зависеть лишь от двух переменных, содержала бы n переменных.

Следовательно, мы бы получили n переменных, аналогичных переменным ξ, n переменных, аналогичных η, n переменных, аналогичных p, и n переменных, аналогичных q. Задача сводилась бы так же, как и раньше, к отысканию линейной ортогональной подстановки, которая, будучи примененной к переменным ξ, преобразовывала первую из этих четырех квадратичных форм к сумме n квадратов.

Возвратимся, однако, к задаче трех тел.

Произведем последнюю замену переменных, положив

$$\tau_i = \sqrt{2\rho_i}\cos\omega_i, \qquad \sigma_i = \sqrt{2\rho_i}\sin\omega_i.$$

Согласно п. 6 такая подстановка не изменяет канонической формы уравнений.

В результате окажется, что R_2 разлагается по степеням $\sqrt{\rho_i}$ и периодична по ω_i. Кроме того,

$$R_2 = 2A_1\rho_1 + 2A_2\rho_2 + 2A_3\rho_3 + 2A_3\rho_4,$$

т. е. R_2 не зависит от ω_i.

Аналогично угол φ' выбирают так, чтобы

$$R_2''(p, p') = A_3\tau_3^2 + A_4\tau_4^2,$$
$$R_2''(q, q') = A_3\sigma_3^2 + A_4\sigma_4^2.$$

В результате мы получаем

$$R_2 = A_1(\sigma_1^2 + \tau_1^2) + A_2(\sigma_2^2 + \tau_2^2) + A_3(\sigma_3^2 + \tau_3^2) + A_4(\sigma_4^2 + \tau_4^2).$$

Заметим, что A_1, A_2, A_3, A_4 зависят от Λ и Λ'.

Соотношение между переменными ξ, η, σ и τ, которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} \xi &= \tau_1\cos\varphi + \tau_2\sin\varphi, & \eta &= \sigma_1\cos\varphi + \sigma_2\sin\varphi, \\ \xi' &= -\tau_1\sin\varphi + \tau_2\cos\varphi, & \eta' &= -\sigma_1\sin\varphi + \sigma_2\cos\varphi, \end{aligned} \tag{5}$$

представляет собой линейную *ортогональную* подстановку; как мы объяснили в п. 5, именно благодаря этому обстоятельству не изменяется каноническая форма уравнений. Следовательно, рассматриваемая задача сводится к отысканию углов φ и φ', т. е. к выбору ортогональной подстановки (5). Но отыскание этой подстановки в свою очередь сводится к интегрированию упоминавшихся выше уравнений (A) и (C) Лапласа. Численные вычисления могут быть в силу этого весьма продолжительными, но те вычисления, которые относятся к солнечной системе, уже выполнены.

Аналогичные результаты получаются и в том случае, когда вместо трех тел рассматривают $n + 1$ тело.

Функция R_2 была бы по-прежнему суммой четырех квадратичных форм, но каждая из этих четырех форм вместо того, чтобы зависеть лишь от двух переменных, содержала бы n переменных.

Следовательно, мы бы получили n переменных, аналогичных переменным ξ, n переменных, аналогичных η, n переменных, аналогичных p, и n переменных, аналогичных q. Задача сводилась бы так же, как и раньше, к отысканию линейной ортогональной подстановки, которая, будучи примененной к переменным ξ, преобразовывала первую из этих четырех квадратичных форм к сумме n квадратов.

Возвратимся, однако, к задаче трех тел.

Произведем последнюю замену переменных, положив

$$\tau_i = \sqrt{2\rho_i}\cos\omega_i, \qquad \sigma_i = \sqrt{2\rho_i}\sin\omega_i.$$

Согласно п. 6 такая подстановка не изменяет канонической формы уравнений.

В результате окажется, что R_2 разлагается по степеням $\sqrt{\rho_i}$ и периодична по ω_i. Кроме того,

$$R_2 = 2A_1\rho_1 + 2A_2\rho_2 + 2A_3\rho_3 + 2A_3\rho_4,$$

т. е. R_2 не зависит от ω_i.

Эту функцию можно разложить по степеням ε, она периодична относительно переменных второй серии ω_i, наконец, ее первый член R_2' не зависит от этих переменных ω_i. Следовательно, мы оказываемся в условиях применимости результатов предыдущей главы.

Единственное предположение, которое мы сделаем, будет состоять в том, что между четырьмя константами A_1, A_2, A_3 и A_4 не существует линейного соотношения с целыми коэффициентами. Вероятность того, что такое соотношение существует, равна нулю, однако можно потребовать, чтобы не существовало и простого соотношения, достаточно близкого к точному соотношению, ибо в противном случае ряды сходились бы лишь чрезвычайно медленно. Известно, что этот вопрос рассматривался Леверрье, однако для случая дальних планет его пришлось оставить нерешенным, поскольку массы этих планет известны плохо, а коэффициенты A зависят от этих масс.

Очевидно, что все сказанное без изменений переносится и на тот случай, когда число тел больше трех.

Итак, уравнениям, определяющим вековые возмущения, можно формально удовлетворить с помощью тригонометрических рядов того же вида, что и ряды Ньюкома и Линдштедта. Тогда $e\cos\tilde{\omega}$, $e\sin\tilde{\omega}$, $i\cos\theta$, $i\sin\theta$ выражаются в виде рядов, члены которых периодичны по t. Лаплас и Лагранж считали, что этот результат полностью доказывает устойчивость солнечной системы. На сегодняшний день мы относимся к этому результату гораздо критичнее, поскольку сходимость соответствующих разложений не доказана. Тем не менее этот результат остается очень важным.

В заключение заметим, что в том случае, когда имеется только три тела и они движутся в одной плоскости, канонические уравнения (2) вырождаются в уравнения, имеющие только одну степень свободы. В этом случае их можно проинтегрировать в квадратурах.

Излишне напоминать, что интегрирование уравнений (2) эквивалентно интегрированию уравнения с частными производными

$$R\left(\frac{dT}{d\omega_i}, \omega_i\right) = \text{const}$$

где T — неизвестная функция, ω_i — независимые переменные, а левая часть представляет собой функцию R, в которой переменные ρ_i заменены производными $dT/d\omega_i$ [36].

Глава XI

ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Трудность задачи

133. В случае задачи трех тел имеется одна особая трудность, которая делает чрезвычайно сложным применение к этой задаче методов главы IX.

В самом деле, функция F_0 зависит не от шести переменных первой серии

$$\beta L,\ \beta' L',\ \beta G,\ \beta' G',\ \beta\Theta,\ \beta'\Theta',$$

а лишь от двух из них

$$\beta L \quad \text{и} \quad \beta' L'.$$

Следовательно, среди величин, которые мы обозначили через

$$n_i^0 = -\frac{dF_0}{dx_i},$$

четыре величины, а именно

$$-\frac{dF_0}{d\beta G},\quad -\frac{dF_0}{d\beta' G'},\quad -\frac{dF_0}{d\beta\Theta},\quad -\frac{dF_0}{d\beta'\Theta'}$$

равны нулю.

Следовательно, не выполняется условие, при котором остаются в силе выводы, полученные в предыдущей главе, а именно выводы о том, что между величинами n_i^0 нет никаких линейных соотношений с целыми коэффициентами.

Эта трудность не возникает в том случае, если три тела движутся в одной плоскости, при всех законах притяжения, отличных от закона Ньютона. В самом деле, уравнения

$$\frac{dF_0}{dG} = \frac{dF_0}{dG'} = \frac{dF_0}{d\Theta} = \frac{dF_0}{d\Theta'} = 0$$

имеют очевидный смысл. Они означают, что при кеплеровском движении перигелии и узлы неподвижны; действительно, мы имеем уравнения

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{dF}{\beta dG},\qquad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{dF}{\beta' dG'}.$$

При кеплеровском движении функция F вырождается в F_0, а g и θ являются константами.

В случае задачи двух тел, когда закон притяжения отличен от ньютоновского, узлы по-прежнему неподвижны, но перигелии уже неподвижными не будут.

Таким образом, если движение происходит в плоскости и только узлы остаются неподвижными, то метод, изложенный в главе IX, будет применим без каких бы то ни было изменений.

Обобщение метода главы IX на некоторые особые случаи

134. Рассмотрим теперь случай, когда F_0 содержит не все из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Предположим для ясности, что имеется три степени свободы и что F_0 содержит две переменные первого ряда x_1 и x_2 и не содержит третьей переменной x_3. Отсюда следует, что

$$n_3^0 = 0.$$

Мы по-прежнему предполагаем, что

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots,$$

где F_1 — функция от $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$, периодическая по y_1, y_2 и y_3.

Я буду пока считать F_1 функцией только от y_1 и y_2. Эта функция периодична по этим двум переменным, и я обозначу через R ее среднее значение, зависящее от x_1, x_2, x_3 и y_3.

Сначала я рассмотрю случай, когда R зависит от x_1, x_2 и x_3 и не зависит от y_3.

Попытаемся найти функцию

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \ldots,$$

имеющую тот же вид, что и функция S, рассмотренная в п. 125, и удовлетворяющую формально уравнению

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, \frac{dS}{dy_3}, y_1, y_2, y_3\right) = C, \tag{4}$$

где C — константа, которую можно записать в виде

$$C = C_0 + \mu C_1 + \mu^2 C_2 + \ldots.$$

Здесь $C_0, C_1, C_2, \ldots$ — произвольные постоянные.

Положим сначала

$$\frac{dS_0}{dy_1} = x_1^0, \qquad \frac{dS_0}{dy_2} = x_2^0.$$

Константы x_1^0 и x_2^0 будут связаны соотношением

$$F_0(x_1^0, x_2^0) = C_0.$$

Но поскольку константа C_0 произвольна, x_1^0 и x_2^0 в свою очередь оказываются произвольными.

Затем я положу

$$\frac{dF_0}{dx_1^0} = -n_1^0, \qquad \frac{dF_0}{dx_2^0} = -n_2^0.$$

Тогда

$$S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 + [S_0],$$

где $[S_0]$ — произвольная функция, зависящая от y_3, которую еще нужно определить. Приравняв в уравнении (4) коэффициенты при μ, мы так же, как и в п. 125, получим

$$n_1^0 \frac{dS_1}{dy_1} + n_2^0 \frac{dS_1}{dy_2} = F_1\left(x_1^0, x_2^0, \frac{d[S_0]}{dy_3}, y_1, y_2, y_3\right) - C_1. \tag{5}$$

Какова бы ни была произвольная функция $[S_0]$, правая часть уравнения (5) будет периодической функцией от y_1 и y_2, а среднее значение этой функции будет

$$R\left(x_1^0, x_2^0, \frac{d[S_0]}{dy_3}, y_3\right) - C_1.$$

Мы хотим, чтобы функция S_1 имела следующий вид:

$$\alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \alpha_{13} y_3 + \text{функция, периодическая по } y_1, y_2 \text{ и } y_3.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы среднее значение правой части уравнения (5), как мы видели в п. 125, было равно некоторой константе, которую обозначим $C_1' - C_1$. Тогда для нахождения произвольной функции $[S_0]$ получаем следующее уравнение:

$$R\left(x_1^0, x_2^0, \frac{d[S_0]}{dy_3}, y_3\right) = C_1'. \tag{6}$$

Я предположил выше, что R не зависит от y_3. Поэтому для того, что бы удовлетворить уравнению (6), достаточно взять

$$[S_0] = x_3^0;$$

x_3^0 — константа, которую пока можно считать произвольной, поскольку произвольна константа C_1'. Следовательно,

$$S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 + x_3^0 y_3.$$

Приравняв в уравнении (5) средние значения правой и левой частей, получим

$$n_1^0 \alpha_{11} + n_2^0 \alpha_{12} = C_1' - C_1.$$

Поскольку константа C_1 произвольна, я положу $C_1 = C_1'$, что позволит мне так же, как и в п. 125, выбрать

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = 0.$$

Тогда функцию S с точностью до слагаемого, зависящего только от y_3, можно будет найти из уравнения (5).

Установив это, предположим, что функции

$$S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{p-2}$$

определены полностью и что S_{p-1} вычислена с точностью до зависимости от y_3. Предположим, что требуется довести до конца отыскание функции S_{p-1} и вычислить S_p с точностью до зависимости от y_3.

Приравняв коэффициенты при μ^p в обеих частях уравнения (4), получим

$$n_1^0 \frac{dS_p}{dy_1} + n_2^0 \frac{dS_p}{dy_2} = \frac{dF_1}{dx_2^0} \frac{dS_{p-1}}{dy_3} + \Phi_p - C_p, \tag{7}$$

где Φ_p — функция, зависящая лишь от переменных y, производных от функций S_0, S_1, S_2, ..., S_{p-2}, а также от dS_{p-1}/dy_1 и dS_{p-1}/dy_2. Функции $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{p-2}$ известны. Функция S_{p-1} известна с точностью до слагаемого, зависящего только от y_3, следовательно, известны производные dS_{p-1}/dy_1 и dS_{p-1}/dy_2. Поэтому и Φ_p можно считать известной функцией от y, причем эта функция периодическая.

Если задана некоторая периодическая функция U, зависящая от y_1, y_2, y_3, то через $[U]$ мы будем обозначать среднее значение этой функции, вычисляемое в предположении, что U зависит лишь от y_1 и y_2. Отсюда следует, что $[U]$ зависит от y_3.

Очевидно, что так же, как и раньше, среднее значение правой части уравнения (7) должно быть равно некоторой константе $C_p' - C_p$, откуда

$$\left[\frac{dF_1}{dx_3^0} \frac{dS_{p-1}}{dy_3}\right] + [\Phi_p] = C_p',$$

$$\left[\frac{dF_1}{dx_3^0} \frac{d[S_{p-1}]}{dy_3}\right] + \left[\frac{dF_1}{dx_3^0} \frac{d(S_{p-1} - [S_{p-1}])}{dy_3}\right] + [\Phi_p] = C_p'.$$

Так как $[S_{p-1}]$ не зависит от y_1 и y_2, то

$$\left[\frac{dF_1}{dx_3^0}\frac{d[S_{p-1}]}{dy_3}\right]=\frac{d[S_{p-1}]}{dy_3}\left[\frac{dF_1}{dx_3^0}\right]=\frac{dR}{dx_3^0}\frac{d[S_{p-1}]}{dy_3},$$

откуда

$$\frac{dR}{dx_3^0}\frac{d[S_{p-1}]}{dy_3}=C_p'-[\Phi_p]-\left[\frac{dF_1}{dx_3^0}\frac{d(S_{p-1}-[S_{p-1}])}{dy_3}\right]. \tag{8}$$

Если S_{p-1} известна с точностью до функции, зависящей от y_3, то мы знаем функцию

$$S_{p-1}-[S_{p-1}].$$

Следовательно, правая часть уравнения (8) полностью известна. С другой стороны, R — известная функция от x_1, x_2 и x_3, в которой эти переменные заменены известными константами x_1^0, x_2^0, x_3^0. Следовательно, нам известна производная dR/dx_3^0 и мы можем найти из уравнения (8) производную $d[S_{p-1}]/dy_3$, а проинтегрировав ее, и функцию $[S_{p-1}]$.

Так как $[S_{p-1}]$ — периодическая функция от y_3, среднее значение правой части уравнения (8) должно быть равно нулю; мы всегда можем добиться этого, подбирая произвольную постоянную C_p'.

Таким образом, отыскание функции S_{p-1} полностью закончено. После этого уравнение (7) позволяет нам найти функцию S_p с точностью до произвольной функции, зависящей от y_3. Для того чтобы функция S_p, найденная из уравнения (7), была периодической по y_1 и y_2, необходимо, чтобы среднее значение правой части этого уравнения было равно нулю. В самом деле, это среднее значение равно $C_p'-C_p$, и поскольку постоянная C_p остается произвольной, мы можем выбрать

$$C_p=C_p'.$$

Итак, функции S_p всегда можно определить с помощью рекуррентных соотношений. Следовательно, остаются в силе выводы п. 125. Единственное различие состоит в том, что разложение n_3 по степеням μ вместо того, чтобы начинаться со свободного члена, начинается с члена, зависящего от μ.

Предположим теперь, что имеется четыре степени свободы и восемь переменных x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4 и что функция F_0 зависит лишь от x_1 и x_2, а R — от x_1, x_2, x_3 и x_4.

Те же самые выводы остаются в силе и в этом случае, если только:

1) между dF_0/dx_1^0 и dF_0/dx_2^0 (т. е. между n_1^0 и n_2^0) не существует никакого линейного соотношения с целыми коэффициентами;

2) не существует никакого линейного соотношения с целыми коэффициентами и между dR/dx_3^0 и dR/dx_4^0.

В самом деле, уравнение, аналогичное уравнению (8), с помощью которого мы нашли $[S_{p-1}]$, запишется в виде

$$\frac{dR}{dx_3^0}\frac{d[S_{p-1}]}{dy_3}+\frac{dR}{dx_4^0}\frac{d[S_{p-1}]}{dy_4}=\text{(известная периодическая функция от } y_3 \text{ и } y_4\text{, среднее значение которой можно считать равным нулю).} \quad (8\text{bis})$$

Для того чтобы это уравнение можно было разрешить относительно функции $[S_{p-1}]$, периодической по y_3 и y_4, необходимо и достаточно, чтобы между dR/dx_3^0 и dR/dx_4^0 не существовало никакого линейного соотношения с целыми коэффициентами.

135. Мы предполагали, что R зависит лишь от переменных первой серии x_1, x_2, x_3 и x_4 (предполагая, как мы делали в конце предыдущего параграфа, что имеется четыре степени свободы и что F_0 зависит только от x_1 и x_2).

Предположим теперь, что R зависит не только от x_1, x_2, x_3 и x_4, но еще и от y_3 и y_4.

Если вместо x_1 и x_2 подставить константы ξ_1 и ξ_2, вместо x_3 и x_4 подставить dT/dy_3 и dT/dy_4, а затем приравнять R какой-нибудь константе C_1', то получится следующее уравнение:

$$R\left(\xi_1, \xi_2, \frac{dT}{dy_3}, \frac{dT}{dy_4}\right)=C_1', \quad (1)$$

которое определяет функцию T двух переменных y_3 и y_4.

Предположим, что можно найти функцию T, удовлетворяющую этому уравнению и зависящую помимо прочего от двух констант ξ_1 и ξ_2 и двух новых постоянных интегрирования, которые я обозначу ξ_3 и ξ_4.

Тогда функция

$$U=\xi_1 y_1+\xi_2 y_2+T$$

будет удовлетворять уравнению

$$R\left(\frac{dU}{dy_1}, \frac{dU}{dy_2}, \frac{dU}{dy_3}, \frac{dU}{dy_4}, y_3, y_4\right)=C_1'.$$

Кроме того, соотношения

$$x_i=\frac{dU}{dy_i}, \qquad \eta_i=\frac{dU}{d\xi_i} \qquad (i=1, 2, 3, 4)$$

определят некоторую замену переменных; старыми переменными будут x_i и y_i, а новыми — ξ_i и η_i.

Как мы видели в п. 4, эта замена переменных не изменит канонической формы уравнений. Нетрудно видеть, что

$$x_1=\xi_1, \qquad x_2=\xi_2,$$

и, следовательно, после этой замены функция F_0 будет зависеть только от ξ_1 и ξ_2.

Если функция U такова, что x_3, x_4, $y_1 - \eta_1$, $y_2 - \eta_2$, $y_3 - \eta_3$ (или y_3), $y_4 - \eta_4$ (или y_4) являются функциями от ξ_i и η_i, периодическими по η_i (а именно это мы и предположим), то функция F после этой замены переменных будет периодической по η_i.

Обозначим через R среднее значение F_1, рассматриваемой как периодическая функция от y_1 и y_2. Я утверждаю, что если мы после указанной замены переменных будем рассматривать F_1 как периодическую функцию от η_1 и η_2, то ее среднее значение по-прежнему будет равно R.

В самом деле, по определению

$$4\pi^2 R = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1\, dy_1\, dy_2,$$

и мне остается лишь доказать, что

$$4\pi^2 R = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1\, d\eta_1\, d\eta_2.$$

Действительно,

$$\iint F_1\, d\eta_1\, d\eta_1 = \iint F_1 \left(\frac{d\eta_1}{dy_1}\frac{d\eta_2}{dy_2} - \frac{d\eta_1}{dy_2}\frac{d\eta_2}{dy_1}\right) dy_1\, dy_2,$$

однако в соотношения

$$x_1 = \xi_1, \qquad x_2 = \xi_2, \qquad x_i = \frac{dU}{dy_i}, \qquad \eta_i = \frac{dU}{d\xi_i} \qquad (i = 3, 4)$$

переменные y_1 и y_2, а также η_1 и η_2 не входят. Именно это и доказывает, что если выразить новые переменные через старые переменные ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, η_3 и η_4, то они не будут зависеть ни от y_1, ни от y_2.

Следовательно, если подставить в T вместо ξ_3 и ξ_4 их выражения через x_1, x_2, x_3, x_4, y_3 и y_4, то мы получим

$$\frac{dT}{dy_1} = \frac{dT}{dy_2} = 0, \qquad \frac{d^2T}{d\xi_i\, dy_1} = \frac{d^2T}{d\xi_i\, dy_2} = 0,$$

откуда

$$\frac{d\eta_1}{dy_1} = 1 + \frac{d^2T}{d\xi_1\, dy_1} = 1, \qquad \frac{d\eta_1}{dy_2} = \frac{d^2T}{d\xi_2\, dy_1} = 0$$

и точно так же

$$\frac{d\eta_2}{dy_1} = 0, \quad \frac{d\eta_2}{dy_2} = 1.$$

Следовательно,

$$\iint F_1\, d\eta_1\, d\eta_2 = \iint F_1\, dy_1\, dy_2,$$

что и требовалось доказать.

Кроме того, величина C_1', которая должна быть константой, может зависеть лишь от постоянных интегрирования, т. е. от ξ_i, так что R [в силу уравнения (1)] будет зависеть лишь от ξ_1, ξ_2, ξ_3 и ξ_4.

Следовательно, мы приходим к случаю, рассмотренному в предыдущем пункте, и должны заключить, что каноническим уравнениям

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dF}{d\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{dF}{d\xi_i}$$

можно формально удовлетворить рядами следующего вида:

$$\xi_i = \xi_i^0 + \mu\xi_i^1 + \mu^2\xi_i^2 + \ldots + \mu^p\xi_i^p + \ldots,$$

$$\eta_i = w_i + \mu\eta_i^1 + \mu^2\eta_i^2 + \ldots + \mu^p\eta_i^p + \ldots,$$

$$w_i = n_i t + \varpi_i, \qquad n_i = n_i^0 + \mu n_i^1 + \ldots + \mu^p n_i^p + \ldots,$$

где ξ_i^0 — константы, ξ_i^k и η_i^k — периодические функции от w, зависящие также и от n постоянных интегрирования ξ_i^0, w_i — n других постоянных интегрирования и, наконец, величины n_i^0 зависят также и от констант ξ_i^0.

Возвращаясь к исходным переменным, мы видим, что каноническим уравнениям

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}$$

можно удовлетворить формально рядами следующего вида:

$$x_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \ldots + \mu^p x_i^p + \ldots,$$

$$y_i = \varepsilon_i w_i + y_i^0 + \mu y_i^1 + \ldots + \mu^p y_i^p + \ldots;$$

коэффициентами x_i^k и y_i^k служат периодические функции от w.

Что же касается коэффициента ε, то он может быть равен 0 или 1. Он всегда равен 1 при $i = 1$ или 2; он равен 1 либо 0 при $i = 3$ в зависимости от того, что периодически зависит от η_i: $y_3 - \eta_3$ или y_3; он равен 1 либо 0 при $i = 4$ в зависимости от того, будет ли $y_4 - \eta_4$ либо y_4 периодичны по η_i.

Следовательно, все сводится к интегрированию уравнения с частными производными (1) или, что то же, к интегрированию канонических уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dR}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dR}{dx_i}.$$

Применение к задаче трех тел

136. Применим полученные результаты к задаче трех тел. Уравнения этой задачи мы привели к виду

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}, \tag{1}$$

где

$$F = F_0 + \mu F_1.$$

Здесь μ — малый параметр, μF_1 — возмущающая функция. В качестве переменных выберем переменные п. **11**

$$\begin{matrix} \Lambda = \beta L, & \Lambda' = \beta' L', & \beta G, & \beta\Theta, & \beta' G', & \beta'\Theta', \\ l, & l' & g & \theta & g' & \theta' \end{matrix} \tag{2}$$

или же переменные п. **12**

$$\begin{matrix} \Lambda, & \Lambda', & \xi, & \xi', & p, & p', \\ \lambda, & \lambda', & \eta, & \eta', & q, & q'. \end{matrix} \tag{3}$$

Функция F_0 зависит лишь от Λ и Λ'; F_1 зависит от всех двенадцати переменных, но периодична только по l и l'. Следовательно, если рассматривать F_1 как периодическую функцию от l и l' и обозначить через R ее среднее значение, то R будет представлять собой не что иное, как ту функцию, которую мы обозначали точно так же в предыдущей главе. Она зависит от десяти переменных, а именно от двенадцати переменных (2), за исключением l и l', либо от двенадцати переменных (3), за исключением λ и λ'. Если в качестве переменных выбрать переменные (2), то она будет периодической по g, g', θ и θ'.

Следовательно, к уравнениям (1) можно применить методы пунктов **134** и **135** и с их помощью выполнить формальное интегрирование, если только известно, как проинтегрировать уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dR}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dR}{dx_i}, \tag{4}$$

где переменные x_i и y_i представляют собой четыре последние пары сопряженных переменных (2) либо же четыре последние пары сопряженных переменных из (3), а Λ и Λ' рассматриваются как постоянные.

Но эти уравнения (4) — это в точности такие уравнения, которые мы научились формально интегрировать в предыдущей главе. Отсюда ясно, что метод Линдштедта можно применять и в общем случае задачи трех тел.

Применение этого метода, на котором пока я мог остановиться лишь вкратце, будет в последующем предметом подробного рассмотрения.

Замена переменных

137. Совершим теперь замену переменных, аналогичную замене переменных, произведенной в п. **131**.

Для этого положим

$$(\Lambda = \beta L, \quad \Lambda' = \beta' L'),$$

$$V = \Lambda\lambda_1 + \Lambda'\lambda_1' + \xi(\sigma_1\cos\varphi + \sigma_2\sin\varphi) + \xi'(-\sigma_1\sin\varphi + \sigma_2\cos\varphi) + \\ + p(\sigma_3\cos\varphi' + \sigma_4\sin\varphi') + p'(-\sigma_3\sin\varphi' + \sigma_4\cos\varphi'),$$

где φ и φ' — углы, определенные в п. **131**.

Затем так же, как в п. **131**, введем обозначения

$$\lambda = \frac{dV}{d\Lambda}, \quad \eta = \frac{dV}{d\xi}, \quad \eta' = \frac{dV}{d\xi'}, \quad q = \frac{dV}{dp}, \quad q' = \frac{dV}{dp'}, \quad \tau_i = \frac{dV}{d\sigma_i}$$

и установим, что каноническая форма уравнений не изменится, если старые переменные

$$\Lambda, \ \Lambda', \ \xi, \ \xi', \ p, \ p'$$
$$\lambda, \ \lambda', \ \eta, \ \eta', \ q, \ q'$$

заменить новыми

$$\Lambda, \ \Lambda', \ \tau_1, \ \tau_2, \ \tau_3, \ \tau_4$$
$$\lambda_1, \ \lambda_1', \ \sigma_1, \ \sigma_2, \ \sigma_3, \ \sigma_4.$$

Переменные τ_i и σ_i уже определены как функции от ξ, η, p, q и Λ в предыдущей главе.

Осталось показать, какой вид имеет соотношение, связывающее новые переменные λ_1 и λ_1' с λ и λ'.

Имеем

$$\lambda = \lambda_1 + \psi, \quad \lambda' = \lambda_1' + \psi',$$

ψ и ψ' — квадратичные формы относительно σ и τ с коэффициентами, зависящими от Λ и Λ', которые записываются в виде

$$\psi = \frac{d\varphi}{d\Lambda}(\sigma_2\tau_1 - \sigma_1\tau_2) + \frac{d\varphi'}{d\Lambda}(\sigma_4\tau_3 - \sigma_3\tau_4),$$

$$\psi' = \frac{d\varphi}{d\Lambda'}(\sigma_2\tau_1 - \sigma_1\tau_2) + \frac{d\varphi'}{d\Lambda'}(\sigma_4\tau_3 - \sigma_3\tau_4),$$

φ и φ' имеют тот же смысл, что и углы, обозначенные этими символами в п. **131**.

Рассуждая так же, как в п. **135**, можно показать, что всякая функция, периодическая по λ и λ', будет после замены переменных периодической по λ_1 и λ_1', а среднее значение ее в обоих случаях будет одинаковым.

Некоторые выводы можно сделать и относительно вида функции F: F каким-то образом зависит от Λ и Λ', но она периодична по λ_1 и λ_1' и, кроме того, ее можно разложить по степеням σ и τ.

К этому добавлю, что она не должна изменяться при замене λ_1 и λ_1' на $\lambda_1 + \pi$ и $\lambda_1' + \pi$, если одновременно изменить знак σ и τ. Чтобы понять это, достаточно сослаться на то, о чем мы говорили в п. 12, и заметить, что когда

$$\lambda_1, \quad \lambda_1', \quad \sigma_i, \quad \tau_i$$

переходят в

$$\lambda_1 + \pi, \quad \lambda_1' + \pi, \quad -\sigma_i, \quad -\tau_i,$$

то величины λ и λ' переходят в $\lambda + \pi$ и $\lambda' + \pi$, а переменные ξ и т. д. изменяют знак.

Произведем, наконец, последнюю замену переменных, положив так же, как и в п. 131,

$$\tau_i = \sqrt{2\rho_i}\cos\omega_i, \qquad \sigma_i = \sqrt{2\rho_i}\sin\omega_i.$$

В силу замечания в п. 6, эта замена переменных не изменяет канонической формы уравнений.

Тогда F будет разлагаться по степеням $\sqrt{\rho_i}$ и

$$R_2 = 2A_1\rho_1 + 2A_2\rho_2 + 2A_3\rho_3 + 2A_4\rho_4.$$

Случай плоских орбит

138. После этой замены переменных уравнения движения принимают следующий вид.

Два ряда сопряженных переменных сводятся к

$$\Lambda, \quad \Lambda', \quad \rho_i,$$
$$\lambda_2, \quad \lambda_1', \quad \omega_i,$$

и, кроме того, имеем

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots,$$

где F_0 зависит лишь от Λ и Λ', а функции F_1, F_2, ..., периодические по λ_1 и λ_2', допускают разложения по степеням [37]

$$\sqrt{\rho_{i_1}}\cos\omega_i \qquad \sqrt{\rho_i}\sin\omega_i.$$

Сверх того, эти функции не изменяются, когда λ_1, λ_1' и ω_i получают одинаковое приращение; следовательно, они зависят лишь от разностей

$$\lambda_1 - \omega_i, \qquad \lambda_1' - \omega_i, \qquad \omega_k - \omega_i.$$

Если в функции R заменить ρ_i производной $dT/d\omega_i$ и приравнять R константе, рассматривая Λ и Λ' как заданные постоянные, то мы получим уравнение с частными производными

$$R\left(\frac{dT}{d\omega_i}, \omega_i\right) = C. \tag{1}$$

Как мы видели в пунктах **134** и **135**, для того чтобы мы могли построить ряды, расположенные по возрастающим степеням μ и формально удовлетворяющие уравнениям движения

$$\begin{gathered}\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{dF}{d\lambda_1}, \quad \frac{d\Lambda'}{dt} = \frac{dF}{d\lambda_1'}, \quad \frac{d\rho_i}{dt} = \frac{dF}{d\omega_i}, \\ \frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{dF}{d\Lambda}, \quad \frac{d\lambda_1'}{dt} = -\frac{dF}{d\Lambda'}, \quad \frac{d\omega_i}{dt} = -\frac{dF}{d\rho_i},\end{gathered} \tag{2}$$

достаточно уметь интегрировать уравнение (1).

Существует частный случай, в котором интегрирование уравнения (1) выполняется сравнительно легко: это случай, когда три тела движутся в одной плоскости.

В самом деле, в этом случае число величин ρ_i понижается до двух, так что если Λ и Λ' считать константами, то R будет зависеть лишь от четырех переменных ρ_1, ρ_2, ω_1 и ω_2. Однако имеется еще одно обстоятельство: как мы видели выше, функция F зависит лишь от разностей $\lambda_1 - \omega_i$, $\lambda_1' - \omega_i$, $\omega_k - \omega_i$. Следовательно, R зависит лишь от трех переменных ρ_1, ρ_2 и $\omega_1 - \omega_2$, так что уравнение (1) запишется в виде

$$R\left(\frac{dT}{d\omega_1}, \frac{dT}{d\omega_2}, \omega_1 - \omega_2\right) = C.$$

Если обозначить $\omega_1 - \omega_2 = \varphi$ и принять в качестве новых переменных ω_1 и φ, то уравнение примет вид

$$R\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1} + \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \varphi\right) = C.$$

Если теперь придать производной $\partial T/\partial \omega_1$ какое-нибудь произвольное постоянное значение, которое я буду обозначать символом h, то это уравнение будет содержать лишь $\partial T/\partial \varphi$ и φ. Отсюда мы найдем $\partial T/\partial \varphi$ как функцию φ, константы C и h и получим

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = f(\varphi, C, h),$$

откуда

$$T = h\omega_1 + \int f\, d\varphi.$$

Посмотрим, какой вид имеет эта функция T.

Замечу, что функцию R можно разложить по степеням $dT/d\omega_1$ и $dT/d\omega_2$, причем член разложения нулевого порядка равен константе, которую я обозначу H, а членами порядка 1 будут

$$2A_1\frac{dT}{d\omega_1}+2A_2\frac{dT}{d\omega_2}.$$

Затем полагаю (вводя две новые постоянные интегрирования Ω_1 и Ω_2 вместо C и h), что

$$C=H+2A_1\Omega_1+2A_2\Omega_2,$$
$$h=\Omega_1+\Omega_2.$$

Тогда для нахождения $dT/d\omega_1$ и $dT/d\omega_2$ мы получим систему двух уравнений

$$R-H=A_1\Omega_1+A_2\Omega_2,$$
$$\frac{dT}{d\omega_1}+\frac{dT}{d\omega_2}=\Omega_1+\Omega_2.$$

Функциональный определитель двух левых частей относительно $dT/d\omega_1$ и $dT/d\omega_2$ при $dT/d\omega_1=dT/d\omega_2=0$ равен $2(A_1-A_2)$. Следовательно, он отличен от нуля.

Отсюда вытекает (по теореме п. **30**), что производные $dT/d\omega_1$ и $dT/d\omega_2$ можно найти из этих уравнений в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням Ω. Члены нулевой степени равны нулю, члены первой степени сводятся соответственно к Ω_1 и Ω_2, а коэффициентами при членах старших степеней являются периодические функции от $\omega_1-\omega_2$.

В результате функцию U п. **135** можно записать в виде

$$U=\Lambda\lambda_1+\Lambda'\lambda_1'+T,$$

и мы получим

$$T=V_1\omega_1+V_2\omega_2+T',$$

где V_1 и V_2 — две константы, зависящие от Ω_1 и Ω_2, а T' — периодическая функция от ω_1 и ω_2.

Произведем теперь замену переменных, определенную в п. 4, приняв в качестве новых переменных первого ряда величины

$$\Lambda,\quad \Lambda',\quad V_1 \text{ и } V_2,$$

связанные со старыми переменными Λ, Λ', λ_1, λ_1', ρ_i и ω_i соотношениями

$$\Lambda=\frac{dU}{d\lambda_1},\quad \Lambda'=\frac{dU}{d\lambda_1'},\quad \rho_i=\frac{dU}{d\omega_i}=\frac{dT}{d\omega_i}. \tag{3}$$

Тогда сопряженные переменные, которые я обозначу символами

$$\lambda_2,\quad \lambda_2',\quad \nu_1 \text{ и } \nu_2,$$

будут определяться уравнениями

$$\lambda_2 = \frac{dU}{d\Lambda} = \lambda_1 + \frac{dT}{d\Lambda},\qquad \lambda_2' = \frac{dU}{d\Lambda'} = \lambda_1' + \frac{dT}{d\Lambda'},$$
$$\nu_i = \frac{dU}{dV_i} = \frac{dT}{dV_i}. \tag{4}$$

Я предполагаю, что в функции T, зависящей от Λ, Λ', Ω_1 и Ω_2, вместо этих констант подставлены их выражения через Λ, Λ', V_1 и V_2. Именно в этом смысле и следует понимать производные $dT/d\Lambda$, $dT/d\Lambda'$, dT/dV_i.

Для того чтобы были применимы выводы п. **135**, необходимо, чтобы старые переменные

$$\Lambda,\quad \Lambda',\quad \lambda_1,\quad \lambda_1',\quad \rho_i$$

так же, как и переменные

$$\omega_i - \nu_i,$$

были однозначными функциями новых переменных

$$\Lambda,\quad \Lambda',\quad \lambda_2,\quad \lambda_2',\quad V_i,\quad \nu_i$$

и чтобы эти функции были периодическими относительно ν_1 и ν_2.

Найдем сначала выражения ω_1 и ω_2 через новые переменные. Для этого мы располагаем двумя уравнениями

$$\nu_1 = \frac{dT}{dV_1} = \omega_1 + \frac{dT'}{dV_1},\qquad \nu_2 = \frac{dT}{dV_2} = \omega_2 + \frac{dT'}{dV_2}. \tag{5}$$

Прежде всего мы должны задать себе вопрос, будут ли величины ω_1 и ω_2, найденные из этих уравнений, однозначными функциями новых переменных. Однозначность может нарушаться только в том случае, если функциональный определитель правых частей относительно ω_1 и ω_2 обратится в нуль, т. е. если будет выполняться соотношение

$$\frac{\partial\left(\frac{dT}{dV_1}, \frac{dT}{dV_2}\right)}{\partial(\omega_1, \omega_2)} = 1 + \frac{d^2T'}{dV_1\,d\omega_1} + \frac{d^2T'}{dV_2\,d\omega_2} + \frac{d^2T'}{dV_1\,d\omega_2}\frac{d^2T'}{dV_2\,d\omega_2} - \frac{d^2T'}{dV_2\,d\omega_1}\frac{d^2T'}{dV_1\,d\omega_2} = 0.$$

Для краткости я запишу это уравнение в следующем виде:

$$1 + J = 0.$$

Замечу с самого начала, что в приложениях величины ρ_1 и ρ_2 очень малы и имеют порядок квадрата эксцентриситетов.

С Ω_i величины ρ_i связаны следующими соотношениями:

$$\rho_i = \frac{dT}{d\omega_i}.$$

Но $dT/d\omega_i$ можно разложить по возрастающим степеням Ω_i; в этом разложении свободный член отсутствует, а члены первого порядка сводятся к величинам Ω_i.

Отсюда по теореме п. 30 находим

$$\Omega_1 = f_1(\rho_1, \rho_2), \quad \Omega_2 = f_2(\rho_1, \rho_2),$$

где f_1 и f_2 — ряды, расположенные по степеням ρ_1 и ρ_2, коэффициенты которых зависят помимо прочего некоторым образом от

$$\Lambda, \quad \Lambda', \quad \omega_1 \text{ и } \omega_2.$$

Члены нулевой степени равны нулю, члены первой степени равны соответственно ρ_1 и ρ_2.

Отсюда следует, что величины Ω_1 и Ω_2, так же, как и ρ_1 и ρ_2, имеют порядок квадрата эксцентриситетов.

По определению величин V_1 и V_2 их можно разложить по степеням Ω_1 и Ω_2, причем коэффициенты разложения будут каким-то образом зависеть от Λ и Λ'. В этих разложениях нет членов нулевого порядка, а члены первого порядка равны соответственно Ω_1 и Ω_2.

Отсюда вытекают следующие выводы.

1. Величины V_1 и V_2 имеют порядок квадрата эксцентриситетов.

2. Можно поступить наоборот: разлагать Ω_1 и Ω_2 по степеням V_1 и V_2, причем в этом случае

$$\Omega_1 = V_1 + \varphi_1(V_1, V_2), \quad \Omega_2 = V_2 + \varphi_2(V_1, V_2),$$

функции φ_1 и φ_2 содержат лишь члены второго порядка, по крайней мере относительно V_1 и V_2.

3. Функция T' разлагается по возрастающим степеням V_1 и V_2 и содержит лишь члены второго порядка, по крайней мере относительно двух этих величин.

4. Разложение производных dT'/dV_1 и dT'/dV_2 по возрастающим степеням V_1 и V_2 начинается с членов первого порядка; обе эти производные имеют тот же порядок величины, что и квадрат эксцентриситетов.

5. То же относится и ко вторым производным $d^2T'/dV_k d\omega_i$, а следовательно, и к J.

Величина J очень мала, разность $1 - J$ не может быть равной нулю.

Итак, мы должны прийти к выводу о том, что ω_1 и ω_2, а следовательно, и $\omega_1 - \nu_1$ и $\omega_2 - \nu_2$ являются однозначными функциями новых переменных.

Я добавлю еще, что $\nu_1 - \omega_1$, $\nu_2 - \omega_2$ являются периодическими функциями от ν_1 и ν_2. В самом деле, дадим величинам ν_1 и ω_1 приращение $2k_1\pi$, а величинам ν_2 и ω_2 — приращение $2k_2\pi$ (k_1 и k_2 — целые числа). Поскольку функция T' периодична по ω_1 и ω_2, уравнения (5) будут удовлетворяться по-прежнему и $\nu_1 - \omega_1$, $\nu_2 - \omega_2$ не изменятся.

Подставив найденные значения ω_1 и ω_2 в уравнения (3) и (4), мы увидим, что старые переменные

$$\Lambda, \quad \Lambda', \quad \lambda_1, \quad \lambda_1', \quad \rho_i$$

являются однозначными функциями новых переменных, периодическими по ν_i.

Итак, мы оказались в условиях применимости результатов п. 135.

Выразим функцию F с помощью новых переменных. Замечу прежде всего, что F_0 по-прежнему будет выражаться только через Λ и Λ'. Кроме того, F периодична относительно переменных второго ряда λ_2, λ_2', ν_1 и ν_2.

Среднее значение функции F_1, рассматриваемой как периодическая функция λ_2 и λ_2', равно R. С другой стороны, в силу уравнения (1) R равно константе C либо (что то же)

$$H + 2A_1\Omega_1 + 2A_2\Omega_2,$$

либо же

$$H + 2A_1V_1 + 2A_2V_2 + 2A_1\varphi_1(V_1, V_2) + 2A_2\varphi_2(V_1, V_2).$$

Итак, R зависит лишь от Λ, Λ', V_1 и V_2 и не зависит от переменных второго ряда.

Следовательно, мы вновь возвращаемся к случаю, рассмотренному в п. 134.

Я утверждаю теперь, что функция F не изменится, если величинам λ_2, λ_2', ν_1 и ν_2 придать одинаковые приращения. В самом деле, мы уже знаем, что функция F не изменяется, когда величины λ_1, λ_1', ω_1 и ω_2 получают одинаковые приращения, а T' зависит лишь от разности $\omega_1 - \omega_2$.

Из уравнений (4) и (5) тогда следует, что если величины λ_1, λ_1', ω_1 и ω_2 получают одинаковое приращение ε, то величины λ_2, λ_2', ν_1 и ν_2 получают то же самое приращение ε; следовательно, функция F не изменяется, когда эти четыре новые переменные получают приращение ε.

F зависит от V_1 и V_2 довольно сложным образом, поскольку до замены переменных функция F содержала радикалы $\sqrt{\rho_1}$ и $\sqrt{\rho_2}$.

Пусть

$$F(\Lambda, \Lambda', \lambda_2, \lambda_2', V_1, V_2, \nu_1, \nu_2)$$

— та функция, в которую переходит F после замены переменных. Нам нужно проинтегрировать уравнение

$$F\left(\frac{dS}{d\lambda_2}, \frac{dS}{d\lambda_2'}, \lambda_2, \lambda_2', \frac{dS}{d\nu_1}, \frac{dS}{d\nu_2}, \nu_1, \nu_2\right) = C_0 + C_1\mu + C_2\mu^2 + \ldots. \quad (6)$$

Мы хотим формально удовлетворить этому уравнению, положив

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \dots$$

и

$$S_0 = \Lambda_0 \lambda_2 + \Lambda_0' \lambda_2' + V_1^0 \nu_1 + V_2^0 \nu_2,$$

Λ_0, Λ_0', V_1^0 и V_2^0 должны быть четырьмя нашими постоянными интегрирования. Как мы уже видели, для этого достаточно лишь воспользоваться методом п. 134.

Исследование одного частного интеграла

139. Интересный частный интеграл получится, если предположить, что две последние константы V_1^0 и V_2^0 равны нулю.

Для этого достаточно в уравнении (6) положить

$$\frac{dS}{d\nu_1} = \frac{dS}{d\nu_2} = 0.$$

Отсюда следует, что левая часть этого уравнения не зависит ни от ν_1, ни от ν_2.

В самом деле, до последней замены переменных функция F допускала разложение по степеням

$$\sqrt{\rho_i}\cos\omega_i \quad \text{и} \quad \sqrt{\rho_i}\sin\omega_i,$$

а сверх того, зависела лишь от

$$\Lambda, \quad \Lambda', \quad \lambda_1 \quad \text{и} \quad \lambda_1'.$$

Следовательно, если положить

$$\rho_1 = \rho_2 = 0,$$

то F будет зависеть лишь от

$$\Lambda, \quad \Lambda', \quad \lambda_1 \quad \text{и} \quad \lambda_1'.$$

С другой стороны, если положить

$$V_1 = V_2 = 0,$$

то функция T', которая допускает разложение по возрастающим степеням V и содержит лишь члены второго порядка, по крайней мере относительно этих величин, обратится в нуль вместе со своими производными первого порядка. Точно так же обращаются в нуль Ω_1 и Ω_2, и мы

получаем

$$\rho_i = \frac{dT}{d\omega_i} = \Omega_i + \frac{dT'}{d\omega_i} = 0,$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{dT}{d\Lambda} = \lambda_1 + \frac{dT'}{d\Lambda} = \lambda_1.$$

Точно так же

$$\lambda_2' = \lambda_1'.$$

Отсюда следует, с одной стороны, что ρ_1 и ρ_2 обращаются в нуль, и, с другой стороны, что λ_2 и λ_2' равны λ_1 и λ_1'. Из этого вытекает, что функция F зависит лишь от четырех переменных

$$\Lambda,\ \Lambda',\ \lambda_2 \quad \text{и} \quad \lambda_2'.$$

Следовательно, если

$$\frac{dS}{d\nu_1} = \frac{dS}{d\nu_2} = 0,$$

то левая часть уравнения (6) не будет более содержать λ_2, λ_2', $dS/d\lambda_2$, $dS/d\lambda_2'$.

В этом случае уравнение (6) очень легко интегрируется: для этого достаточно воспользоваться методами, изложенными в п. 125, однако в рассматриваемом случае можно утверждать нечто большее.

Интеграл не является более чисто формальным, а ряд, расположенный по степеням μ, в который он разлагается, сходится.

Действительно, функция F зависит лишь от разности $\lambda_2 - \lambda_2'$, поскольку, как мы видели, F не должна изменяться, когда λ_2, λ_2', ν_1 и ν_2 получают одинаковые приращения, и, кроме того, F не будет зависеть от ν_1 и ν_2.

Отсюда следует, что два уравнения

$$F\left(\frac{dS}{d\lambda_2}, \frac{dS}{d\lambda_2'}, \lambda_2, \lambda_2'\right) = C, \qquad \frac{dS}{d\lambda_2} + \frac{dS}{d\lambda_2'} = C'$$

(где C и C' — некоторые константы) совместны. Производные $dS/d\lambda_2$ и $dS/d\lambda_2'$, а следовательно, и функцию S находят в виде рядов, расположенных по степеням μ.

Полученный таким способом интеграл зависит от двух произвольных постоянных C и C', но эти две постоянные можно выразить через две из четырех первоначально выбранных констант а именно Λ_0 и Λ_0'. Две другие константы V_1^0 и V_2^0 по предположению равны нулю.

Обозначим этот частный интеграл уравнения (6) символом

$$\Sigma(\lambda_2, \lambda_2', \Lambda_0, \Lambda_0'). \tag{7}$$

Если константы C и C' выбраны надлежащим образом (ср. п. 125), то Σ будет иметь следующий вид:

$$\Lambda_0\Lambda_2 + \Lambda_3'\lambda_2' + \text{периодическая функция от } \lambda_2 - \lambda_2'.$$

При дальнейшем рассмотрении этот частный интеграл Σ не приводит, как это можно было бы ожидать, к простым частным решениям задачи трех тел.

Вид разложений

140. Итак, существование функции S доказано. Пользуясь такими же рассуждениями, как и в п. 125, отсюда можно вывести следующий результат.

Существуют ряды

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \Lambda_0 + \mu\Lambda_1 + \mu^2\Lambda_2 + \dots,\\
\Lambda' &= \Lambda_0' + \mu\Lambda_1' + \mu^2\Lambda_2' + \dots,\\
V_i &= V_i^0 + \mu V_i^1 + \mu^2 V_i^2 + \dots,\\
\lambda_2 &= w_1 + \mu y_1^1 + \mu^2 y_1^2 + \dots,\\
\lambda_2' &= w_2 + \mu y_2^1 + \mu^2 y_2^2 + \dots,\\
\nu_1 &= w_3 + \mu y_3^1 + \mu^2 y_3^2 + \dots,\\
\nu_2 &= w_4 + \mu y_4^1 + \mu^2 y_4^2 + \dots,
\end{aligned} \tag{1}$$

расположенные по степеням μ, которые формально удовлетворяют уравнениям задачи трех тел. Λ_0, Λ_1' V_i^0 — константы; кроме того,

$$w_i = n_i t + \varpi_i.$$

Величины Λ_k, Λ_k', V_i^k, y_i^k являются периодическими функциями от w, которые помимо прочего зависят и от констант Λ_0, Λ_0', V_i^0.

С другой стороны, величины n_i, которые также зависят от постоянных Λ_0, Λ_0', V^i, можно разлагать по возрастающим степеням μ, так что

$$n_i = n_i^0 + \mu n_i^1 + \mu^2 n_i^2 + \dots$$

Я хочу обратить внимание на то, что

$$\begin{aligned}
n_3^0 &= n_4^0 = 0,\\
n_1^0 &\neq 0, \quad n_2^0 \neq 0.
\end{aligned}$$

Коэффициенты этих рядов можно было бы вычислять очень быстро, не используя все описанные выше замены переменных, но моей задачей было

главным образом строгое доказательство возможности самих разложений.

Еще одно замечание: первоначальные переменные Λ, Λ', $\lambda - \omega_1$, $\lambda' - \omega_2$, ξ, ξ', η, η' можно разложить в ряды того же вида, т. е. в ряды, члены которых являются периодическими функциями от ω_1, ω_2, ω_3 и ω_4. Чтобы убедиться в этом, достаточно в формулах, выражающих исходные переменные через новые, заменить эти новые переменные их разложениями (1). Кроме того, мы получаем возможность вычислять коэффициенты разложений исходных переменных непосредственно, не обращаясь к новым переменным, которые служили лишь для доказательства возможности самого разложения.

Я не хочу останавливаться здесь на методах, позволяющих провести непосредственное вычисление коэффициентов. Сказанного в п. **127** достаточно для того, чтобы понять существо дела. Я еще буду иметь случай вернуться к этому вопросу в главе XIV.

Укажу лишь в общих чертах, каким образом можно обойти последнюю замену переменных, с помощью которой совершается переход от ρ_i и ω_i к V_i и ν_i. Именно эта замена переменных, если бы ее нельзя было избежать, представляла собой наиболее трудную часть вычислений.

Необходимость в ней отпадает, если достаточно удобно сгруппировать члены, воспользовавшись малостью эксцентриситетов.

В функции F_1 можно различить две группы членов.

1. Члены степени 0, 1, 2 или 3 относительно эксцентриситетов и наклонений.

2. Члены, степень которых не меньше 4 относительно эксцентриситетов и наклонений.

Члены второй группы много меньше членов первой группы. Пусть теперь F_1' — совокупность членов первой группы, а $\varepsilon F_1''$ — совокупность членов второй группы. Мы можем предположить, что ε — очень малая константа, а F_1'' — конечная величина, и записать

$$F = F_0 + \mu F_1' + \mu\varepsilon F_1'' + \mu^2 F_2 + \ldots.$$

Ничто не мешает объединить члены $\mu\varepsilon F_1''$ с членами $\mu^2 F_2$, поскольку величина $\mu\varepsilon$ гораздо меньше, чем μ, или же попытаться разложить их по степеням μ и ε.

Сохраним переменные

$$\Lambda, \Lambda', \lambda_1, \lambda_1', \rho_i, \omega_i;$$

среднее значение F_1' равно

$$H + 2A_1\rho_1 + 2A_2\rho_2 + 2A_3\rho_3 + 2A_4\rho_4$$

(ср. п. **131**) и, следовательно, не зависит от переменных второго ряда. Последняя замена переменных была нужна лишь для того, чтобы сделать R независимым от переменных второго ряда.

В данном случае она излишня.

Общий случай задачи трех тел

141. Перейдем теперь к случаю пространственной задачи трех тел. В этом случае число переменных ω_i и ρ_i равно четырем и уравнение (1) п. 135 записывается в виде

$$R\left(\frac{dT}{d\omega_1}, \frac{dT}{d\omega_2}, \frac{dT}{d\omega_3}, \frac{dT}{d\omega_4}, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\right) = C. \tag{1}$$

Его нельзя проинтегрировать с помощью метода, примененного нами в п. 138, точно так же не известен и какой-либо другой способ его точного интегрирования. Однако можно найти простой метод формального интегрирования, удовлетворительный с нашей точки зрения.

Величины

$$\frac{dT}{d\omega_i} = \rho_i$$

имеют порядок квадрата эксцентриситетов, следовательно, если положить

$$T = \mu' T',$$

где μ' — некоторая константа, порядок которой равен квадрату эксцентриситетов, то производные $dT'/d\omega_i$ будут конечны.

Функцию R можно разлагать по возрастающим степеням $dT/d\omega_i$

$$R = R_0 + R_2 + R_4 + \ldots,$$

где R_k означают совокупность членов степени $k/2$ относительно ρ_i (R_0, R_2, R_4, ... имеют здесь тот же смысл, что и величины, обозначенные этими же символами в п. 131). Если я обозначу символом $R_k(T)$ функцию, которая получается из R_k при подстановке $dT/d\omega_i$ вместо ρ_i, то уравнение (1) примет вид

$$R_0(T) + R_2(T) + R_4(T) + \ldots = C$$

либо же

$$R_0(T'') + \mu' R_2(T'') + \mu'^2 R_4(T'') + \ldots = C.$$

R_0 зависит лишь от Λ и Λ', а поскольку в данный момент мы рассматриваем эти величины как постоянные, R_0 также является константой.

Если теперь положить

$$C = R_0 + \mu' C',$$

то уравнение (1) запишется в виде

$$R_2(T'') + \mu' R_4(T'') + \mu'^2 R_6(T'') + \ldots = C'. \tag{2}$$

Таким образом, мы приходим к интегрированию уравнения с частными производными, левая часть которого зависит от производных $dT''/d\omega_i$ и, кроме того, периодична по независимым переменным ω_i. Она зависит также от некоторого параметра μ' и становится равной

$$R_2(T'') = \sum_{i=1}^{4} 2A_i \frac{dT''}{d\omega_i},$$

если этот параметр обращается в нуль. Следовательно, при $\mu' = 0$ левая часть этого уравнения не зависит от ω_i, а зависит лишь от $dT''/d\omega_i$.

Итак, мы находимся в условиях, в которых применимы рассуждения **п. 125.** Отсюда можно заключить, что существует ряд

$$T_0'' + \mu' T_1'' + \mu'^2 T_2'' + \dots,$$

расположенный по степеням μ', который будучи подставлен вместо T', формально удовлетворяет уравнению (2), при этом производные

$$\frac{dT_k''}{d\omega_i}$$

коэффициентов этого ряда периодичны по ω_i.

Положим

$$T_0'' = \Omega_1'\omega_1 + \Omega_2'\omega_2 + \Omega_3'\omega_3 + \Omega_4'\omega_4,$$

где Ω_1', Ω_2', Ω_3', Ω_4' — четыре постоянных интегрирования; постоянная C' должна удовлетворять уравнению

$$C' = \Sigma\, 2A_i\Omega_i'.$$

Нетрудно проверить, что T_k'' представляют собой полиномы степени $k+1$ относительно четырех величин Ω_1'.

Отсюда следует, что

$$T = \mu' T'$$

можно записать в виде ряда, расположенного по целым возрастающим степеням четырех величин

$$\mu'\Omega_1', \quad \mu'\Omega_2', \quad \mu'\Omega_3', \quad \mu'\Omega_4',$$

которые я для краткости обозначу

$$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4.$$

Этот ряд, расположенный по степеням четырех констант Ω_i, порядок которых равен квадрату эксцентриситетов, формально удовлетворяет уравнению (1).

Таким образом, мы приходим к интегрированию уравнения с частными производными, левая часть которого зависит от производных $dT''/d\omega_i$ и, кроме того, периодична по независимым переменным ω_i. Она зависит также от некоторого параметра μ' и становится равной

$$R_2(T'') = \sum_{i=1}^{4} 2A_i \frac{dT''}{d\omega_i},$$

если этот параметр обращается в нуль. Следовательно, при $\mu' = 0$ левая часть этого уравнения не зависит от ω_i, а зависит лишь от $dT''/d\omega_i$.

Итак, мы находимся в условиях, в которых применимы рассуждения п. 125. Отсюда можно заключить, что существует ряд

$$T_0'' + \mu' T_1'' + \mu'^2 T_2'' + \ldots,$$

расположенный по степеням μ', который будучи подставлен вместо T', формально удовлетворяет уравнению (2), при этом производные

$$\frac{dT_k''}{d\omega_i}$$

коэффициентов этого ряда периодичны по ω_i.

Положим

$$T_0'' = \Omega_1'\omega_1 + \Omega_2'\omega_2 + \Omega_3'\omega_3 + \Omega_4'\omega_4,$$

где Ω_1', Ω_2', Ω_3', Ω_4' — четыре постоянных интегрирования; постоянная C' должна удовлетворять уравнению

$$C' = \Sigma\, 2A_i\Omega_i'.$$

Нетрудно проверить, что T_k'' представляют собой полиномы степени $k+1$ относительно четырех величин Ω_1'.

Отсюда следует, что

$$T = \mu' T'$$

можно записать в виде ряда, расположенного по целым возрастающим степеням четырех величин

$$\mu'\Omega_1', \quad \mu'\Omega_2', \quad \mu'\Omega_3', \quad \mu'\Omega_4',$$

которые я для краткости обозначу

$$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4.$$

Этот ряд, расположенный по степеням четырех констант Ω_i, порядок которых равен квадрату эксцентриситетов, формально удовлетворяет уравнению (1).

Глава XII

ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОРБИТ С МАЛЫМИ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТАМИ

Трудность задачи

142. Имеется ряд случаев, когда применение методов, изложенных в предыдущей главе, может натолкнуться на определенные трудности: это те случаи, когда эксцентриситеты очень малы. Понять, как здесь обстоит дело, можно следующим образом.

Я полагаю, что существо этих трудностей мы поймем лучше на простом примере, гораздо более простом, чем задача трех тел.

Пусть

$$F = \Lambda + \mu \sqrt{\Omega} \cos(\omega + \lambda) + \mu A\Omega,$$

где μ — малый параметр, A — некоторая константа, Λ, Ω, λ и ω — две пары сопряженных переменных.

Рассмотрим канонические уравнения

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{dF}{d\Lambda} = 1, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{dF}{d\Omega},$$
$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{dF}{d\lambda}, \quad \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{dF}{d\omega}. \tag{1}$$

Как мы увидим несколько ниже, эти уравнения весьма просто проинтегрировать до конца. Однако прежде я хочу перегруппировать их аналогично уравнениям задачи трех тел.

В п. 137 мы видели, что уравнения указанной задачи после нескольких замен переменных можно было привести к канонической форме, причем сопряженными переменными являются

$$\Lambda, \Lambda', \rho_i,$$
$$\lambda_1, \lambda_1', \omega_i.$$

Кроме того, функция F допускала разложение по степеням

$$\sqrt{\rho_i}\cos\omega_i, \quad \sqrt{\rho_i}\sin\omega_i \text{ и } \mu$$

и была периодична по λ_1 и λ_1'; наконец, функция F_0 зависела от Λ и Λ'. Функция F, определенная в начале этого пункта, обладает аналогичными свойствами: переменная Λ играет роль Λ и Λ', переменная Ω — роль ρ_i, λ — роль переменных λ_1 и λ_1' и ω — роль ω_i. Очевидно, что F можно разлагать по степеням

$$\sqrt{\Omega}\cos\omega, \quad \sqrt{\Omega}\sin\omega$$

и что при $\mu = 0$ она равна Λ.

Таким образом, аналогия очевидна. Предположим, что нам потребовалось бы применить к этому уравнению метод предыдущей главы, т. е. попытаться проинтегрировать уравнение с частными производными

$$\frac{dS}{d\lambda} + \mu\cos(\omega+\lambda)\sqrt{\frac{dS}{d\omega}} + \mu A\frac{dS}{d\omega} = C, \tag{2}$$

C — постоянная интегрирования. Речь идет о том, чтобы найти такое решение уравнения (2), которое можно было бы разлагать по степеням μ, и такое, чтобы производные $dS/d\lambda$ и $dS/d\omega$ были периодичны по λ и ω.

Для этого положим

$$\omega + \lambda = \varphi;$$

в новых переменных λ и φ уравнение (2) запишется в виде

$$\frac{dS}{d\lambda} + \mu\cos\varphi\sqrt{\frac{dS}{d\varphi}} + (1+\mu A)\frac{dS}{d\varphi} = C.$$

Пусть Λ — постоянная интегрирования. Введем обозначения

$$1 + \mu A = B, \quad C - \Lambda = VB.$$

Нашему уравнению мы удовлетворим, выбрав

$$\frac{dS}{d\Lambda} = \Lambda, \quad \frac{dS}{d\varphi} = \frac{2\mu^2\cos^2\varphi + 4B^2V \pm 2\mu\cos\varphi\sqrt{\mu^2\varphi\cos^2 + 4B^2V}}{4B^2}$$

Определенная таким образом функция S удовлетворяет всем условиям задачи, если только радикал

$$\sqrt{\mu^2\cos^2\varphi + 4B^2V}$$

азлагается по степеням μ. Но такое разложение возможно, когда

$$\mu^2 < 4B^2|V|,$$

и сходится оно достаточно быстро, если параметр μ^2 мал по сравнению с V.

Если мы захотим провести сравнение с задачей трех тел, то увидим, что V представляет собой величину, аналогичную той, которую мы в предыдущей главе обозначили Ω_4. Поэтому мы считаем, что ее порядок равен квадрату эксцентриситетов. Если оба параметра μ и V малы, то можно было бы попытаться разложить S по степеням μ и V. Подобное разложение невозможно, ибо радикал

$$\sqrt{4B^2 + \frac{\mu^2 \cos^2 \varphi}{V}}$$

разложим лишь по степеням μ (в силу того, что B зависит от μ) и $\frac{\mu^2}{V}$.

Если же параметр V настолько мал, что становится сравнимым с μ^2, то метод предыдущей главы становится непригодным.

143. Нетрудно видеть, что аналогичная трудность возникает и в задаче трех тел.

В самом деле, рассмотрим еще раз эту задачу в том виде, как она сформулирована в предыдущей главе. Сопряженными переменными будут

$$\Lambda, \Lambda', V_i,$$
$$\lambda_2, \lambda_2', \nu_i.$$

Функция S, формально удовлетворяющая уравнению с частными производными

$$F = \text{const},$$

которая была определена в предыдущей главе, зависит от констант Λ_0, Λ_0' и V_i^0; последние из этих констант, V_i^0, вообще говоря, в приложениях являются малыми величинами порядка квадрата эксцентриситетов. Поэтому мы можем положить

$$V_i^0 = \varepsilon^2 W_i^0,$$

где ε — некоторая константа порядка эксцентриситетов, а W_i^0 — конечные константы. Если пока мы будем считать константы W_i^0 заданными, то S будет зависеть от трех произвольных постоянных

$$\Lambda_0, \Lambda_0' \text{ и } \varepsilon.$$

Можно спросить, будет ли функция S разлагаться по степеням μ и ε?

Если бы такое разложение существовало, то решение, построенное в предыдущей главе, можно было бы использовать при сколь угодно малом параметре ε, т. е. при любых эксцентриситетах.

Однако, как мы сейчас увидим и как можно было бы предвидеть исходя из приведенного выше (п. **142**) примера, такое разложение невозможно. Функция S допускает разложение только по степеням μ/ε и ε. Отсюда следует, что метод, о котором шла речь, оказывается применимым, если

только параметр μ/ε мал. В нашем случае этот параметр не будет малым несмотря на то, что массы малы, если эксцентриситеты имеют тот же порядок, что и массы.

Вернемся к уравнению

$$F\left(\frac{dS}{d\lambda_2}, \frac{dS}{d\lambda_2'}, \frac{dS}{d\nu_i}, \lambda_2, \lambda_2', \nu_i\right) = C, \tag{1}$$

которое я для краткости запишу в виде

$$F(S) = C. \tag{2}$$

В п. 139 мы видели, что это уравнение допускает частное решение, которое мы обозначили Σ; следовательно,

$$F(\Sigma) = C',$$

где C' — некоторая константа.

Положим теперь

$$S = \Sigma + \varepsilon^2 s,$$

тогда

$$F(\Sigma + \varepsilon^2 s) = C. \tag{3}$$

Левую часть уравнения (3) можно разложить по степеням ε. Я говорю ε, а не ε^2. Действительно, F содержит члены нечетной степени относительно $\sqrt{\rho_i}$. Однако ρ_i, связанные с

$$V_i = \frac{dS}{d\nu_i} = \varepsilon^2 \frac{ds}{d\nu_i}$$

соотношениями

$$\rho_i = \frac{dT}{d\omega_i}, \qquad V_i = \frac{dT}{dV_i},$$

которые были найдены в пунктах 138 и 141, разлагаются по степеням V_i и, следовательно, по степеням ε^2. Поэтому величины $\sqrt{\rho_i}$ и, следовательно, F будут разлагаться по степеням ε. Кроме того, я замечу, что если параметр ε имеет порядок эксцентриситетов, то величина s будет конечной.

В самом деле, если ε обращается в нуль, то S становится равной Σ. Но как мы уже видели, это частное решение Σ соответствует тому случаю, когда величины V_i^0 равны нулю. В приложениях V_i^0 не равны нулю, а являются весьма малыми величинами порядка квадрата эксцентриситетов. Ввиду этого разность $S - \Sigma$ также будет порядка квадрата эксцентриситетов, т. е. порядка ε^2.

Введем для краткости обозначение

$$F(\Sigma + \varepsilon^2 s) - F(\Sigma) = \varepsilon^2 F^*(S).$$

Тогда, вычитая из равенства (3) равенство (2), получим

$$F^*(s) = K, \qquad (4)$$

где K — новая константа, равная $(C - C')/\varepsilon^2$.

F^* будет разлагаться по возрастающим степеням μ, так что

$$F^* = F_0^* + \mu F_1^* + \mu^2 F_1^* + \ldots.$$

Кроме того, F^* периодична по λ_2 и λ_2'. Среднее значение функции F_1^* я обозначу R^*.

Поскольку Σ разлагается по степеням μ_i

$$\Sigma = \Sigma_0 + \mu\Sigma_1 + \mu^2\Sigma_2 + \ldots,$$

функция $F_0(\Sigma + \varepsilon^2 s)$ также будет разлагаться по степеням μ_i

$$F_0(\Sigma + \varepsilon^2 s) = \Phi(\varepsilon^2 s) + \mu\Phi_1(\varepsilon^2 s) + \ldots,$$

и очевидно, что

$$\Phi_0(\varepsilon^2 s) = F_0(\Sigma_0 + \varepsilon^2 s),$$

$$\Phi_1(\varepsilon^2 s) = \frac{d\Phi_0}{\varepsilon^2 d\dfrac{ds}{d\lambda_2}}\frac{d\Sigma_1}{d\lambda_2} + \frac{d\Phi_0}{\varepsilon^2 d\dfrac{ds}{d\lambda_1}}\frac{d\Sigma_1}{d\lambda_1'}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon^2 F_0^* = F_0(\Sigma_0 + \varepsilon^2 s) - F_0(\Sigma_0),$$

$$\varepsilon^2 F_1^* = F_1(\Sigma_0 + \varepsilon^2 s) - F_1(\Sigma_0) + \Phi_0(\varepsilon^2 s) - \Phi_1(0).$$

Функция F_0 зависит лишь от $dS/d\lambda_2$ и $dS/d\lambda_2'$. Если в F_0 вместо S подставить $\Sigma + \varepsilon^2 s$, то F_0 будет разлагаться по степеням

$$\varepsilon^2\frac{ds}{d\lambda_2}, \qquad \varepsilon^2\frac{ds}{d\lambda_2'},$$

откуда следует, что разности

$$\Phi_0(\varepsilon^2 s) - \Phi_0(0), \qquad \Phi_1(\varepsilon^2 s) - \Phi_1(0)$$

делятся на ε^2 и при этом не зависят от ds/dv_i. Из этого вытекает прежде всего, что F_0^* разлагается по положительным возрастающим степеням ε^2.

Наоборот, *поскольку разложение функции F_1 содержит члены первого порядка по $\sqrt{\rho_i}$*, функция $F_1(\Sigma_0 + \varepsilon^2 s)$ будет разлагаться не по степеням ε^2, а по степеням ε. Разложение разности

$$F_1(\Sigma_0 + \varepsilon^2 s) - F_1(\Sigma_0)$$

будет начинаться с члена, содержащего ε в первой степени.

Следовательно, F_1^* разлагается по возрастающим степеням ε, но разложение этой функции начинается с члена $1/\varepsilon$.

Заметим теперь, что F_1^* является функцией, периодической по λ_2 и λ_2', и постараемся найти ее среднее значение R^*.

Среднее значение функции $F_1(S)$ по определению равно $R(S)$. Если вместо S подставить $\Sigma_0 + \varepsilon^2 s$, то среднее значение не изменится и запишется в виде $R(\Sigma_0 + \varepsilon^2 s)$. Неизменность среднего значения основана на том, что производные

$$\frac{d\Sigma_0}{d\lambda_2}, \frac{d\Sigma_0}{d\lambda_2'}, \frac{d\Sigma_0}{d\nu_i}$$

равны соответственно

$$\Lambda_0, \Lambda_0', 0$$

и не зависят от λ_2 и λ_2'. Наоборот, если бы эти производные зависели периодически от λ_2 и λ_2', то рассматриваемое среднее значение можно было изменить с помощью указанной подстановки.

С другой стороны, среднее значение разности

$$[\Phi_1(\varepsilon^2 s) - \Phi_1(0)] = \varepsilon^2 H$$

не зависит ни от ν_i, ни от $ds/d\nu_i$, поскольку $\Phi_1(\varepsilon^2 s)$ не зависит от этих величин. Кроме того, оно разлагается по положительным возрастающим степеням ε^2.

Точно так же $R(\Sigma_0 + \varepsilon^2 s)$ разлагается по положительным возрастающим степеням ε^2, поскольку исходное разложение R по степеням $\sqrt{\rho_i}$ (в отличие от исходного разложения для F_1) не содержало членов нечетного порядка и, в частности, членов первого порядка. Следовательно,

$$\varepsilon^2 R^* = R(\Sigma_0 + \varepsilon^2 s) - R(\Sigma_0) + \varepsilon^2 H,$$

так что R^* разлагается по положительным возрастающим степеням ε^2.

Коэффициенты s_p разложения s по возрастающим степеням μ

$$s = s_0 + \mu s_1 + \mu^2 s_2 + \ldots$$

определяются рекуррентными формулами, которые можно найти методами предыдущей главы.

Поскольку s_p $(p > 0)$ — периодическая функция по λ_2 и λ_2', я запишу

$$s_p = s_p' + s_p'',$$

где s_p' — периодическая функция с нулевым средним значением, а s_p'' не зависит от λ_2 и λ_2'.

Обозначим для краткости

$$\mathrm{S}\frac{dR^*}{dV_i^0}\frac{ds''_{p-1}}{d\nu_i}=\psi_p,$$

$$\mathrm{S}\frac{dF_0^*}{d\Lambda_0}\frac{ds'_p}{d\lambda_2}=\theta_p. \tag{5}$$

Функция ψ_p должна зависеть от

$$s_0,\ s'_1,\ s'_2,\ \ldots,\ s'_{p-1},$$
$$s''_1,\ s''_2,\ \ldots,\ s''_{p-2},$$

а функция θ_p — от

$$s_0,\ s'_1,\ s'_2,\ \ldots,\ s'_{p-1}$$
$$s''_1,\ s''_2,\ \ldots,\ s''_{p-1}.$$

Буква S означает суммирование либо по различным парам сопряженных переменных V_i и ν_i, либо по двум парам сопряженных переменных Λ и λ_2, Λ' и λ_2'.

Правые и левые части соотношений (5) разлагаются по возрастающим степеням ε, однако левые части этих соотношений содержат лишь положительные степени, в то время как их правые части содержат и отрицательные. Еще до того как в ψ_p и θ_p подставлены вычисленные с помощью рекуррентных соотношений производные от s_1' и s_q'' $(q<p)$, разложения ψ_p и θ_p уже содержат члены с $1/\varepsilon$, поскольку, как мы видели выше, такие члены содержит разложение функции F^*. Отсюда следует, что разложение s_p по возрастающим степеням ε должно начинаться с некоторой отрицательной степени ε. Следовательно, если в ψ_p и θ_p вместо производных s_q' и s_q'' подставить их разложения по степеням ε, то ψ_p и θ_p будут разлагаться по степеням ε, однако их разложение вместо того, чтобы начинаться с члена порядка $1/\varepsilon$, будет начинаться с члена порядка $1/\varepsilon^n$, где n — целое положительное число.

Показатель степени, с которым $1/\varepsilon$ входит в первый член разложения s_p, будет возрастать вместе с p.

Отсюда следует, что если эксцентриситеты очень малы, то можно опасаться появления в s_p очень больших членов. Как мы уже видели, эта трудность проистекает из-за наличия членов с $1/\varepsilon$ в разложении F^*, а эти члены обусловлены тем, что функция F содержала члены первого порядка относительно $\sqrt{\rho_i}$ либо ξ, η, ξ' и η'.

Посмотрим теперь, не является ли эта трудность, существо которой нам помог постичь пример, приведенный в предыдущем пункте, чисто искусственной и нельзя ли обойти ее с помощью какого-нибудь остроумного приема.

Устранение трудности

144. Чтобы лучше понять, каким образом можно преодолеть ту трудность, о которой я только что говорил, обратимся еще раз к весьма простому примеру из п. **142**.

Введем обозначения

$$\sqrt{2\Omega}\cos\omega = x, \qquad \sqrt{2\Omega}\sin\omega = y.$$

Канонические уравнения в этих обозначениях примут вид

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\mu}{\sqrt{2}}(y\cos\lambda + x\sin\lambda), \quad \frac{d\lambda}{dt} = 1,$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\mu}{\sqrt{2}}\sin\lambda - \mu A y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\mu}{\sqrt{2}}\cos\lambda + \mu A x. \tag{1}$$

Очевидно, что эта система уравнений очень легко интегрируется, ибо два последних ее уравнения линейны. Заметив, что $dt = d\lambda$, сразу же получим

$$x = \alpha\cos\lambda + \beta\cos(\mu A\lambda) - \gamma\sin(\mu A\lambda),$$
$$y = -\alpha\sin\lambda + \beta\sin(\mu A\lambda) + \gamma\cos(\mu A\lambda), \tag{2}$$

где

$$\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{2}(1+\mu A)},$$

а β и γ — две произвольные постоянные.

Для отыскания Λ нужно еще взять квадратуру, что выполняется без труда. В самом деле, мы получаем

$$\Lambda = \delta + \beta\alpha\cos(1+\mu A)\lambda + \gamma\alpha\sin(1+\mu A)\lambda,$$

где δ — новая константа интегрирования.

Замечательное частное решение отвечает случаю, когда β и γ равны нулю. В этом случае

$$x = \alpha\cos\lambda, \quad y = -\alpha\sin\lambda, \tag{3}$$

откуда

$$\Lambda = \delta.$$

Если проводить сравнение с задачей трех тел, то можно было бы сказать, что частное решение (3) является аналогом периодических решений первого сорта, определенных в главе III.

Из уравнений (2) получаем

$$(x - \alpha\cos\lambda)^2 + (y + \alpha\sin\lambda)^2 = \beta^2 + \gamma^2.$$

Если рассматривать x и y как координаты некоторой точки на плоскости, то это уравнение будет уравнением окружности с центром в точке

$$x = \alpha \cos \lambda, \quad y = -\alpha \sin \lambda,$$

которая соответствует периодическому решению (3). Эта точка лежит вблизи от начала координат, ибо параметр μ, а следовательно, и α мал. Тем не менее эта точка не совпадает с началом координат, и если β и γ достаточно малы, то радиус этой окружности мал и поэтому начало координат может оказаться расположенным даже вне ее.

Если мы перейдем к полярным координатам

$$\sqrt{2\Omega} \quad \text{и} \quad \omega,$$

то уравнение этой окружности запишется в виде

$$2\Omega - 2\alpha \sqrt{2\Omega} \cos(\omega + \lambda) = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2.$$

Сравним это уравнение с тем, которое можно легко получить из уравнения (2) п. 142

$$\mu \cos \varphi \sqrt{\frac{dS}{d\varphi}} + (1 + \mu A) \frac{dS}{d\varphi} = C - \Lambda = V(1 + \mu A)$$

и из которого мы в том же п. 142 находим $dS/d\varphi$. Напомним, что

$$\varphi = \omega + \lambda, \qquad \frac{dS}{d\varphi} = \frac{dS}{d\omega} = \Omega.$$

Мы видим, что оба эти уравнения совпадают, если положить

$$2V = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2.$$

Следовательно, константа $(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)/2$ совпадает с той, которую мы ранее обозначали символом V и считали имеющей порядок квадрата эксцентриситетов. Итак, радиус окружности, равный $\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$, имеет порядок эксцентриситетов. Если его порядок совпадает с порядком α, т. е. с порядком μ, то начало координат может оказаться вне указанной окружности.

Итак, можно сказать, что трудность, с которой мы столкнулись в п. 142 и на которую я особо обращал внимание, обусловлена тем, что мы воспользовались полярными координатами и плохо выбрали их полюс. Это начало следует выбирать в центре окружности, т. е. в точке, соответствующей периодическому решению.

Перенесем начало координат, положив

$$x' = x - \alpha \cos \lambda, \qquad y' = y + \alpha \sin \lambda.$$

Чтобы сохранить канонический вид уравнений, мы должны теперь ввести новую переменную Λ', такую, что

$$\Lambda' = \Lambda - \alpha (x' \cos\lambda - y' \sin\lambda).$$

Тогда сопряженными переменными будут

$$\Lambda',\ x',$$
$$\lambda,\ y'.$$

Функция F по предположению была равна

$$\Lambda + \mu \sqrt{\Omega} \cos(\omega + \lambda) + \mu A \Omega.$$

В новых переменных она имеет вид

$$\Lambda' + \frac{\mu A}{2}(x'^2 + y'^2) + \frac{\mu A \alpha^2}{2} + \frac{\alpha\mu}{\sqrt{2}}.$$

Последние два слагаемых являются константами и не играют никакой роли, потому что их можно включить в константу C. Тогда наши дифференциальные уравнения запишутся в виде

$$\frac{d\lambda}{dt} = 1, \qquad \frac{d\Lambda'}{dt} = 0,$$
$$\frac{dx'}{dt} = -\mu A y', \qquad \frac{dy'}{dt} = \mu A x',$$

а соответствующее уравнение с частными производными — в виде

$$\frac{dS}{d\lambda} + \frac{\mu A}{2}\left[\left(\frac{dS}{dy'}\right)^2 + y'^2\right] = \text{const}.$$

Если теперь перейти к полярным координатам, положив

$$\sqrt{2\Omega'} \cos\omega' = x', \qquad \sqrt{2\Omega'} \sin\omega' = y',$$

то

$$F = \Lambda' + \mu A \Omega' + \text{const}$$

и уравнение с частными производными примет следующий вид:

$$\frac{dS}{d\lambda} + \mu A \frac{dS}{d\omega'} = \text{const}.$$

Ввиду простоты подобранного мною примера преобразованное таким образом уравнение тотчас же интегрируется. Для меня особенно важно, что члены, которые были аналогичны члену с $\sqrt{dS/d\omega}$ в уравнении (2) п. 142 исчезли. А ведь именно в этих членах и коренилась вся трудность.

145. Попытаемся теперь применить тот же метод к задаче трех тел и прежде всего к плоскому случаю.

Сначала мы выберем в качестве переменных

$$\Lambda,\ \Lambda',\ \xi,\ \xi',$$
$$\lambda,\ \lambda',\ \eta,\ \eta', \tag{1}$$

затем

$$\Lambda,\ \Lambda',\ \sigma_i,$$
$$\lambda_1,\ \lambda_1',\ \tau_i, \tag{2}$$

затем

$$\Lambda,\ \Lambda',\ \rho_i, \tag{3}$$
$$\lambda_1,\ \lambda_1',\ \omega_i.$$

И наконец

$$\Lambda,\ \Lambda',\ V_i, \tag{4}$$
$$\lambda_2,\ \lambda_2',\ \nu_i.$$

Сравним эти переменные. Оставляя в стороне две первые пары сопряженных переменных, т.е. Λ, Λ' и сопряженные с ними, рассмотрим пока лишь две последние пары.

Можно сказать, что переменные (1) и (2) аналогичны прямоугольным координатам, а переменные (3) и (4) — полярным координатам.

Трудность, на которую мы обращали внимание в п. 143, была, как мы видели, обусловлена наличием членов степени 1/2 относительно V_i. В свою очередь эти члены получались из членов первого порядка относительно $\sqrt{\rho_i}$ и членов первого порядка по ξ, ξ', η, η'.

Если бы функция F не содержала подобных членов, то указанная выше трудность нам бы не встретилась.

Но поскольку эта трудность вполне аналогична той, на которую мы указали в п. 142 и которую нам удалось преодолеть в п. 144, можно попытаться достичь желаемого результата с помощью тех же средств, т. е. с помощью преобразования, аналогичного сдвигу начала координат. Необходимо произвести замену переменных ξ, ξ', η, η' на другие переменные,которые обращаются в нуль для периодических решений первого сорта, рассмотренных в п. 40, поскольку эти решения аналогичны периодическим решениям (3) предыдущего пункта.

В силу сказанного рассмотрим периодические решения п. 40. Мы уже видели, что в случае периодических решений первого сорта величины

$$\Lambda,\ \Lambda',\ \xi\cos\lambda - \eta\sin\lambda,\ +\xi\sin\lambda + \eta\cos\lambda,$$
$$\xi'\cos\lambda' - \eta'\sin\lambda',\ +\xi'\sin\lambda' + \eta'\cos\lambda' \tag{5}$$

являются периодическими функциями времени и что то же относится и к $\sin(\lambda - \lambda')$, $\cos(\lambda - \lambda')$.

Переменные (5) можно также рассматривать как периодические функции от $\lambda - \lambda'$, зависящие, кроме того, от двух произвольных постоянных, которые я буду обозначать Λ_1 и Λ_1'.

Итак, пусть

$$\Lambda = A, \quad \Lambda' = A', \quad \xi = B, \quad \xi' = B', \quad \eta = C, \quad \eta' = C'$$

—те уравнения, которым удовлетворяют эти периодические решения; A, A', B, B', C и C' — функции, зависящие от λ, λ', Λ_1 и Λ_1', периодические по λ и λ'. Эти функции имеют следующий вид: A и A' зависят только от λ и λ', а остальные функции представляются в виде

$$B = T\cos\lambda + U\sin\lambda, \qquad B' = T'\cos\lambda' + U'\sin\lambda',$$
$$C = -T\sin\lambda + U\cos\lambda, \qquad C' = -T'\sin\lambda' + U'\cos\lambda',$$

где T U, T' и U' зависят лишь от $\lambda - \lambda'$.

Отсюда нетрудно получить следующее тождество:

$$\frac{dB}{d\lambda}\frac{dC}{d\lambda'} - \frac{dB}{d\lambda'}\frac{dC}{d\lambda} = -T\frac{dT}{d(\lambda-\lambda')} - U\frac{dU}{d(\lambda-\lambda')} \tag{6}$$

и из соображений симметрии

$$\frac{dB'}{d\lambda}\frac{dC'}{d\lambda'} - \frac{dB'}{d\lambda'}\frac{dC'}{d\lambda} = -T'\frac{dT'}{d(\lambda-\lambda')} - U'\frac{dU'}{d(\lambda-\lambda')}.$$

Установив это, возьмем вспомогательную функцию

$$S = S_0 - \xi_1 C - \xi_1' C' + \eta B + \eta' B' + \xi_1\eta + \xi_1'\eta',$$

где S_0 является функцией, зависящей от λ, λ', Λ_1, Λ_1', которую мы определим несколько дальше. Тогда S будет зависеть от

$$\lambda, \lambda', \eta, \eta',$$
$$\Lambda_1, \Lambda_1', \xi_1, \xi_1'.$$

Если теперь мы введем обозначения

$$\frac{dS}{d\Lambda_1} = \lambda_1, \quad \frac{dS}{d\Lambda_1'} = \lambda_1', \quad \frac{dS}{d\xi_1} = \eta_1, \quad \frac{dS}{d\xi_1'} = \eta_1',$$
$$\frac{dS}{d\lambda} = \Lambda, \quad \frac{dS}{d\lambda'} = \Lambda', \quad \frac{dS}{d\eta} = \xi, \quad \frac{dS}{d\eta'} = \xi' \tag{7}$$

и примем в качестве новых переменных

$$\Lambda_1, \Lambda_1', \xi_1, \xi_1',$$
$$\lambda_1, \lambda_1', \eta_1, \eta_1'$$

вместо

$$\Lambda,\ \Lambda',\ \xi,\ \xi',$$
$$\lambda,\ \lambda',\ \eta,\ \eta',$$

то каноническая форма уравнений не изменится. Мы получим уравнения

$$\Lambda = \frac{dS_0}{d\lambda} - \xi_1 \frac{dC}{d\lambda} - \xi_1' \frac{dC'}{d\lambda} + \eta \frac{dB}{d\lambda} + \eta' \frac{dB'}{d\lambda},$$
$$\Lambda' = \frac{dS_0}{d\lambda'} - \xi_1 \frac{dC}{d\lambda'} - \xi_1' \frac{dC'}{d\lambda'} + \eta \frac{dB}{d\lambda'} + \eta' \frac{dB'}{d\lambda'},$$
$$\eta_1 = \eta - C, \quad \eta_1' = \eta' - C',$$
$$\xi = \xi_1 + B, \quad \xi' = \xi_1' + B.$$

Если положить

$$\xi_1 = \xi_1' = \eta_1 = \eta_1' = 0,$$

то ξ, ξ', η, и η' будут соответственно равны B, B', C и C'. Я хочу, чтобы Λ и Λ' в свою очередь были равны A и A'. Для этого введем условия

$$\frac{dS_0}{d\lambda} = A - C\frac{dB}{d\lambda} - C'\frac{dB'}{d\lambda},$$
$$\frac{dS_0}{d\lambda'} = A' - C\frac{dB}{d\lambda'} - C'\frac{dB'}{d\lambda'}. \tag{8}$$

Эти два уравнения совместны и определяют S_0, поскольку задаваемые ими значения производных функции S_0 удовлетворяют условию интегрируемости

$$\frac{d}{d\lambda'}\left(\frac{dS_0}{d\lambda}\right) - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dS_0}{d\lambda'}\right) = 0.$$

Но это условие можно записать и в виде

$$\frac{dA}{d\lambda'} - \frac{dA'}{d\lambda} - \frac{dC}{d\lambda'}\frac{dB}{d\lambda} + \frac{dC}{d\lambda}\frac{dB}{d\lambda'} - \frac{dC'}{d\lambda'}\frac{dB'}{d\lambda} + \frac{dC'}{d\lambda}\frac{dB'}{d\lambda'} = 0.$$

Если учесть уравнения (6) и заметить, что A, T и U зависят лишь от $\lambda - \lambda'$, то получим

$$-\frac{dA}{d\lambda} - \frac{dA'}{d\lambda} + T\frac{dT}{d\lambda} + U\frac{dU}{d\lambda} + T'\frac{dT'}{d\lambda} + U'\frac{dU'}{d\lambda} = 0.$$

Это означает, что для периодического решения

$$A + A' - \frac{T^2 + U^2 + T'^2 + U'^2}{2} = \text{const},$$

т. е.

$$\Lambda + \Lambda' - \frac{\xi^2 + \eta^2 + \xi'^2 + \eta'^2}{2} = \text{const.}$$

Но это равенство является не чем иным, как интегралом площадей, оно поэтому выполняется.

Итак, функция S_0, определяемая уравнениями (8), существует. Ее производные $dS_0/d\lambda$ и $dS_0'/d\lambda'$ периодичны по λ и λ'. Средние значения этих двух периодических функций зависят только от двух констант Λ_1 и Λ_1'. Поскольку мы не делали никаких предположений о выборе этих двух констант, можно считать, что средние значения в точности равны Λ_1 и Λ_1'.

Тогда получим

$S_0 = \Lambda_1\lambda + \Lambda_1'\lambda' +$ функция, периодическая по λ и λ'.

Функция S разлагается по возрастающим степеням μ и при $\mu = 0$ обращается в

$$\Lambda_1\lambda + \Lambda_1'\lambda' + \xi_1\eta + \xi_1'\eta'.$$

Чтобы выполнить то преобразование, о котором мы говорили, попытаемся старые переменные выразить как функции новых переменных с помощью уравнений (7). Прежде всего получим

$$\eta = \eta_1 + C, \quad \eta' = \eta_1' + C', \tag{9}$$

$$\xi = \xi_1 + B, \quad \xi' = \xi_1' + B',$$

затем два первых уравнения (7)

$$\lambda_1 = \frac{dS}{d\Lambda_1}, \quad \lambda_1' = \frac{dS}{d\Lambda_1'}.$$

В эти два уравнения я подставлю вместо η и η' их выражения (9), после чего эти уравнения можно записать в виде

$$\lambda_1 = \lambda + \mu\psi, \qquad \lambda_1' = \mu\psi'.$$

Функции ψ и ψ' зависят от λ, λ', ξ_1, ξ_1', η_1, η_1', Λ_1, Λ_1' следующим образом:

1) они разлагаются по степеням μ;

2) они периодичны по λ и λ';

3) они линейно зависят от ξ_1, ξ_1', η_1, η_1'.

С помощью принципов, изложенных в главе II, к которым мы уже часто прибегали, из этих уравнений можно вывести, что

$$\lambda = \lambda_1 + \mu\psi_1, \qquad \lambda' = \lambda_1' + \mu\psi_1',$$

где ψ_1 и ψ_1' — функции, зависящие от λ_1, Λ_1, ξ_1, η_1 и величин, обозначенных теми же буквами, но со штрихами. Эти функции:

1) допускают разложение по степеням μ, ξ, η_1, ξ_1', η_1';

2) периодичны по λ_1 и λ_1'.

Подставим в уравнения (9) выражения, полученные для λ и λ'. Мы получим ξ и η как функции новых переменных. Замечу, что полученные таким образом выражения для ξ и η разлагаются по степеням μ, ξ_1 и η_1 и периодичны по λ_1 и λ_1'; кроме того, при $\mu = 0$ значения ξ и η равны ξ_1 и η_1.

Если теперь в обоих уравнениях

$$\Lambda = \frac{dS}{d\lambda}, \qquad \Lambda' = \frac{dS}{d\lambda'}$$

вместо λ, ξ и η подставить их выражения в виде функций от новых переменных, то Λ и Λ' запишутся в виде функций от Λ_1, λ_1, ξ_1 и η_1, периодических по λ_1 и λ_1' и допускающих разложение по степеням μ, ξ_1 и η_1. При $\mu = 0$ эти функции равны Λ_1 и Λ_1'.

Что произойдет с функцией F после перехода к новым переменным? Ясно, что F можно будет по-прежнему разлагать по степеням μ, ξ_1 и η_1 и, как и прежде, она будет периодична по λ_1 и λ_1'.

Пусть

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots$$

— разложение функции F по степеням μ, записанное в старых переменных, и пусть точно так же

$$F = F_0' + \mu F_1' + \mu^2 F_2' + \ldots$$

— разложение функции F, записанное в новых переменных.

Сразу же ясно, что для того, чтобы получить F_0, достаточно в F_0 подставить вместо Λ и Λ' величины Λ_1 и Λ_1'.

Вычислим F_1'.

Пусть F_1'' означает функцию, которая получится, если заменить в F_1 каждую старую переменную соответствующей новой переменной, т. е. Λ заменить на Λ_1, λ на λ_1, ξ на ξ_1 и т. д.

Пусть

$$\Lambda = \Lambda_1 + \mu\Lambda_2 + \ldots,$$
$$\Lambda' = \Lambda_1' + \mu\Lambda_2' + \ldots$$

— разложения Λ и Λ' по степеням μ. Очевидно, что

$$F_1' = F_1'' + \frac{dF_0'}{d\Lambda_1}\Lambda_2 + \frac{dF_0'}{d\Lambda_1'}\Lambda_2'.$$

Вычислим Λ_2. Нетрудно найти

$$\Lambda = A - \xi_1 \frac{dC}{d\lambda} - \xi_1' \frac{dC'}{d\lambda} + \eta_1 \frac{dB}{d\lambda} + \eta_1' \frac{dB'}{d\lambda}.$$

Следовательно, для того чтобы получить Λ_2, необходимо в выражении

$$\frac{A - \Lambda_1}{\mu} - \xi_1 \frac{dC}{\mu\, d\lambda} - \xi_1' \frac{dC'}{\mu\, d\lambda} + \eta_1 \frac{dB}{\mu\, d\lambda} + \eta_1' \frac{dB'}{\mu\, d\lambda}$$

положить $\mu = 0$ и, следовательно, $\lambda = \lambda_1$, $\lambda' = \lambda_1'$. Таким образом, Λ_2 (и точно так же Λ_2') оказывается периодической функцией от λ_1, линейной по ξ_1 и η_1, а ее среднее значение (относительно λ_1 и λ_1') не зависит ни от ξ_1, ни от η_1.

Итак, F_1' периодична по λ_1 и λ_1'. Пусть R' — ее среднее значение, а R'' — среднее значение функции F_1''. R'' мы получим, заменив в R каждую старую переменную соответствующей новой переменной, а R' отличается от R'' лишь на некоторую величину, не зависящую от ξ_1 и η_1.

В главе X мы видели, какую важную роль при изучении вековых возмущений элементов орбиты играют уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dR}{d\eta}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dR}{d\xi}.$$

После замены переменных, которую мы только что произвели, эти уравнения заменятся следующими:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{dR''}{d\eta_1}, \qquad \frac{d\eta_1}{dt} = -\frac{dR''}{d\xi_1}.$$

Однако, как мы только что видели, эти две системы уравнений тождественны между собой и вторая отличается от первой лишь тем, что содержит штрихованные переменные.

До сих пор нам казалось, что производимое преобразование хорошо лишь тем, что не изменяет вида уравнений. Сейчас я достиг, наконец, такого момента, когда могу наглядно показать и другие его достоинства.

Рассмотрим прежде всего, во что переходят уравнения, которым удовлетворяют периодические решения первого сорта, если эти уравнения записать в новых переменных. Благодаря выбору вспомогательной функции S их можно записать в виде

$$\xi_1 = \eta_1 = \xi_1' = \eta_1' = 0, \qquad \Lambda_1 = \text{const}, \quad \Lambda_1' = \text{const}.$$

Наконец, λ_1 и λ_1' будут функциями, определяемыми значением времени, двумя константами Λ_1 и Λ_1' и двумя новыми произвольными постоянными.

Рассмотрение того, каким образом λ_1 и λ_1' зависят от этих двух констант, которые я обозначу символами α и β, хотя и не является необходимым для наших целей, может представить некоторый интерес. Имеем

$$\lambda_1 = \alpha + \varphi(t + \beta, \Lambda_1, \Lambda_1'), \qquad \lambda_1' = \alpha + \varphi'(t + \beta, \Lambda_1, \Lambda_1'),$$

где φ и φ' — две функции, зависящие от $t+\beta$, Λ_1, Λ_1', которые возрастают на некоторую константу δ (одну и ту же для φ и φ'), зависящую также от Λ_1 и Λ_1', при условии, если аргумент $t+\beta$ получает приращение, равное некоторой константе γ зависящей от Λ_1 и Λ_1'. Вторая из этих двух констант γ является периодом рассмотренного нами периодического решения, а первая константа δ представляет собой угол, на который поворачивается система трех тел в течение одного периода.

Из всего сказанного я хочу оставить в памяти лишь одно: если ξ_1, η_1, ξ_1' и η_1' равны нулю в начальный момент времени, то периодическое решение первого сорта и его четыре переменные ξ_1, η_1, ξ_1' и η_1' будут равны нулю всегда.

Однако у нас имеются дифференциальные уравнения

$$\frac{d\xi_1}{dt}=\frac{dF}{d\eta_1},\qquad \frac{d\xi_1'}{dt}=\frac{dF}{d\eta_1'},$$
$$\frac{d\eta_1}{dt}=-\frac{dF}{d\xi_1},\qquad \frac{d\eta_1'}{dt}=-\frac{dF}{d\xi_1'}.$$

Следовательно, необходимо, чтобы четыре производные

$$\frac{dF}{d\xi_1},\ \frac{dF}{d\xi_1'}\ \frac{dF}{d\eta_1},\ \frac{dF}{d\eta_1'}$$

одновременно обращались в нуль, если одновременно равны нулю четыре переменные

$$\xi_1,\ \xi_1',\ \eta_1,\ \eta_1',$$

т. е. функция F не должна содержать членов первого порядка относительно этих четырех переменных.

Итак, функция F, будучи выражена через новые переменные, имеет тот же вид, что и в старых переменных, с той лишь разницей, что она не содержит членов первого порядка относительно ξ_1, η_1, ξ_1', η_1', в то время как члены первого порядка относительно четырех соответствующих старых переменных ξ, η, ξ' и η' она содержала. Но именно эти члены и создавали всю трудность задачи, эта трудность, следовательно, исчезла вместе с ними.

То же останется в силе и в том случае, если вместо плоской задачи трех тел рассматривать пространственную задачу.

В самом деле, если в качестве переменных выбрать

$$\Lambda_1,\ \Lambda_1',\ \xi_1,\ \xi_1',\ p,\ p',$$
$$\lambda_1,\ \lambda_1',\ \eta_1,\ \eta_1',\ q,\ q',$$

то функция F не будет содержать члена первого порядка относительно ξ_1, η_1, p и q [38]

Глава XIII

РАСХОДИМОСТЬ РЯДОВ ЛИНДШТЕДТА

146. В главе IX мы узнали, что каноническим уравнениям

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \tag{1}$$

можно формально удовлетворить с помощью рядов следующего вида:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots, \\ y_i &= w_i + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

где x_i^k и y_i^k периодически зависят от величин

$$w_i = n_i t + \omega_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и представляются рядами, расположенными по синусам и косинусам линейных комбинаций w с целыми коэффициентами, так что

$$x_i^k \text{ (или } y_i^k) = A_0 + \sum A \cos(m_1 w_1 + m_2 w_2 + \ldots + m_n w_n + h). \tag{3}$$

Кроме того, среднее значение A_0 этих периодических функций можно выбирать произвольно.

Теперь речь пойдет о том, как узнать, сходятся ли эти ряды.

Этот вопрос можно разбить на ряд более мелких вопросов. В самом деле, можно спросить:

1) сходятся ли ряды частного вида (3) и будет ли эта сходимость абсолютной и равномерной;

2) в предположении, что они не сходятся абсолютно, можно ли так перегруппировать их члены, чтобы получить полусходящиеся ряды;

3) в предположении, что ряды (3) сходятся, будут ли сходиться ряды (2) и будет ли их сходимость равномерной.

Исследование рядов (3)

147. Напомним, каким образом мы получили ряды (3). Мы пришли к уравнениям следующего вида:

$$\sum n_p^0 \frac{dx_i^k}{dw_p} = \sum B \cos (m_1 w_1 + m_2 w_2 + \ldots + m_n w_n + h)$$

(уравнения (12) п. 127) и нашли из них

$$x_i^k = \sum \frac{B \sin (m_1 w_1 + m_2 w_2 + \ldots + m_n w_n + h)}{m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 + \ldots + m_n n_n^0} + A_0, \qquad (3\,\text{bis})$$

где A_0 — некоторая произвольная постоянная.

Сходится ли ряд (3) абсолютно и равномерно? Если это так, то сумма этого ряда должна оставаться конечной при всех значениях времени. Однако в своей статье, опубликованной в журнале «Bulletin Astronomique» (т. I, стр. 324) [39] я доказал, что сумма членов ряда такого вида не может все время оставаться меньше половины любого из его коэффициентов.

Следовательно, для того чтобы ряд (3) сходился равномерно, необходимо, чтобы абсолютное значение коэффициента

$$\frac{B}{m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 + \ldots + m_n n_n^0}$$

было ограничено [40].

Предположим для определенности, что имеется только две степени свободы и что $n_1^0 = n$, $n_2^0 = 1$. Тогда ряд (3) запишется в виде

$$A_0 + \sum \frac{B_{m_1 m_2} \sin (m_1 w_1 + m_1 w_2 + h_{m_1 m_2})}{m_1 n - m_2}$$

и абсолютное значение коэффициентов

$$\frac{B_{m_1 m_2}}{m_1 n - m_2} \qquad (4)$$

должно быть ограничено.

Прежде всего ясно, что при рациональных n этого быть не может, если только коэффициент $B_{m_1 m_2}$ не обращается в нуль всякий раз, когда

$$\frac{m_2}{m_1} = n.$$

Поэтому нам придется заняться случаем, когда n иррационально, и особо рассмотреть те знаменатели $m_1 n - m_2$, которые отвечают подходящим дробям разложения числа n в непрерывную дробь.

Я утверждаю, что какова бы ни была последовательность чисел $B_{m_1 m_2}$, можно найти такое иррациональное число n (сколь угодно близкое к заданному), что абсолютные значения коэффициентов (4) не будут ограниченными.

Действительно, пусть

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_p}{\beta_p}, \ldots$$

— последовательные подходящие дроби числа n.

Пусть

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$$

— некоторая последовательность неограниченно возрастающих положительных чисел. Я утверждаю, что всегда можно найти такое число n, что

$$\left| \frac{B\beta_p\alpha_p}{n\beta_p - \alpha_p} \right| > \lambda_p. \tag{5}$$

В самом деле, по определению подходящей дроби

$$\alpha_{p+1} = \alpha_{p-1} + \alpha_p a_{p+1}, \quad \beta_{p+1} = \beta_{p-1} + \beta_p a_{p+1},$$

где a_p — целое положительное число, которое можно выбирать произвольным образом, не изменяя p первых подходящих дробей. С другой стороны,

$$|n\beta_p - \alpha_p| < \frac{1}{\beta_{p-1} + \beta_p a_{p+1}}.$$

Поэтому мы можем выбрать целое число a_{p+1} так, чтобы абсолютная величина $n\beta_p - \alpha_p$ была сколь угодно малой, а следовательно, и так, чтобы выполнялось неравенство (5), каковы бы ни были числа $B\beta_p\alpha_p$ и λ_p.

Поскольку единственное условие, наложенное на λ_p, состоит в том, что эти числа должны неограниченно возрастать, мы можем произвольным образом выбрать q первых из них (каково бы ни было q) и, следовательно, первые q подходящих дробей могут быть произвольны. Поэтому число n может быть сколь угодно близко к произвольно заданному числу.

С другой стороны, для многих n ряд (3bis) будет сходиться. В самом деле, предположим, что ряд

$$\sum B_{m_1 m_2} \cos(m_1 w_1 + m_2 w_2 + h)$$

сходится и, как это бывает обычно, так, что при всех значениях m_1 и m_2

$$|B_{m_1 m_2}| < K\alpha^{|m_1|}\beta^{|m_2|}. \tag{6}$$

Здесь K — некоторое положительное число, а α и β — два положительных числа, меньших единицы.

Выберем $n = \sqrt{p/q}$, где p и q — два целых взаимно простых числа, причем pq не есть точный квадрат. Тогда

$$\left|\frac{1}{m_1 n - m_2}\right| = \left|\frac{m_1 n + m_2}{m_1^2 n^2 - m_2^2}\right| = \left|\frac{(m_1 n + m_2)\, q}{p m_1^2 - q m_2^2}\right| < q\,(|\,m_1\,|\,n + |\,m_2\,|),$$

откуда

$$\left|\frac{B_{m_1 m_2} \sin(m_1 w_1 + m_2 w_2 + h)}{m_1 n - m_2}\right| < Kq\,(|\,m_1\,|\,n + |\,m_2\,|)\,\alpha^{|\,m_1\,|}\beta^{|\,m_2\,|},$$

что и доказывает сходимость ряда (3bis).

Но очевидно, что целые числа p и q можно выбрать так, чтобы $\sqrt{p/q} = n$ было сколь угодно близко к любому заданному числу.

Итак, мы пришли к следующему результату, который я сейчас сформулирую в наиболее общем случае.

Пусть K — произвольное положительное число; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — положительные числа, меньшие единицы.

Я предполагаю, что выполняется неравенство, аналогичное неравенству (6), и записываю его в виде

$$|\,B\,| < K\alpha_1^{|\,m_1\,|}\alpha_2^{|\,m_2\,|} \ldots \alpha_n^{|\,m_n\,|};$$

такое условие обычно соблюдается.

В этом случае можно, с одной стороны, так подобрать числа

$$n_1^0, n_2^0, \ldots, n_n^0,$$

чтобы они сколь угодно мало отличались от n наперед заданных чисел и в то же время чтобы ряд (3bis) не сходился равномерно. С другой стороны ничто не мешает выбрать их и так, чтобы они сколь угодно мало отличались от тех же самых n наперед заданных чисел, а ряд (3bis) сходился равномерно.

Нетрудно понять всю важность этого замечания. В самом деле, наблюдения, какова бы ни была их точность, могут определять средние движения лишь приближенно. Поэтому, оставаясь в рамках этого приближения, можно всегда распорядиться ими так, что ряды (3bis) будут сходиться.

Интересно выяснить, можно ли сделать ряды (3bis) сходящимися для постоянных интегрирования x_i^0, изменяющихся в некотором интервале (напомним, что n_i^0 зависят от x_i^0). В силу только что изложенного это возможно лишь при условии, что ряд

$$\Sigma\, B \cos(m_1 w_1 + \ldots + m_n w_n + h)$$

содержит конечное число членов, т. е. при условии, что в разложении

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots$$

каждая из функций F_1, F_2,... в своем разложении по синусам и косинусам величин, кратных y, будет содержать лишь конечное число членов.

В общем случае это условие не выполняется, и какая-нибудь из функций, например F_1, будет представлять собой ряд с бесконечным числом членов. Однако на практике вычисления проводят, ограничиваясь лишь конечным числом членов в разложении функций F_i. В самом деле, поскольку ряд F_1 сходится, все его члены, за исключением конечного числа их, очень малы. Следовательно, в первом приближении их можно не принимать во внимание.

Вот как производят вычисления. В разложении F_1 все члены, за исключением конечного числа, можно считать величинами того же порядка, что и μ. Однако среди них есть такие, которые имеют тот же порядок величины, что и μ^2, и такие, намного меньшие, которые имеют тот же порядок величины, что и μ^3, и т. д. В других разложениях F_2, F_3,... также можно найти члены различных порядков.

Поэтому мы можем записать в общем случае

$$F_i = F_{i,0} + F_{i,1} + F_{i,2} + \ldots + F_{i,k} + \ldots,$$

где $F_{i,k}$ означает те из членов F_i, которые можно рассматривать как величины того же порядка, что и μ^k. Число таких членов конечно. Ясно, что такой способ разложения F_i оставляет много произвола.

Пусть теперь μ' — некоторая величина того же порядка, что и μ. Введем обозначения

$$F_{i,k} = \mu'^k \Phi_{i,k}.$$

Все члены $\Phi_{i,k}$ конечны, и мы можем записать

$$F = \sum \mu^i \mu'^k \Phi_{i,k}.$$

Благодаря этому искусственному приему функция F зависит от двух параметров, а $\Phi_{i,k}$ содержит лишь конечное число членов. Так как оба параметра μ и μ' представляют собой величины одного порядка, мы положим $\mu = \lambda\mu'$ и получим

$$F = \sum \mu'^k \Phi_k,$$

где Φ_k содержит лишь конечное число членов.

Этот искусственный прием, на изложении которого я остановился, быть может, несколько дольше, чем следовало, в приложениях проводится чрезвычайно быстро и показывает, что на практике всегда можно общий случай свести к такому, когда функции F_i содержат лишь конечное число членов.

Исследование рядов (2)

148. Итак, вопрос о сходимости рядов (3) заменен вопросом о сходимости рядов (2).

Но этот вопрос распадается на несколько более мелких. В самом деле, ряды (2) зависят от μ и постоянных интегрирования x_i^0. Можно поставить следующие вопросы:

1) сходятся ли ряды (2) равномерно при всех значениях μ и констант x_i^0, изменяющихся в некотором интервале;

2) сходятся ли ряды (2) равномерно при достаточно малых значениях μ и надлежащим образом выбранных значениях x_i^0?

На первый вопрос следует отвечать отрицательно.

В самом деле, предположим, что ряды (2) сходятся равномерно и что их можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^0 + \mu\varphi_i(w_k, x_k^0, \mu), \\ y_i &= w_i + \mu\psi_i(w_k, x_k^0, \mu), \end{aligned} \tag{7}$$

где φ_i и ψ_i — функции, допускающие разложение по возрастающим степеням μ, периодические по w и, кроме того, как-то зависящие от x_i^0.

Разрешим уравнения (7) относительно x_i^0 и w_i. Из этих уравнений x_i^0 и w_i можно найти в виде рядов, расположенных по степеням μ, коэффициенты которых зависят лишь от x_i и y_i.

Нетрудно убедиться в этом. Действительно, для того чтобы усмотреть, что теорема п. **30** применима, достаточно лишь заметить, что при $\mu = 0$ рассмотренные выше уравнения принимают вид

$$x_i^0 = x_i, \quad w_i = y_i$$

и якобиан их правых частей равен 1. Впрочем, можно было бы воспользоваться обобщенной формулой Лагранжа.

Итак, мы нашли

$$x_i^0 = x_i + \mu\varphi_i'(y_k, x_k, \mu), \tag{8}$$

$$w_i = y_i + \mu\psi_i'(y_k, x_k, \mu), \tag{9}$$

где φ_i' и ψ_i' — функции, допускающие разложение по степеням μ, однозначно зависящие от x и y и периодические по y. Таким образом, уравнения (8) определяют n однозначных интегралов наших дифференциальных уравнений.

С другой стороны,

$$w_i = n_i t + \varpi_i,$$

и определенные таким образом коэффициенты n_i зависят от μ и x_i^0.

Исследование рядов (2)

148. Итак, вопрос о сходимости рядов (3) заменен вопросом о сходимости рядов (2).

Но этот вопрос распадается на несколько более мелких. В самом деле, ряды (2) зависят от μ и постоянных интегрирования x_i^0. Можно поставить следующие вопросы:

1) сходятся ли ряды (2) равномерно при всех значениях μ и констант x_i^0, изменяющихся в некотором интервале;

2) сходятся ли ряды (2) равномерно при достаточно малых значениях μ и надлежащим образом выбранных значениях x_i^0?

На первый вопрос следует отвечать отрицательно.

В самом деле, предположим, что ряды (2) сходятся равномерно и что их можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^0 + \mu\varphi_i(w_k, x_k^0, \mu), \\ y_i &= w_i + \mu\psi_i(w_k, x_k^0, \mu), \end{aligned} \tag{7}$$

где φ_i и ψ_i — функции, допускающие разложение по возрастающим степеням μ, периодические по w и, кроме того, как-то зависящие от x_i^0.

Разрешим уравнения (7) относительно x_i^0 и w_i. Из этих уравнений x_i^0 и w_i можно найти в виде рядов, расположенных по степеням μ, коэффициенты которых зависят лишь от x_i и y_i.

Нетрудно убедиться в этом. Действительно, для того чтобы усмотреть, что теорема п. **30** применима, достаточно лишь заметить, что при $\mu = 0$ рассмотренные выше уравнения принимают вид

$$x_i^0 = x_i, \quad w_i = y_i$$

и якобиан их правых частей равен 1. Впрочем, можно было бы воспользоваться обобщенной формулой Лагранжа.

Итак, мы нашли

$$x_i^0 = x_i + \mu\varphi_i'(y_k, x_k, \mu), \tag{8}$$

$$w_i = y_i + \mu\psi_i'(y_k, x_k, \mu), \tag{9}$$

где φ_i' и ψ_i' — функции, допускающие разложение по степеням μ, однозначно зависящие от x и y и периодические по y. Таким образом, уравнения (8) определяют n однозначных интегралов наших дифференциальных уравнений.

С другой стороны,

$$w_i = n_i t + \varpi_i,$$

и определенные таким образом коэффициенты n_i зависят от μ и x_i^0.

В функциях

$$\frac{d\varphi_i}{dw_k}, \quad \frac{d\varphi_i}{dx_k^0}, \quad \frac{d\psi_i}{dw_p}, \quad \frac{d\psi_i}{dx_k^0} \tag{11}$$

постоянные x_k^0 и w_k следует заменить теми их значениями, которые отвечают периодическому решению (10); таким образом, функции (11) будут периодическими по t.

Отсюда следует, что $2n$ характеристических показателей равны нулю. Однако мы знаем, что в общем случае это неверно[41]. Следовательно, вообще говоря, ряды (2) не сходятся равномерно, если μ и x_i^0 изменяются в некотором интервале [42].

149. Нам осталось еще рассмотреть второй вопрос. Действительно, можно спросить, не могут ли эти ряды сходиться при малых значениях μ, если x_i^0 придавать надлежащим образом подобранные значения.

Здесь следует различать два случая.

Вообще говоря, величины n_i зависят не только от x_i^0, но и от μ и разлагаются по степеням μ.

Кроме того, мы видели, что средние значения функций φ_i и ψ_i можно выбирать произвольным образом. Мы видели также, что эти средние значения можно выбирать так, чтобы

$$n_i = n_i^0,$$
$$n_i^1 = n_i^2 = \ldots = n_i^p = \ldots = 0,$$

т. е. чтобы n_i не зависели от μ.

В силу этого можно отдельно рассмотреть случаи, когда n_i зависят от μ и когда n_i от μ не зависят.

Предположим сначала, что n_i зависят от μ и имеется лишь две степени свободы.

Пусть

$$n_1 = n_1^0 + \mu n_1^1 + \mu^2 n_1^2 + \ldots; \; w_1 = n_1 t + \omega_1,$$
$$n_2 = n_2^0 + \mu n_2^1 + \mu^2 n_2^2 + \ldots, \; w_2 = n_2 t + \omega_2.$$

Кроме того, x_1, x_2, y_1 и y_2 должны разлагаться по степеням μ, причем так, чтобы x_1, x_2, y_1 — w_1, y_2 — w_2 были периодическими функциями по w_1 и w_2.

Это должно происходить при достаточно малых μ. Однако среди значений μ, меньших некоторого предела, всегда можно найти такие, что отношение n_1/n_2 будет рациональным, поскольку это отношение представляет собой непрерывную функцию от μ.

Но если отношение n_1/n_2 рационально, то ряды (2) определяют некоторое периодическое решение уравнений (1) *при любых постоянных интегрирования* ω_1 и ω_2 [43].

В функциях

$$\frac{d\varphi_i}{dw_k}, \quad \frac{d\varphi_i}{dx_k^0}, \quad \frac{d\psi_i}{dw_p}, \quad \frac{d\psi_i}{dx_k^0} \tag{11}$$

постоянные x_k^0 и w_k следует заменить теми их значениями, которые отвечают периодическому решению (10); таким образом, функции (11) будут периодическими по t.

Отсюда следует, что $2n$ характеристических показателей равны нулю. Однако мы знаем, что в общем случае это неверно[41]. Следовательно, вообще говоря, ряды (2) не сходятся равномерно, если μ и x_i^0 изменяются в некотором интервале [42].

149. Нам осталось еще рассмотреть второй вопрос. Действительно, можно спросить, не могут ли эти ряды сходиться при малых значениях μ, если x_i^0 придавать надлежащим образом подобранные значения.

Здесь следует различать два случая.

Вообще говоря, величины n_i зависят не только от x_i^0, но и от μ и разлагаются по степеням μ.

Кроме того, мы видели, что средние значения функций φ_i и ψ_i можно выбирать произвольным образом. Мы видели также, что эти средние значения можно выбирать так, чтобы

$$n_i = n_i^0,$$
$$n_i^1 = n_i^2 = \ldots = n_i^p = \ldots = 0,$$

т. е. чтобы n_i не зависели от μ.

В силу этого можно отдельно рассмотреть случаи, когда n_i зависят от μ и когда n_i от μ не зависят.

Предположим сначала, что n_i зависят от μ и имеется лишь две степени свободы.

Пусть

$$n_1 = n_1^0 + \mu n_1^1 + \mu^2 n_1^2 + \ldots; \; w_1 = n_1 t + \omega_1,$$
$$n_2 = n_2^0 + \mu n_2^1 + \mu^2 n_2^2 + \ldots, \; w_2 = n_2 t + \omega_2.$$

Кроме того, x_1, x_2, y_1 и y_2 должны разлагаться по степеням μ, причем так, чтобы x_1, x_2, y_1 — w_1, y_2 — w_2 были периодическими функциями по w_1 и w_2.

Это должно происходить при достаточно малых μ. Однако среди значений μ, меньших некоторого предела, всегда можно найти такие, что отношение n_1/n_2 будет рациональным, поскольку это отношение представляет собой непрерывную функцию от μ.

Но если отношение n_1/n_2 рационально, то ряды (2) определяют некоторое периодическое решение уравнений (1) *при любых постоянных интегрирования* ω_1 и ω_2 [43].

Не может ли случиться так, что ряды (2) будут сходиться при некоторых надлежащим образом выбранных значениях x_i^0?

Предположим для простоты, что имеется две степени свободы. Не могут ли ряды (2) сходиться, например, при условии, что x_1^0 и x_2^0 подобраны таким образом, что отношение n_1/n_2 иррационально, а квадрат его, напротив, рационален (либо же на отношение n_1/n_2 наложено какое-нибудь другое условие, аналогичное сказанному, которое я выбрал до некоторой степени случайно)?

Рассуждения, проведенные в этой главе, не дают мне оснований утверждать, что такого случая представиться не может. Я могу лишь сказать, что такой случай весьма маловероятен [44].

Сравнение со старыми методами

150. К сказанному добавлю лишь одно: каким образом, не имея возможности убедиться в сходимости рядов, лучше всего выбирать средние значения x_i^p и y_i^p? Я полагаю, что эти средние значения удобно выбирать так, чтобы x_i^p и y_i^p (начиная с x_i^1 и y_i^1) обращались в нуль при $t = 0$. При этом начальными значениями величин x_i будут служить x_i^0, а начальными значениями y_i — величины ω_i.

Далее, если рассмотреть получающиеся при этом ряды

$$x_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots,$$
$$y_i = w_i + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots, \qquad (1)$$

где x_0^p, w_i и y_i^p зависят от μ, затем разложить эти величины по степеням η и расположить по возрастающим степеням μ правые части уравнений (1), то получим разложение по степеням μ тех частных решений дифференциальных уравнений, у которых начальными значениями для x_i и y_i служат x_i^0 и ω_i.

Известно, что такое разложение сходится при достаточно малых t.

Пусть

$$x_i = x_i^0 + \mu\xi_i^1 + \mu^2\xi_i^2 + \ldots,$$
$$y_i = n_i^0 t + \omega_i + \mu\eta_i^1 + \mu^2\eta_i^2 + \ldots. \qquad (2)$$

Здесь ξ_i^p и η_i^p — функции, зависящие от времени непериодически, но не зависящие более от μ. Кроме того, эти функции, так же, как и x_i^p и y_i^p, обращаются в нуль при $t = 0$.

Точно таким же образом, как мы получили разложение (2) из разложения (1), мы можем вывести кое-какие заключения о виде разложения (2).

Так, чтобы получить ξ_i^1, достаточно в выражении для x_i^1 положить $\mu = 0$. Напомним, каким образом x_i^1 зависит от μ: x_i^1 является периоди-

ческой функцией величин, которые мы обозначали через

$$w_1, \quad w_2, \ldots, \quad w_n$$

и, кроме того,

$$w_i = n_i t + \varpi_i.$$

Здесь ϖ_i — некоторая постоянная интегрирования, а n_i зависит от μ. Следовательно, если положить $\mu = 0$, то n_i будет равно n_i^0, поскольку

$$n_i = n_i^0 + \mu n_i^1 + \mu^2 n_i^2 + \ldots.$$

В силу этого w_i будет равно $n_i^0 t + \varpi_i$, а x_i^1 останется по-прежнему периодической функцией величин $n_i{}^0 t + \varpi_i$.

Следовательно, ξ_i^1 *не содержит векового члена.*

Для того чтобы найти ξ_i^2, достаточно в выражении

$$\frac{dx_i^1}{d\mu} + x_i^2$$

положить $\mu = 0$. Рассуждая точно так же, как мы только что делали, убедимся в том, что значение $\mu = 0$ не приводит к появлению в x_i^2 векового члена. С другой стороны,

$$\frac{dx_i^1}{d\mu} = t \sum \frac{dn_k}{d\mu} \frac{dx_i^1}{dw_k}$$

или (при $\mu = 0$)

$$\frac{dx_i^1}{d\mu} = t \sum n_k^1 \frac{dx_i^1}{dw_k}.$$

Очевидно также, что выражение для dx_i^1/dw_k содержит вековые члены, однако в этом случае необходимо проводить различие. Я буду называть смешанными вековыми членами члены вида

$$t^p \sin \alpha t \quad \text{или} \quad t^p \cos \alpha t$$

и чисто вековыми членами члены вида t^p.

Можно записать

$$\sum n_k^1 \frac{dx_i^1}{dw_k} = A_0 + \sum A_\alpha \sin \alpha t + \sum B_\alpha \cos \alpha t.$$

Действительно, левая часть этого уравнения периодически зависит от w, а при $\mu = 0$

$$w_i = n_i^0 t + \varpi_i.$$

Если A_0 равно нулю, то выражение для ξ_i^2 не содержит чисто вековых членов, но может содержать смешанные вековые члены. Если же A_0 отлично от нуля, то выражение для ξ_i^2 содержит чисто вековые члены.

Существует случай, когда A_0 заведомо равно нулю: это именно тот случай, когда ни одна из величин n_i^0 не равна нулю, и между n_i^0 не существует никакого линейного соотношения с целыми коэффициентами (случай п. 125). Действительно,

$$A_0 = \sum n_k^1 \left[\frac{dx_i^1}{dw_k}\right], \quad \text{а} \quad \left[\frac{dx_i^1}{dw_k}\right] = 0.$$

Здесь с помощью символа $[U]$ мы обозначали среднее значение периодической функции U, зависящей от $w_1, w_2, \ldots, w_n$.

Однако существует еще один случай, когда A_0 также равно нулю.

Предположим, что

$$n_3^0 = n_4^0 = \ldots = n_n^0 = 0$$

и что, с другой стороны, n_1^0 несоизмеримо с n_2^0. Положим

$$x_i^1 = \Sigma\ C \sin\ (m_1 w_1 + m_2 w_2 + \ldots + m_n w_n + h),$$

где m_1, $m_2 \ldots$, m_n — целые числа, а C и h — некоторые константы. Действительно, разложение x_i^1 имеет такой вид, поскольку эта функция периодически зависит от w.

Тогда

$$\sum n_k^1 \frac{dx_i^1}{dw_k} = \sum C\ \mathrm{S} \cos\ (m_1 w_1 + m_2 w_2 + \ldots + m_n w_n + h),$$

где

$$\mathrm{S} = \sum n_k^1 m_k.$$

При $\mu = 0$ получим

$$\sum n_k^1 \frac{dx_i^1}{dw_k} = \sum C\ \mathrm{S} \cos\ (\alpha t + \beta),$$

где

$$\alpha = m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0, \quad \beta = m_1 \varpi_1 + m_2 \varpi_2 + \ldots + m_n \varpi_n + h.$$

В силу сделанного выше предположения α может быть равной нулю лишь в том случае, если $m_1 = m_2 = 0$. Следовательно,

$$A_0 = \sum C\ \mathrm{S} \cos \beta,$$

причем суммирование проводится по всем членам, таким, что $m_1 = m_2 = 0$.

Пусть теперь

$$F_1 = \sum D \cos (m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n + k),$$

где D и k зависят от x_1, x_2,..., x_n. Такой вид должна иметь функция F_1, периодическая по y.

Пусть D_0 и k_0 — те значения, которые принимают D и k, если вместо x_i подставить x_i^0. Пусть

$$F_1^0 = \sum D_0 \cos (m_1 w_1 + m_2 w_2 + \ldots + m_n w_n + k_0)$$

— функция, в которую переходит функция F_1, если в ней произвести замену x_i на x_i^0 и y_i на w_i. Функция x_i^1 определяется уравнением

$$\sum n_k^0 \frac{dx_i^1}{dw_k} = \frac{dF_1^0}{dw_i},$$

откуда

$$x_i = \sum \frac{D_0 m_i}{m_i n_1^0 + m_2 n_2^0} \cos (m_1 w_1 + m_2 w_2 + \ldots + m_n w_n + k_0),$$

из чего следует

$$C = \frac{D_0 m_i}{m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0}, \qquad h = k_0.$$

Если $i = 1$ или 2, то C обращается в нуль, когда $m_1 = m_2 = 0$, и A_0 равно нулю. Следовательно, ξ_1^2 и ξ_2^2 в этом случае будут содержать смешанные вековые члены, но не будут содержать чисто вековых членов.

Выражения же

$$\xi_3^2, \xi_4^2, \ldots, \xi_n^2,$$

напротив, могут содержать чисто вековые члены.

Применим сказанное к задаче трех тел. Обратимся вновь в рядам из п. **140.**

Величины n_i^0 равны нулю, за исключением n_1^0 и n_2^0.

Разложим Λ и V_i по возрастающим степеням μ. Тогда

$$\Lambda = \Lambda_0 + \mu\Lambda_1^1 + \mu^2\Lambda_1^2 + \ldots,$$
$$\Lambda' = \Lambda_0' + \mu\Lambda_2^1 + \mu^2\Lambda_2^2 + \ldots,$$
$$V_i = V_i^0 + \mu V_i'^1 + \mu^2 V_i'^2 + \ldots,$$

где Λ_i и $V'_i{}^k$ являются функциями от t, не зависящими от μ, которые обращаются в нуль вместе с t.

В силу приведенных выше соображений функции Λ_i^1 не содержат векового члена. В этом и состоит теорема Лагранжа об инвариантности больших осей с точностью до квадратов масс.

Функции Λ_i^2 будут содержать смешанные вековые члены, но не будут содержать чистых вековых членов. В этом и заключается теорема Пуассона об инвариантности больших осей с точностью до кубов масс.

Функции $V_i'^1$ вековых членов не содержат, но $V_i'^2$ содержат вековые члены как чистые, так и смешанные.

Возвратимся к случаю, когда все n_i^0 отличны от нуля и не связаны никаким линейным соотношением с целыми коэффициентами. Тогда

$$\xi_i^3 = x_i^3 + \frac{dx_i^2}{d\mu} + \frac{1}{2}\frac{d^2x_i^1}{d\mu^2} \quad \text{при} \quad \mu = 0.$$

Очевидно, что так же, как и раньше, функции x_i^3 не приведут к появлению векового члена, а производная $dx_i^2/d\mu$ не приведет к появлению чисто векового члена. С другой стороны,

$$\frac{d^2x_i'}{d\mu^2} = \sum \frac{dx_i^1}{dw_k}\frac{d^2w_k}{d\mu^2} + \sum \frac{d^2x_i^1}{dw_k\,dw_h}\frac{dw_k}{d\mu}\frac{dw_h}{d\mu}.$$

Правую часть можно переписать в виде

$$2t\sum n^2\frac{dx_i^1}{dw_k} + t^2\sum\frac{d^2x_i^1}{dw_k\,dw_h}n_k^1 n_h^1.$$

Таким образом, мы получим еще и смешанные вековые члены, но не получим чисто вековых членов, ибо среднее значение производных dx_i'/dw_k, $d^2x_i^{1\prime}/dw_k dw_h$ всегда равно нулю.

Очевидно, что в точности те же рассуждения можно применить и к следующим членам разложения, т. е. к ξ_i^k.

Итак, в том частном случае задачи трех тел, о котором шла речь в п. 9, большая ось остается инвариантной в смысле Пуассона несколько дольше, чем это следует из соответствующего приближения.

Точно так же, если закон притяжения отличается от закона Ньютона, то разложения величин, соответствующих большим осям, не будут содержать чисто вековых членов несколько дольше, чем это следует из соответствующего приближения. Поэтому эти величины будут инвариантными в смысле Пуассона.

Таким образом, мы установили связь между методом Линдштедта и знаменитыми теоремами Лагранжа и Пуассона. Идеей о возможности такой связи мы обязаны Тиссерану.

Высказанные соображения наводят на еще одно (последнее) замечание. Может показаться, что из найденных нами в предыдущих главах разложений нельзя сделать никаких выводов, поскольку все эти разложения расходятся.

Действительно, рассмотрим разложение функции $\arcsin u$

$$\arcsin u = u + A_1 u^3 + A_2 u^5 + \ldots;$$

отсюда мы сможем вывести, что

$$\mu t = \sin\mu t + A_1 \sin^3\mu t + A_2 \sin^5\mu t + \ldots .$$

Степени $\sin^3 \mu t$, $\sin^5 \mu t$ и т. д. можно без особого труда разложить по синусам величин, кратных μt. Не кажется ли поэтому, что отсюда можно вывести, по крайней мере формально, разложение функции μt в тригонометрический ряд?

Очевидно, что так же будет обстоять дело и с $\mu^2 t^2$, $\mu t \sin \alpha t$,... и всеми другими членами, которые могут входить в разложение (2).

Следовательно, может показаться, будто утверждение о том, что функции, представленные рядами (2), можно разложить в чисто тригонометрические ряды, коль скоро речь идет о формальном разложении, еще не позволяет делать какие-либо выводы и поэтому не дает нам никаких сведений о виде рядов (2).

Однако такое мнение ошибочно. Если угодно, то разложения (2) с помощью весьма простого искусственного приема, которым я только что воспользовался в случае функции μt (я отнюдь не осмелюсь утверждать, что этим приемом до меня никто не пользовался), можно привести к чисто тригонометрическому виду, *если ввести бесконечно много различных аргументов*. Но теоремы предыдущих глав утверждают, что формальные разложения возможны лишь с конечным числом аргументов. Это обстоятельство заранее не очевидно, и именно оно и позволяет получить многочисленные выводы по поводу коэффициентов рядов (2) и аналогичных рядов, встречающихся в задаче трех тел [45].

Глава XIV

ПРЯМОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ РЯДОВ

151. По-видимому, было бы небезынтересно еще раз обратиться к результатам, полученным в трех предыдущих главах, с тем, чтобы лучше уяснить их смысл. Прежде всего я хочу продемонстрировать способ прямого вычисления коэффициентов разложений, полученных нами ранее косвенным путем (существование разложений, о которых идет речь, нами уже доказано). Действительно, коль скоро существование этих разложений установлено, вычисление их коэффициентов можно производить гораздо быстрее, не прибегая к многочисленным заменам переменных, которые были необходимы ранее.

Я начну с рассмотрения частного случая уравнений из п. **134**.

В этом пункте мы показали, что нашим каноническим уравнениям формально можно удовлетворить с помощью методов, аналогичных методам п. **125**, если последние незначительно модифицировать. Положим

$$x_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots,$$
$$y_i = y_i^0 + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots.$$

Здесь x_i^k и y_i^k — периодические функции величин, которые я обозначу w, за исключением функций y_i^0, которые должны быть просто равны w_i; x_i^0 — произвольные постоянные, от которых зависят остальные функции x_i^k и y_i^k, а

$$w_i = n_i t + \varpi_i,$$

где ϖ_i — постоянная интегрирования, а n_i — некоторая константа, зависящая от μ и x_i^0 и допускающая разложение по степеням μ.

Пользуясь методами п. **126**, эти ряды можно записать бесконечно многими способами, причем так, что средние значения периодических функций x_i^k и y_i^k будут наперед заданными произвольными функциями от x_i^0.

Прежде чем приступать к преобразованию этих рядов с помощью методов п. **126**, заметим, что выражение $\Sigma x_i dy_i$ (рассматриваемое как функция от w_i, в то время как x_i^0 по-прежнему считаются постоянными) должно быть полным дифференциалом.

Пусть, кроме того,

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots .$$

Предположим, что имеется $2n$ попарно сопряженных переменных. Пусть имеется два рода переменных, относящихся к первому ряду. Переменные первого рода мы будем обозначать x_i, а переменные второго рода x_i'.

Переменные второго ряда, сопряженные с x_i, будем обозначать y_i, а сопряженные с x_i' будем обозначать y_i'. Наши канонические уравнения запишутся в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dx_i'}{dt} = \frac{dF}{dy_i'}, \tag{1}$$
$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}, \qquad \frac{dy_i'}{dt} = -\frac{dF}{dx_i'}.$$

Я предполагаю, что F_0 зависит от x_i, но не зависит от y_i, y_i' и x_i'; функция F периодическая по y_i и y_i'; если обозначить среднее значение F_1 через R (F_1 *пока рассматривается как периодическая функция только от* y_i, *но не от* y_i'), то R не зависит от y_i', а только от x_i и x_i'. Это в точности те же предположения, что и в п. **134**.

Мы видели, что уравнениям (1) можно формально удовлетворить рядами следующего вида:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots, \\ x_i' &= x_i'^0 + \mu x_i'^1 + \mu^2 x_i'^2 + \ldots, \\ y_i &= w_i + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots, \\ y_i' &= w_i' + \mu y_i'^1 + \mu^2 y_i'^2 + \ldots . \end{aligned} \tag{2}$$

Величины x_i^k, $x_i'^k$, y_i^k, $y_i'^k$ представляют собой периодические функции от w_i и w_i', зависящие, кроме того, от постоянных x_i^0 и $x_i'^0$, и такие, что *их средние значения могут быть произвольно заданными функциями этих констант*, что можно было бы усмотреть с помощью рассуждения, аналогичного приводимому в п. **126**. Кроме того,

$$w_i = n_i t + \varpi_i, \qquad w_i' = n_i' t + \varpi_i',$$

где ϖ_i и ϖ_i' — постоянные интегрирования, а n_i и n_i' разлагаются по степеням μ, так что

$$n_i = \sum \mu^k n_i^k, \qquad n_i' = \sum \mu^k n_i'^k,$$

причем

$$n_i^0 \neq 0, \qquad n_i'^0 = 0.$$

Возможность аналогичных разложений была установлена в п. **134.** Теперь же я намереваюсь развить прямой метод вычисления коэффициентов.

Для этого я предположу, что мы уже подставили в уравнения (1) разложения (2) и что, следовательно, наши переменные не зависят от времени непосредственно, а лишь через w_i и w_i'. Уравнения (1) запишутся тогда в виде

$$\sum_k n_k \frac{dx_i}{dw_k} + \sum_k n_k' \frac{dx_i}{dw_k'} = \frac{dF}{dy_i}, \tag{3}$$

. . . . . .

Кроме того, после подстановки разложений (2) получим уравнения

$$\frac{dF}{dy_i} = \sum \mu^k X_i^k, \quad -\frac{dF}{dx_i} = \sum \mu^k Y_i^k,$$

аналогичные уравнениям (9) и (10) п. **127**, а также

$$\frac{dF}{dy_i'} = \sum \mu^k X_i'^k, \quad -\frac{dF}{dx_i'} = \sum \mu^k Y_i'^k.$$

Величины X_i, Y_i, $X_i'^k$, $Y_i'^k$ зависят от w_i, x_i^k, y_i^k, x_i^0, а также от величин которые обозначены теми же буквами, но со штрихами. Они периодически зависят от w и w'.

Рассмотрим так же, как и в п. **127**, от каких переменных зависят все эти величины. Поскольку

$$\frac{dF_0}{dy_i} = \frac{dF_0}{dx_i'} = \frac{dF_0}{dy_i'} = 0,$$

ясно, что $X_i^k, X_i'^k$, $Y_i'^k$ зависят только от

$$x_i^0, x_i^1, \ldots, x_i^{k-1},$$
$$y_i^0, y_i^1, \ldots, y_i^{k-1}$$

и от величин, обозначаемых теми же буквами, но со штрихами, в то время как Y_i^k зависят, кроме того, от x_i^k, но не зависят от $x_i'^k$, y_i^k, $y_i'^k$.

Рассмотрим выражение

$$\sum_k n_k \frac{dx_i}{dw_k'}.$$

Подставим в него вместо x_i разложения (2), а вместо n_k — их разложения по степеням μ. После этих подстановок получим разложение по степеням μ. Чтобы воспользоваться обозначениями, аналогичными обозначениям

п. 127, я запишу получившееся разложение в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sum n_k \frac{dx_i}{dw_k} &= \sum{}' \mu^p n_k^0 \frac{dx_i^p}{dw_k} + \sum \mu^p n_k^p \frac{dx_i^0}{dw_k} - \sum \mu^p Z_i^p,\\ \sum n_k \frac{dy_i}{dw_k} &= \sum{}' \mu^p n_k^0 \frac{dy_i^p}{dw_k} + \sum \mu^p n_k^p \frac{dy_i^0}{dw_k} - \sum \mu^p T_i^p.\end{aligned} \tag{4}$$

Условимся считать, что знак Σ означает суммирование по всем значениям k и всем значениям p от 0 до бесконечности, а знак Σ' — суммирование по всем k и p от 1 до бесконечности.

Следует помнить, что $y_i^0 = w_i$, $y_i'^0 = w_i'$ и что к уравнениям (4) надлежит присоединить еще два других уравнения того же вида, в которых вместо символов x_i, y_i, x_i^p, y_i^p, x_i^0, y_i^p, Z_i^p и T_i^p фигурируют те же символы, но со штрихами.

Точно так же мы запишем

$$\sum_k n_k' \frac{dx_i}{dw_k'} = \sum{}' \mu^p n_k'^1 \frac{dx_i^{p-1}}{dw_k'} + \sum \mu^p n_k'^p \frac{dx_i^0}{dw_k'} - \sum \mu^p U_i^p. \tag{5}$$

Условимся, что здесь суммирование, обозначаемое символом Σ, распространяется по всем значениям p от 1 до бесконечности, а суммирование, обозначаемое символом Σ', производится по всем значениям p от 2 до бесконечности. К уравнению (5) присоединим еще три других уравнения, в которых вместо

$$x_i,\ x_i^{p-1},\ x_i^0,\ U_i^p$$

фигурируют соответственно

$$y_i,\ y_i^{p-1},\ y_i^0,\ V_i^p,$$

либо

$$x_i',\ x_i'^{p-1},\ x_i'^0,\ U_i'^p,$$

либо

$$y_i',\ y_i'^{p-1},\ y_i'^0,\ V_i'^p.$$

Мы получим цепочку уравнений, аналогичных уравнениям (14) п. 127, которые, если учесть, что x_i^0 и $x_i'^0$ константы, а y_i^0 и $y_i'^0$ равны w_i и w_i', запишутся в виде

$$\begin{aligned}\sum_k n_k^0 \frac{dx_i^p}{dw_k} + \sum_k n_k'^1 \frac{dx_i^{p-1}}{dw_k'} &= X_i^p + Z_i^p + U_i^p,\\ \sum_k n_k^0 \frac{dy_i^p}{dw_k} + \sum_k n_k'^1 \frac{dy_i^{p-1}}{dw_k'} &= Y_i^p + T_i^p + V_i^p - n_i^p,\end{aligned}$$

$$\sum_k n_k^0 \frac{dx_i'^p}{dw_k} + \sum_k n_k'' \frac{dx_i'^{p-1}}{dw_k'} = X_i'^p + Z_i'^p + U_i'^p, \tag{6}$$

$$\sum_k n_k^0 \frac{dy_i'^p}{dw_k} + \sum_k n_k'' \frac{dy_i'^{p-1}}{dw_k'} = Y_i'^p + T_i'^p + V_i'^p - n_i'^p.$$

При $p = 0$ левая часть каждого из уравнений (6) должна обращаться в нуль; кроме того, второе слагаемое в левой части должно обращаться в нуль при $p = 1$. Чтобы понять, почему так происходит, достаточно вспомнить смысл, который мы придали символам Σ и Σ' в уравнениях (4) и (5).

Пусть теперь U — произвольная периодическая функция от w_i и w_i'. Условимся обозначать символом $[U]$ среднее значение функции U, *рассматриваемой временно как периодическая функция только от* w_i. Из этого определения следует

$$\left[\frac{dU}{dw_i}\right] = 0, \qquad \left[\frac{dU}{dw_i'}\right] = \frac{d[U]}{dw_i'}.$$

Символом $[[U]]$ мы будем обозначать среднее значение U, рассматриваемой как периодическая функция от w_i и w_i' *одновременно*. Это среднее значение представляет собой константу, не зависящую от w и w', в то время как $[U]$, не зависящее от w, все еще остается периодической функцией, от w'. Переходя после этого в уравнениях (6) к средним значениям, получим

$$\sum n_k'' \frac{d[x_i^{p-1}]}{dw_k'} = [X_i^p + Z_i^p + U_i^p],$$

$$\sum n_k'' \frac{d[y_i^{p-1}]}{dw_k'} = [Y_i^p + T_i^p + V_i^p] - n_i^p,$$

$$\sum n_k'' \frac{d[x_i'^{p-1}]}{dw_k'} = [X_i'^p + Z_i'^p + U_i'^p], \tag{7}$$

$$\sum n_k'' \frac{d[y_i'^{p-1}]}{dw_k'} = [Y_i'^p + T_i'^p + V_i'^p] - n_i'^p.$$

При $p = 1$ правые части этих уравнений должны обращаться в нуль.

Посмотрим, каким образом можно исходя из уравнений (6) и (7) вычислить коэффициенты разложений (2).

Сначала в уравнениях (6) положим $p = 0$. Тогда (поскольку величины

$$Z_i^0, U_i^0, \ldots$$

равны нулю, а левые части уравнений (6), как я уже говорил выше, должны быть равны нулю)

$$0 = 0, \qquad Y_i^0 = n_i^0, \qquad Y_i'^0 = n_i'^0.$$

Из этих уравнений мы получим значения n_i^0, которые, впрочем, нам известны, и установим, что $n_i'^0$ равны нулю, поскольку $Y_i'^0$ равны нулю.

Рассмотрим теперь уравнения (7), в которых положим $p = 1$. Приняв во внимание, что Z_i', U_i',... равны нулю, получим

$$\begin{aligned} &[X_i^1] = [X_i'^1] = 0, \\ &[Y_i^1] = n_i^1, \quad [Y_i'^1] = n_i'^1. \end{aligned} \tag{8}$$

Чтобы понять, что означают эти уравнения, следует рассмотреть вопрос о том, что означают величины $[X_i^1]$,... . Чтобы найти X_i^1, $X_i'^1$ и $Y_i'^1$, необходимо в производных

$$\frac{dF_1}{dy_i}, \quad \frac{dF_1}{dy_i'}, \quad -\frac{dF_1}{dx_i'}$$

заменить x_i, x_i', y_i и y_i' на x_i^0, $x_i'^0$, w_i, w_i'.

Пусть F_1^* означает результат указанной подстановки в F_1. Тогда

$$X_i^1 = \frac{dF_1^*}{dw_i}, \qquad X_i'^1 = \frac{dF_1^*}{dw_i'}, \qquad Y_i'^1 = -\frac{dF_1^*}{dx_i'^0},$$

$$[F_1^*] = R^*,$$

где R^* означает результат той же подстановки в функцию R.

Поэтому

$$[X_i^1] = \frac{dR^*}{dw_i} = 0, \qquad [X_i'^1] = \frac{dR^*}{dw_i'},$$

$$[Y_i'^1] = -\frac{dR^*}{dx_i'^0}.$$

В силу сделанных нами предположений функция R не зависит от y и y', следовательно, R^* не зависит от w и w'.

Итак, $[X_i^1]$ и $[X_i'^1]$ равны нулю, а $[Y_i']$ зависит лишь от x_i^0 и $x'^0{}_i$, и, следовательно, является константой.

Итак, из четырех уравнений (8) первые два удовлетворяются автоматически. Четвертое же из этих уравнений позволяет найти $n_i'^1$, поскольку его левая часть представляет собой константу.

Далее мы получаем

$$Y_i^1 = -\sum_k \frac{d^2F_0^*}{dx_i^0\,dx_k^0}\,x_k^1 - \frac{dF_1^*}{dx_i^0}$$

(напомним, что F_0^* означает результат подстановки x_i^0 вместо x_i в F_0), откуда

$$n_i^1 = -\sum_k \frac{d^2F_0^*}{dx_i^0\,dx_k^0}\,[x_k^1] - \frac{dR^*}{dx_i^0}. \tag{9}$$

Величины n_i^1 должны быть константами, то же относится и к производным dR^*/dx_i^0. Следовательно, $[x_k^1]$ также константы.

Действительно, чтобы получить x_k^1, необходимо произвести в dS_1/dy_k (п. 134) замену y и y' на w и w'. Если же произвести такую подстановку в S_1 (что приведет к тому же результату), то

$$x_k^1 = \frac{dS_1}{dw_k}.$$

Но

$$S_1 = \sum_k \alpha_{1,k} y_k + S_1',$$

где функция S'_1 периодическая по y, y', а $\alpha_{1,k}$ — константы. Поэтому

$$x_k^1 = \alpha_{1,k} + \frac{dS_1'}{dw_k},$$

откуда

$$[x_k^1] = \alpha_{1,k},$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим левые части уравнений (7) и положим в них $p = 2$. Если $[x_i^1]$ — константы, то

$$[X_i^2 + Z_i^2 + U_i^2] = 0.$$

Из определений следует, что

$$[Z_i^2] = 0, \qquad U_i^2 = 0.$$

Поэтому

$$[X_i^2] = 0.$$

К этому выводу, который мы получили исходя из возможности разложений, доказанной в предыдущих главах, можно прийти и непосредственно.

В самом деле,

$$X_i^2 = \sum \frac{d^2F_1}{dw_i dw_k} y_k^1 + \sum \frac{d^2F_1}{dw_i dw_k'} y_k'^1 + \sum \frac{d^2F_1}{dw_i dx_k^0} x_k^1 + \\ + \sum \frac{d^2F_1}{dw_i dx_k'^0} x_k'^1 + \frac{dF_2}{dw_i}. \tag{10}$$

Разумеется, я предполагаю, что в F_1 и F_2 переменные y_i, x_i,... заменены на w_i, x_i^0,... .

Ясно, что среднее значение производной dF_2/dw_i равно нулю. Следовательно, мне осталось еще показать, что алгебраическая сумма средних значений четырех первых слагаемых в правой части уравнения (10) равна нулю.

Предположим, что выражения

$$\frac{d^2F_1}{dw_i dw_k}, \quad y_k^1, \quad \frac{d^2F_1}{dw_i dw_i'}, \quad y_k'^1, \ \ldots$$

разложены в тригонометрические ряды по синусам и косинусам дуг, кратных w_i. Тогда X_i^2 окажется разложенным в некоторый ряд того же вида и речь будет идти о вычислении тех членов этого ряда, которые не зависят от w_i.

Для этого достаточно вычислить члены, не зависящие от w_i, в произведении

$$\frac{d^2F_1}{dw_i dw_k} y_k^1$$

и во всех других аналогичных произведениях.

Члены этого произведения, равные константе, получают, рассматривая член производной

$$\frac{d^2F_1}{dw_i dw_k},$$

зависящий от

$$\cos(m_1 w_1 + m_2 w_2 + \ldots + m_q w_q)$$

(если предположить, что число переменных w равно q) или от

$$\sin(m_1 w_1 + m_2 w_2 + \ldots + m_q w_q),$$

и член разложения y_k^1, зависящий от *такого же* косинуса или такого же синуса.

Заметим прежде всего, что случай

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_q = 0$$

не доставит нам особого беспокойства.

В самом деле,

$$\frac{d^2F_1}{dw_i dw_k}$$

представляет собой производную по w_i от некоторой периодической по w функции и не может содержать членов, не зависящих от w. Это обстоятельство отнюдь не маловажно. Действительно, из него следует, что нам не нужно вычислять

$$[y_k^1],\ [x_k^1],\ \ldots.$$

(Уравнения (6) позволяют найти y_k^1, x_k^1,... с точностью до произвольной функции от w, но не дают возможности найти средние значения этих функций. К счастью, как мы только что видели, эти средние значения не понадобятся.)

Итак, пусть

$$m_1, m_2, \ldots, m_q$$

— некоторый набор целых чисел (положительных или отрицательных), из которых не все равны нулю. Введем обозначение

$$m_1w_1 + m_2w_2 + \ldots + m_qw_q = h.$$

В двух сомножителях, из которых состоит каждое слагаемое правой части уравнения (10), отыщем члены, содержащие $\cos h$ и $\sin h$. Именно они, как мы видели, и дадут те члены в разложении X_i^2, которые не зависят от w.

Итак, пусть

$$A\cos h + B\sin h$$

— члены в разложении F_1, зависящие от h. Очевидно, что A и B есть функции от x_i^0, $x_i'^0$ и w_i'.

Соответствующими членами будут

$$\text{в } \frac{d^2F_1}{dw_i dw_k}: \quad -m_i m_k (Ac + Bs),$$

$$\text{в } \frac{d^2F_1}{dw_i dw_k}: \quad m_i\left(-\frac{dA}{dw_k'}s + \frac{dB}{dw_k'}c\right),$$

$$\text{в } \frac{d^2F_1}{dw_i dx_k^0}: \quad m_i\left(-\frac{dA}{dx_k^0}s + \frac{dB}{dx_k^0}c\right),$$

$$\text{в } \frac{d^2F_1}{dw_i dx_k'^0}: \quad m_i\left(-\frac{dA}{dx_k'^0}s + \frac{dB}{dx_k'^0}c\right)$$

(символами s и c мы для краткости обозначили $\sin h$ и $\cos h$).

Положим теперь в уравнениях (6) $p = 1$. Тогда

$$\sum n_k^0 \frac{dx_i^1}{dw_k} = + \frac{dF_1}{dw_i},$$

$$\sum n_k^0 \frac{dy_i^1}{dw_k} = - \frac{dF_1}{dx_i}.$$

Кроме того, у нас имеются еще и другие уравнения, в которых x_i^1, y_i^1, w_i (но не w_k) и x_i^0 заменены теми же символами, но со штрихами.

Следовательно, если обозначить

$$m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 + \cdots + m_q n_q^0 = \frac{1}{M},$$

то члены, содержащие $\sin h$ и $\cos h$, примут вид

$$\text{в } y_k^1: \quad - M\left(\frac{dA}{dx_k^0} s - \frac{dB}{dx_k^0} c\right),$$

$$\text{в } y_k'^1: \quad - M\left(\frac{dA}{dx_k'^0} s - \frac{dB}{dx_k'^0} c\right),$$

$$\text{в } x_k^1: \quad + M m_k (Ac + Bs),$$

$$\text{в } x_k'^1: \quad + M\left(\frac{dA}{dw_k'} s - \frac{dB}{dw_k'} c\right).$$

Если подставить их в правую часть уравнения (10), средние значения этих членов обратятся в нуль. Следовательно, как мы уже видели ранее,

$$[X_i^2] = 0.$$

Зная это и полагая в уравнениях (6) $p = 1$, можно без труда вычислить

$$y_i^1, \; x_i^1, \; y_i'^1, \; x_i'^1$$

с точностью до произвольной функции от w'.

Итак, нам известны n_i^0, n_i^1, $n_i'^1$ и

$$y_i^1 - [y_i^1], \qquad x_i^1 - [x_i^1], \qquad y_i'^1 - [y_i'^1], \qquad x_i'^1 - [x_i'^1].$$

Кроме того, мы знаем, что x_i^1 — константа, т. е. представляет собой некоторую функцию от x_i^0 и $x_i'^0$. В силу сделанного ранее замечания, аналогичного приведенному в конце п. **126**, известно, что эту функцию можно выбирать произвольным образом. Итак, x_i^1 можно считать полностью известной.

Затем находим

$$[x_i'^1] \quad \text{и} \quad [y_i'^1].$$

Для этого используем уравнения (7), положив в них $p = 2$.

Эти уравнения, если учесть, что

$$[Z_i'^2] = [U_i'^2[= [T_i'^2] = [V_i'^2] = 0,$$

можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum n_k'^1 \frac{d[x_i'^1]}{dw_k'} &= [X_i'^2], \\ \sum n_k'^1 \frac{d[y_i'^1]}{dw_k'} &= [Y_i'^2] - n_i'^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Выражение для X_i^2 мы нашли раньше [уравнение (10)]. Для того чтобы получить из него выражение для $X_i'^2$, достаточно заменить w_i на w_i', а для того чтобы получить $Y_i'^2$, достаточно заменить w_i на $x_i'^0$.

Таким образом, в $[X_i'^2]$ будут, например, члены следующего вида:

$$\left[\frac{d^2F_1}{dw_i' dw_k} y_k^1\right], \quad \left[\frac{d^2F_1}{dw_i' dx_k^0} x_k^1\right], \ \ldots \tag{12}$$

Мы найдем

$$\left[\frac{d^2F_1}{dw_i' dw_k} y_k^1\right] = \left[\frac{d^2F_1}{dw_i' dw_k}(y_k^1 - [y_k^1])\right] + \frac{d^2R^*}{dw_i' dw_k}[y_k^1];$$

$$\left[\frac{d^2F_1}{dw_i dx_k^0} x_k^1\right] = \left[\frac{d^2F_1}{dw_i' dx_k^0}(x_k^1 - [x_k^1])\right] + \frac{d^2R^*}{dw_i' dx_k^0}[x_k^1].$$

Но по предположению R зависит лишь от x_i и x_i'. Следовательно, производные от R^* по w_i' равны нулю. Отсюда приходим к следующему выводу.

Члены (12), входящие в правую часть первого из уравнений (11), зависят лишь от величин

$$y_k^1 - [y_k^1], \quad x_k^1 - [x_k^1], \ \ldots,$$

которые известны, и не зависят от величин $[y_k^1]$, $[x_k^1]$,..., которые неизвестны. Таким образом, $[X_i'^2]$ представляет собой некоторую *известную* функцию от w'. Следовательно, зная эту функцию, мы можем получить значение величины $[x_i'^1]$ при условии, однако, что

$$[[X_i'^2]] = 0.$$

Это условие должно выполняться автоматически, поскольку мы заранее знаем, что рассматриваемое разложение возможно.

По той же самой причине $[Y_i'^2]$ также представляет собой известную функцию. В самом деле, теперь уже известны $[x_k^1]$, $[x_k'^1]$, но еще не известны ни $[y_k^1]$, ни $[y_k'^1]$. Но члены разложения $[Y_k'^2]$, зависящие от $[y_k^1]$ и $[y_k'^1]$, можно записать в виде

$$-\sum \frac{d^2R^*}{dx_i'^0\, dw_k}[y_k^1] - \sum \frac{d^2R^*}{dx_i'^0\, dw_k'}[y_k'^1],$$

а поскольку R^* не зависит ни от w, ни от w', эти члены равны нулю и второе из уравнений (11), присоединенное к уравнению

$$[[Y_i'^2]] = n_i'^2,$$

позволяет получить $n_i'^2$ и $[y_i'^1]$.

Найдя таким образом $[x_i'^1]$ и $[y_i'^1]$ из (7,3,2) и (7,4,2), что служит обозначением третьего и четвертого из уравнений (7), в которых положено $p = 2$, перейдем к отысканию $[x_i^2]$.

Проще всего воспользоваться тем, что выражение

$$\sum x_i dy_i + \sum x_i' dy_i'$$

должно быть полным дифференциалом.

Если в это выражение подставить вместо x_i, y_i,..., соответствующие разложения (2), то коэффициент при любой степени μ должен быть полным дифференциалом. Следовательно, выражения

$$\begin{aligned}
&\sum{}' x_i^0 dw_i,\\
&\sum{}' (x_i^1 dw_i + x_i^0 dy_i^1),\\
&\sum{}' (x_i^2 dw_i + x_i^1 dy_i^1 + x_i^0 dy_i^2),\\
&\sum{}' (x_i^3 dw_i + x_i^2 dy_i^1 + x_i^1 dy_i^2 + x_i^0 dy_i^3),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

должны быть полными дифференциалами. Знак Σ' следует понимать в том смысле, что суммирование должно проводиться по всем индексам i и, кроме того, по всем штрихованным переменным.

Например, если имеется q переменных y_i без штрихов и λ переменных y_i' со штрихами, то

$$\sum{}' x_i^0 dw_i = x_1^0 dw_1 + x_2^0 dw_2 + \cdots + x_q^0 dw_q + x_1'^0 dw_1' + x_2'^0 dw_2' + \cdots + x_\lambda'^0 dw_\lambda'.$$

С другой стороны, так как x_i^0 и $x_i'^0$ — константы, выражение

$$\sum' x_i^0 dy_i^k$$

всегда представляет собой полный дифференциал, так что мы можем записать

$$\begin{aligned}
&\sum' x_i' dw_i = d\varphi_1,\\
&\sum' (x_i^2 dw_i + x_i^1 dy_i^1) = d\varphi_2,\\
&\sum' (x_i^3 dw_i + x_i^2 dy_i^1 + x_i^1 dy_i^2) = d\varphi_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{13}$$

Кроме того, φ_1, φ_2, φ_3,... должны быть такими функциями от w и w', чтобы их производные были периодическими.

Посмотрим, как можно получить $[x_i^2]$ из уравнения

$$\sum' x_i^2 dw_i + \sum' x_i^1 dy_i^1 = d\varphi_2.$$

Имеем

$$x_k^2 + \sum' x_i^1 \frac{dy_i^1}{dw_k} = \frac{d\varphi_2}{dw_k}.$$

Но поскольку производные от функции φ_2 должны быть периодичны,

$$\left[\frac{d\varphi_2}{dw_k}\right] = \text{const}$$

и

$$[x_k^2] + \sum \left[x_i^1 \frac{dy_i^1}{dw_k} \right] + \sum \left[x_i'^1 \frac{\partial y_i'^1}{dw_k} \right] = \text{const}. \tag{14}$$

В уравнении (14) все члены, за исключением $[x_k^2]$, известны. Действительно, мы знаем x_i^1, $x_i'^1$, $y_i'^1$ и, точно так же, dy_i^1/dw_k, ибо нам известна разность $y_i^1 - [y_i^1]$. Что же касается постоянной, стоящей в правой части уравнения (14), то сделанное выше замечание показывает, что ее можно выбирать произвольно.

Итак, мы в состоянии вычислить $[x_k^2]$.

Вычислим теперь $[y_i^1]$ с помощью уравнения (7,2,2)*. Это уравнение можно записать в виде

$$\sum n_k'^1 \frac{\partial [y_i^1]}{dw_k'} = [Y_i^2] - n_i^2, \tag{15}$$

откуда, приравнивая средние значения относительно w', найдем

$$[[Y_i^2]] = n_i^2. \tag{16}$$

* См. соглашение, введенное на стр. 438. (*Прим. ред.*).

Но Y_i^2 зависит лишь от $x_i^1, y_i^1, x_i'^1, y_i'^1$ и x_i^2. Величины $x_i^1, x_i'^1$ и $y_i'^1$ полностью известны. Что же касается $y^1{}_i$ и $x^2{}_i$, то мы знаем лишь $y_i^1 - [y_i^1]$ и $[x_i^2]$. Рассмотрим, каким образом Y_i^2 зависит от x_i^2 и y_i^1. Эта функция имеет вид

$$Y_i^2 = -\sum \frac{d^2F_0}{dx_i^0 dx_k^0}\, x_k^0 - \sum \frac{d^2F_1}{dx_i^0 dw_k}\, y_k^1 + A,$$

где A полностью известно.

Отсюда

$$[Y_i^2] = -\sum \frac{d^2F_0}{dx_i^0 dx_k^0}\, [x_k^2[- \sum\left[\frac{d^2F_1}{dx_i^1 dw_k}\,(y_k^1 - [y_k^1])\right] - \sum \frac{d^2R^*}{dx_i^0 dw_k}\, [y_k^1] + [A].$$

Поскольку R^* не зависит от w, а производные $d^2R^*/dx_i^0 dw_k$ равны нулю, $[Y_i^2]$ полностью известно и мы получаем возможность найти n_i^2 и $[y_i^1]$ из уравнений (16) и (15).

Затем последовательно найдем $x_i^2 - [x_i^2]$ из уравнений (6,1,2), $x_i'^2 - [x_i'^2]$ — из уравнений (6,3,2), $y_i'^2 - [y_i'^2]$ — из уравнений (6,4,2), $y_i^2 - [y_i^2]$ — из уравнений (6,2,2), $[x_i'^2]$ — из уравнений (7,3,3), $[y_i'^2]$ и $n_i'^3$ — из уравнений (7,4,3), $[x_i^3]$ — из уравнения (14,3), т. е. из уравнения, которое таким же образом выводится из третьего уравнения, входящего в систему (13), как уравнение (14) было выведено несколько раньше из второго уравнения, входящего в систему (13), $[y_i^2]$ и n_i^3 — из (7,2,3), затем $x_i^3 - [x_i^3]$, $x_i'^3 - [x_i'^3]$, $y_i'^3 - [y_i'^3]$, $y_i^3 - [y_i^3]$, $[x_i'^3]$, $[y_i'^3]$ и $n_i'^4$, $[x_i^4]$, $[y_i^4]$ и т. д.

Если придерживаться этого порядка в вычислениях, то их можно продолжать неограниченно, ибо с каждым новым уравнением добавляется лишь одно новое неизвестное.

Напомню, что средние значения

$$[[x_i^k]],\ [[y_i^k]],\ [[x_i'^k]],\ [[y_i'^k]]$$

можно выбирать в виде произвольных функций от x_i^0 и $x_i'^0$.

Для того чтобы интегрирование указанных уравнений было возможно, должны выполняться определенные условия. Однако мы знаем, что эти условия выполняются (хотя доказать это непосредственно, несомненно, нелегко), ибо нам заранее известно, что соответствующее разложение возможно.

Применение к задаче трех тел

152. В главе XI мы видели, каким образом применяют к задаче трех тел принципы, изложенные в п. 134. Очевидно, что и результаты предыдущего пункта, непосредственно вытекающие из этих принципов, равным образом оказываются применимыми к задаче трех тел. В главе XI мы

использовали последовательно следующие переменные:

$$\Lambda,\ \Lambda',\ \sigma_i,\qquad \lambda_1,\ \lambda_1',\ \tau_i, \tag{1}$$

$$\Lambda,\ \Lambda',\ \rho_i,\qquad \lambda_1,\ \lambda_1',\ \omega_i, \tag{2}$$

$$\Lambda,\ \Lambda',\ V_i,\qquad \lambda_2,\ \lambda_2',\ \nu_i. \tag{3}$$

В переменных (3) уравнения движения принимают тот же вид, что и уравнения п. **134** и предыдущего пункта.

Однако замена переменных, позволяющая перейти от переменных (2) к переменным (3), достаточно утомительна. Чаще всего эксцентриситеты достаточно малы и эту трудность удается обойти с помощью того искусственного приема, который я указал в конце п. **140.** Напомню, в чем состоит этот прием. Члены μF_1 в разложении F, зависящие от тех степеней эксцентриситетов и наклонений, показатель которых больше трех, весьма малы. Если обозначить

$$\mu F_1 = \mu F_1' + \mu^2 F_2',$$

где $\mu F_1'$ означает совокупность членов порядка не больше 3, а $\mu^2 F_2'$ — членов порядка 4 и выше, то $\mu^2 F_2'$ будет очень мала, а F_2' будет конечна. В силу этого я могу записать

$$F = F_0 + \mu F_1' + \mu^2 (F_2' + F_2) + \mu^3 F_3 + \cdots$$

и, таким образом, функция F оказывается разложенной по степеням μ. Если рассматривать F_1' как периодическую функцию от λ_1 и λ_1', то ее среднее значение не будет зависеть от ω_i, так что условия п. **134** будут выполняться и в переменных (2).

Правда, параметр μ, возникающий при таком подходе, будет иметь несколько иной смысл, чем обычно, но это обстоятельство не очень важно, ибо цель введения этого параметра заключается лишь в том, чтобы выявить порядок величины различных членов.

Коль скоро мы условились о таком понимании параметра μ, результаты предыдущего пункта оказываются непосредственно применимыми к рассматриваемой нами задаче. Однако для того чтобы избежать тех трудностей, о которых говорилось в главе XII, я вместо переменных (2) буду придерживаться переменных (1), что приведет к некоторым изменениям в этих результатах. Я особо подчеркиваю необходимость этих изменений. Для большей симметрии обозначений я буду на протяжении оставшейся части этой главы писать λ и λ' вместо λ_1 и λ_1', F_1 вместо F_1', F_2 вместо $F_2' + F_2$. Ясно, что это не может привести ни к каким недоразумениям.

Мы знаем, что переменные (2) допускают формальные разложения по возрастающим степеням μ следующего вида:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum \mu^k \Lambda_k, & \Lambda' &= \sum \mu^k \Lambda_k', \\ \lambda &= \sum \mu^k \lambda_k, & \lambda' &= \sum \mu^k \lambda_k', \\ \rho_i &= \sum \mu^k \rho_i^k, & \omega_i &= \sum \mu^k \omega_i^k. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь Λ_k, Λ_k', λ_k, λ_k', ρ_i^k, ω_i^k — периодические функции от w и w', за исключением случая $k = 0$; Λ_0, Λ_0' и ρ_i^0 — константы; λ_0 и λ_0' равны w_1 и w_2, а величина ω_i^0 равна w_i'.

Выбрав переменные (1), мы аналогичным образом получим

$$\sigma_i = \sum \mu^k \sigma_i^k, \qquad \tau_i = \sum \mu^k \tau_i^k, \tag{4}$$

где σ_i^k и τ_i^k — периодические функции от w и w'. Если для краткости обозначить константу $\sqrt{2\rho_i^0}$ символом $x_i'^0$, то

$$\begin{aligned} \sigma_i^0 &= \sqrt{2\rho_i^0}\cos\omega_i^0 = x_i'^0 \cos w_i', \\ \tau_i^0 &= \sqrt{2\rho_i^0}\sin\omega_i^0 = x_i'^0 \sin w_i' \ [^{46}]. \end{aligned}$$

Добавлю еще, что выражение

$$\Lambda d\lambda + \Lambda' d\lambda' + \Sigma \rho_i d\omega_i$$

должно быть полным дифференциалом. Отсюда следует, что полным дифференциалом должно также быть и выражение

$$\Lambda d\lambda + \Lambda' d\lambda' + \Sigma \sigma_i d\tau_i,$$

ибо

$$\sum \sigma_i d\tau_i = \sum \rho_i d\omega_i + \frac{1}{2} \sum d(\sigma_i \tau_i).$$

Если мы придадим переменным w_i, w_i', n_i, n_i',... тот же смысл, что и в предыдущем пункте, то уравнения запишутся в виде

$$\sum n_k \frac{d\Lambda}{dw_k} + \sum n_k' \frac{d\Lambda}{dw_k'} = \frac{dF}{d\lambda}. \tag{5}$$

Эти уравнения аналогичные уравнениям (3) из предыдущего пункта точно так же, как разложения (4) аналогичны разложениям (2) того же пункта.

Разумеется, к уравнениям (5) следует еще присоединить и другие уравнения, в которых вместо Λ и λ фигурируют соответственно Λ' и λ', λ и $-\Lambda$, λ' и $-\Lambda'$, σ_i и τ_i, τ_i и $-\sigma_i$. Добавлю, кроме того, что число параметров w равно 2 в задаче трех тел и $n - 1$ в задаче n тел, тогда как число

параметров w' в задаче трех тел равно 4, в пространственной задаче n тел равно $2n-2$ и в плоской задаче n тел равно лишь $n-1$.

Подстановка разложений (4) и разложений, полученных для n_i и n_i', в уравнения (5) приводит к тому, что обе части этих уравнений разлагаются по степеням μ, и мы можем записать

$$\frac{dF}{d\lambda}=\sum\mu^p L_p, \qquad \frac{dF}{d\lambda'}=\sum\mu^p L'_p,$$
$$-\frac{dF}{d\Lambda}=\sum\mu^p l_p, \qquad -\frac{dF}{d\Lambda'}=\sum\mu^p l'_p,$$
$$\frac{dF}{d\tau_i}=\sum\mu^p S_i^p, \qquad -\frac{dF}{d\sigma_i}=\sum\mu^p \Theta_i^p.$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям (9) и (10) из п. 127 и другим уравнениям, встречавшимся в предыдущем пункте.

Будем производить вычисления в порядке, указанном в предыдущем пункте, и положим

$$\sum_k n_k \frac{d\Lambda}{dw_k}=\sum{}' \mu^p n_k^0 \frac{d\Lambda_p}{dw_k}+\sum\mu^p n_k^p \frac{d\Lambda_0}{dw_k}-\sum\mu^p Z_p.$$

Знаки Σ и Σ' в этих уравнениях имеют тот же смысл, что и в уравнении (4) предыдущего пункта. Кроме того, к этим уравнениям надлежит присоединить другие уравнения, в которых вместо символов

$$\Lambda,\ \Lambda_p,\ \Lambda_0,\ Z_p$$

фигурируют те же символы, но со штрихами, или же символы

$$\lambda,\ \lambda_p,\ \lambda_0,\ T_p,$$

или же эти символы, но со штрихами, или же

$$\sigma_i,\ \sigma_i^p,\ \sigma_i^0,\ Z_i^p,$$

или же, наконец, символы

$$\tau_i,\ \tau_i^p,\ \tau_i^0,\ T_i^p.$$

Разумеется, не следует смешивать Z_p и Z_i^p, T_p и T_i^p.

Аналогично, положим

$$\sum_k n_k' \frac{d\Lambda}{dw_k'}=\sum{}' \mu^p n_k'^p \frac{d\Lambda_{p-1}}{dw_k'}+\sum\mu^p n_k'^p \frac{d\Lambda_0}{dw_k'}-\sum\mu^p U_p.$$

В этих уравнениях знаки Σ и Σ' имеют такой же смысл, как и в уравнениях (5) предыдущего пункта. К выписанным только что уравнениям следует

присоединить другие уравнения того же вида, в которых буквы

$$\Lambda,\ \Lambda_{p-1},\ \Lambda_0,\ U_p$$

заменены теми же буквами, но со штрихами либо буквами

$$\lambda,\ \lambda_{p-1},\ \lambda_0,\ V_p,$$

либо только что выписанными буквами, но со штрихами, либо

$$\sigma_i,\ \sigma_i^{p-1},\ \sigma_i^0,\ U_i^p,$$

либо

$$\tau_i,\ \tau_i^{p-1},\ \tau_i^0,\ V_i^p.$$

После этого мы можем выписать цепочку уравнений, аналогичных уравнениям (6) предыдущего пункта.

Если для краткости обозначить через u некоторую функцию, такую, что

$$\sum_k n_k^0 \frac{du}{dw_k} = \Delta u,$$

$$\sum_k n_k'^1 \frac{du}{dw_k'} = \Delta' u,$$

то эти уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned}
\Delta\Lambda_p + \Delta'\Lambda_{p-1} &= L_p + Z_p + U_p,\\
\Delta\lambda_p + \Delta'\lambda_{p-1} &= l_p + T_p + V_p - n_1^p,\\
\Delta\sigma_i^p + \Delta'\sigma_i^{p-1} &= S_i^p + Z_i^p + U_i^p + n_i'^p x_i'^0 \sin w_i',\\
\Delta\tau_i^p + \Delta'\tau_i^{p-1} &= \Theta_i^p + T_i^p + V_i^p - n_i'^p x_i'^0 \cos w_i'.
\end{aligned} \tag{6}$$

К двум первым уравнениям системы (6) необходимо присоединить еще два других, которые отличаются от них тем, что все буквы заменены буквами со штрихами, за исключением n_1^p. Вместо n_1^p в этих уравнениях фигурирует n_2^p. Так же, как и в предыдущем пункте, при $p = 0$ левая часть этих уравнений обращается в нуль. При $p = 1$ обращается в нуль второе слагаемое в левой части.

Приравнивая средние по w значения правых и левых частей, получим уравнения, аналогичные уравнениям (7) предыдущего пункта. Они записываются в виде

$$\begin{aligned}
\Delta'[\Lambda_{p-1}] &= [L_p + Z_p + U_p],\\
\Delta'[\lambda_{p-1}] &= [l_p + T_p + V_p] - n_1^p,\\
\Delta'[\sigma_i^{p-1}] &= [S_i^p + Z_i^p + U_i^p] + n_i'^p x_i'^0 \sin w_i,\\
\Delta'[\tau_i^{p-1}] &= [\Theta_i^p + T_i^p + V_i^p] - n_i'^p x_i'^0 \cos w_i'.
\end{aligned} \tag{7}$$

При $p = 0$ и $p = 1$ левая часть должна обращаться в нуль.

Кроме того, мы присоединим к ним уравнения, аналогичные уравнениям (13) и (14) предыдущего пункта.

В самом деле, мы видели, что выражение

$$\Lambda d\lambda + \Lambda' d\lambda' + \Sigma \sigma_i d\tau_i$$

должно быть полным дифференциалом некоторой функции, все производные которой периодические. Следовательно, этими же свойствами будут обладать и выражения

$$\Sigma \Lambda_0 d\lambda_0 + \Sigma \sigma_i^0 d\tau_i^0,$$
$$\Sigma (\Lambda_1 d\lambda_0 + \Lambda_0 d\lambda_1) + \Sigma (\sigma_i^1 d\tau_i^0 + \sigma_i^0 d\tau_i^1),$$
$$\Sigma (\Lambda_2 d\lambda_0 + \Lambda_1 d\lambda_1 + \Lambda_0 d\lambda_2) + \Sigma (\sigma_i^2 d\tau_i^0 + \sigma_i^1 d\tau_i^1 + \sigma_i^0 d\tau_i^2), \ldots.$$

В каждом из этих выражений первая сумма Σ берется для двух планет, так что, например,

$$\Sigma \Lambda_0 d\lambda_0 = \Lambda_0 d\lambda_0 + \Lambda_0' d\lambda_0'.$$

Если мы будем временно рассматривать величины w' как константы, а w как единственные переменные, эти выражения тем более будут полными дифференциалами; но $d\tau_i^0$ и $d\sigma_i^0$ будут нулями, так что и

$$\sigma_i^p d\tau_i^0 \text{ и } \sigma_i^0 d\tau_i^p = d(\sigma_i^0 d\tau_i^p)$$

будут полными дифференциалами. Поскольку $\Lambda_0 d\lambda_p$ также будет полным дифференциалом и $\lambda_0 = w_1$, $\lambda_0' = w_2$, выражения

$$\Lambda_1 dw_1 + \Lambda_1' dw_2,$$
$$\Lambda_2 dw_1 + \Lambda_2' dw_2 + \Sigma \Lambda_1 d\lambda_1 + \Sigma \sigma_i^1 d\tau_i^1,$$
$$\Lambda_3 dw_1 + \Lambda_3' dw_2 + \Sigma (\Lambda_2 d\lambda_1 + \Lambda_1 d\lambda_2) + \Sigma (\sigma_i^2 d\tau_i^1 + \sigma_i^1 d\tau_i^2), \ldots$$

также будут полными дифференциалами функций, производные которых периодичны и, следовательно, таких, что среднее значение их производных по w_1 и w_2 не зависит от w'.

Проводя те же рассуждения, к которым мы прибегали в предыдущем пункте при выводе уравнений (14) из уравнений (13), найдем

$$\begin{aligned}
&[\Lambda_1] = \text{const},\\
&[\Lambda_2] + \sum \left[\Lambda_1 \frac{d\lambda_1}{dw_1}\right] + \sum \left[\sigma_i^1 \frac{d\tau_i^1}{dw_1}\right] = \text{const},\\
&[\Lambda_3] + \sum \left[\Lambda_2 \frac{d\lambda_1}{dw_1} + \Lambda_1 \frac{d\lambda_2}{dw_1}\right] + \sum \left[\sigma_i^2 \frac{d\tau_i^1}{dw_1} + \sigma_i^1 \frac{d\tau_i^2}{dw_1}\right] = \text{const},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{8}$$

Сначала рассмотрим уравнения (6), положив в них $p = 0$. Нетрудно видеть, что эти уравнения выполняются автоматически, поскольку (в силу сделанного нами предположения) Λ_0 и Λ_0' представляют собой константы, величины λ_0 и λ_0' равны w_1 и w_2, величины σ_i^0 и τ_i^0 равны $x_i'^0 \cos w_i'$ и $x_i'^0 \sin w_i'$, $n_i'^0$ равны нулю, а n_i^0 принимают надлежащие значения.

Перейдем теперь к уравнениям (7) и положим в них $p = 1$. Так же, как в уравнениях (8) предыдущего пункта, получим

$$\begin{aligned} [L_1] &= 0, & [l_1] &= n_1^1, \\ [S_i^1] &= -n_i'^1 \tau_i^0, & [\Theta_i^1] &= n_i'^1 \sigma_i^0. \end{aligned} \tag{8bis}$$

Так же, как в предыдущем пункте, установим, что $[L_1]$, $[S_i^1]$ и $[\Theta_i^1]$ являются производными от R по λ, τ_i и $-\sigma_i$. Разумеется, величины Λ, λ, σ_i и τ_i в R следует заменить на Λ_0, λ_0, σ_i^0 и τ_i'. Выражение для R, имеющее вид

$$\Sigma A_i (\sigma_i^2 + \tau_i^2) + B,$$

мы нашли в главе X. Здесь A_i и B зависят от Λ и Λ'.

Точно так же ясно, что уравнения (8 bis), за исключением второго, удовлетворяются автоматически, поскольку

$$n_i'^1 = -2A_i^0.$$

Это равенство имеет место, ибо

$$[L_1] = 0, \quad [S_i^1] = 2A_i^0 \tau_i^0, \qquad [\Theta_i^1] = -2A_i^0 \sigma_i^0$$

(A_i^0 и B_0 представляют собой результат подстановки в A_i и B величины Λ_{i0} вместо Λ).

С другой стороны,

$$[l_1] = -\frac{d^2F}{d\Lambda_0^2}[\Lambda_1] - \frac{d^2F}{d\Lambda_0 d\Lambda_0'}[\Lambda_1'] - \sum \frac{dA_i^0}{d\Lambda_0}(x_i'^0)^2 - \frac{dB_0}{d\Lambda_0};$$

как мы видели выше, $[\Lambda_1]$ и $[\Lambda_1']$ должны быть константами, поэтому $[l_1]$ также должно быть константой, которую мы можем приравнять n_1^1.

Для того чтобы вычисления можно было проводить в том же порядке, что и в предыдущем пункте, необходимо рассмотреть теперь уравнения (6,1,1), (6,3,1), (6,4,1)*.

Левые их части равны

$$\Delta\Lambda_1, \quad \Delta\sigma_i^1, \quad \Delta\tau_i^1,$$

---

* Т. е. 1-е, 3-е и 4-е уравнения (6) при $p = 1$ в соответствии с соглашением стр. 438. Аналогичные обозначения используются ниже. (*Прим. ред.*).

а правые части представляют собой известные функции, периодические по w и w', средние по w значения которых равны нулю вследствие того, что выполняются уравнения (7) ($p = 1$).

Поэтому так же, как в предыдущем пункте и в п. 127, можно проинтегрировать указанные уравнения и найти

$$\Lambda_1 - [\Lambda_1], \qquad \sigma_i^1 - [\sigma_i^1], \qquad \tau_i^1 - [\tau_i^1].$$

Поскольку мы знаем, что среднее значение $[\Lambda_1]$ равно некоторой произвольно выбираемой константе, величину Λ_1 можно считать полностью известной.

Рассмотрим уравнение (6,2,1), левая часть которого равна $\Delta\lambda_1$. Так как правая часть не содержит других неизвестных величин, кроме Λ_1, ее следует считать известной функцией и от w. С помощью метода, которым мы только что пользовались, получим величину

$$\lambda_1 - [\lambda_1].$$

Теперь необходимо найти $[\sigma_i^1]$ и $[\tau_i^1]$ с помощью уравнений (7,3,2) и (7,4,2). Правая часть этих уравнений известна не полностью. В самом деле, она не зависит от $[\lambda_1]$, но зависит от $[\Lambda_1]$, $[\sigma_k^1]$ и $[\tau_k^1]$. Члены, которые зависят от этих величин, можно записать, например, в виде

$$\sum \frac{d^2R^*}{d\tau_i^0 d\Lambda_0}[\Lambda_1] + \sum \frac{d^2R^*}{d\tau_i^0 d\sigma_k^0}[\sigma_k^1] + \sum \frac{d^2R^*}{d\tau_i^0 d\tau_k^0}[\tau_k^1]$$

[для уравнения (7,3,2)].

Первое слагаемое известно, поскольку известно $[\lambda_1]$. Из приведенного выше вида функции R^* видно, что все вторые производные этой функции равны нулю, за исключением производной $d^2R^*/d\tau_i^{0^2}$. Следовательно, два последних слагаемых равны

$$2A_i^0[\tau_i^1] = -n_i'^1[\tau_i^1].$$

Кроме того, в правой части уравнения (7,3,2) имеется член, содержащий $n_i'^2 x_i'^0 \sin w_i'$, а в правой части уравнения (7,4,2) — член, содержащий $n_i'^2 x_i'^0 \cos w_i'$. В эти члены входит неизвестная величина $n_i'^2$.

Таким образом, правая часть уравнения (7,3,2) равна $-n_i'^1[\tau_i^1]$ плюс некоторая известная функция от w' (и от $n_i'^2$). Точно так же правая часть уравнения (7,4,2) представляет собой известную функцию от w' (и от $n_i'^2$). В результате уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned} \Delta'[\sigma_i^1] + n_i'^1[\tau_i^1] &= \varphi_1 + n_i'^2 x_i'^0 \sin w_i', \\ \Delta'[\tau_i^1] - n_i'^1[\sigma_i^1] &= \varphi_2 - n_i'^2 x_i'^0 \cos w_i', \end{aligned} \tag{9}$$

где φ_1 и φ_2 — известные периодические функции от w'. Пусть для краткости

$$h = m_1'w_1' + m_2'w_2' + \cdots + m_q'w_q',$$

где m' — некоторые целые числа, и точно так же, пусть

$$N = m_1'n_1'^1 + m_2'n_2'^1 + \cdots + m_qn_q'^1.$$

Предположим, что

$$A_1 \cos h + B_1 \sin h,$$
$$A_2 \cos h + B_2 \sin h$$

— те члены известных функций φ_1 и φ_2, которые содержат h, а

$$C_1 \cos h + D_1 \sin h,$$
$$C_2 \cos h + D_2 \sin h$$

— аналогичные члены неизвестных функций $[\sigma_i^1]$ и $[\tau_i^1]$. Нам необходимо выразить коэффициенты C и D через коэффициенты A и B.

Приравнивая коэффициенты при $\sin h$ и $\cos h$, получим из уравнений (9)

$$\begin{aligned} ND_1 + n_i'^1C_2 &= A_1, \\ -NC_1 + n_i'^1D_2 &= B_1, \\ ND_2 - n_i'^1C_1 &= A_2, \\ -NC_2 - n_i'^1D_1 &= B_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Уравнения (10) позволяют вычислить неизвестные коэффициенты C и D, если только определитель системы (10) не равен нулю. Но этот определитель равен

$$[N^2 - (n_i'^1)^2]^2.$$

Поэтому он может обращаться в нуль только при условии, что

$$N = \pm n_i'^1,$$

т. е. (поскольку между величинами $n_i'^1$ не существует никакого линейного соотношения с целыми коэффициентами) при условии что

$$h = \pm w_i',$$

либо, что то же (поскольку мы не различаем члены, содержащие h и $-h$

$$h = w_i'.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых членах, содержащих w_i', в правых и левых частях уравнений (9). Для краткости я буду писать h вместо w_i' (и N вместо $n_i'^1$), поскольку предполагается, что $h = w_i'$, и буду по-прежнему обозначать через A_1, B_1,... коэффициенты при $\cos h$ и $\sin h$ в функции φ_1 и т. д. Единственное отличие состоит в том, что уравнения (10) уже не будут иметь тот же вид, что и раньше, поскольку необходимо учитывать члены, содержащие $n_i'^2$, которые входят в правые части уравнений (9). В результате имеем

$$\begin{aligned} N(D_1 + C_2) &= A_1, \\ N(-C_1 + D_2) &= B_1 + n_i'^2 x_i'^0, \\ N(D_2 - C_1) &= A_2 - n_i'^2 x_i'^0, \\ -N(C_2 - D_1) &= B_2. \end{aligned} \tag{10bis}$$

Чтобы эти уравнения были совместны, необходимо, очевидно, чтобы

$$A_1 + B_2 = 0$$

и

$$A_2 - B_1 = 2n_i'^2 x_i'^0. \tag{11}$$

Первое из этих условий должно выполняться автоматически, поскольку мы знаем, что рассматриваемое нами разложение возможно. Из второго условия получаем значение $n_i'^2$.

Если эти условия выполняются, то уравнения (10bis) не являются различными. Эти уравнения позволяют найти C_1 и D_1, если C_2 и D_2 известны. Я утверждаю, что коэффициенты C_2 и D_2 можно выбирать произвольно и докажу это с помощью рассуждения, аналогичного тому, которое проводилось в п. 126. В самом деле, вид рядов не изменится, если приписать к Λ_0, Λ_0', $x_i'^0$, w_i и w' произвольные функции от μ, A_0 и $x_i'^0$, при условии что эти функции делятся на μ. Число таких произвольных функций равно числу переменных; в случае пространственной задачи трех тел оно равно 12. Следовательно, этими функциями можно воспользоваться для того, чтобы удовлетворить 12 условиям. Например, с их помощью можно сделать средние значения Λ, Λ', λ, λ', а также коэффициенты при $\cos w_i'$ и $\sin w_i'$ в четырех функциях τ_i, произвольными функциями от μ и констант Λ_0 и $x_i'^0$. Эти функции должны разлагаться по степеням μ. Если члены такого разложения рассматривать по отдельности, то видно, что коэффициенты при $\cos w_i'$ и $\sin w_i'$ различных функций τ_i^p можно выбирать произвольно. В частности, это относится и к коэффициентам C_2 и D_2.

Таким образом, уравнения (9) позволяют определить $[\sigma_i^1]$ и $[\tau_i^1]$.

Найдем теперь $[\Lambda_2]$. Для этого воспользуемся вторым уравнением (8), где все члены, за исключением $[\Lambda_2]$, известны. Аналогичным образом найдем $[\Lambda_2']$.

Вычислим теперь с помощью уравнения (7,2,2) величину $[\lambda_2]$. Это уравнение (ср. с уравнением (7,2,2) предыдущего пункта и с теми рассуждения-

ми, которые мы проводили, когда воспользовались этим уравнением для нахождения $[y_i^1]$) можно записать в виде

$$\Delta' [\lambda_1] = A - n_1^2,$$

где A — полностью известная периодическая функция от w'. Это уравнение можно проинтегрировать, если приравнять n_1^2 среднему значению периодической функции A так, чтобы среднее значение правой части было равно нулю. Аналогично определяются $]\lambda_1'[$ и n_2^2. Остается определить последовательно при помощи тех же методов

$\Lambda_2 - [\Lambda_2]$ из уравнения (6,1,2),

$\sigma_i^2 - [\sigma_i^2]$ из уравнения (6,3,2),

$\tau_i^2 - [\tau_i^2]$ из уравнения (6,4,2),

$\lambda_2 - [\lambda_2]$ из уравнения (6,2,2),

$[\sigma_i^2]$, $[\tau_i^2]$ и $n_i'^3$ из уравнений (7,3,3) и (7,4,3), $[\Lambda_3]$ из третьего уравнения системы (8), $[\lambda_2]$ и n_i^3 из уравнения (7,2,3) и т. д.

Различные свойства

153. Шесть величин, Λ_p, λ_p, σ_i^p, τ_i^p, n_i^p, $n_i'^p$, найденные в предыдущем пункте, представляют собой функции от Λ_0, w, $x_i'^0$ и w_i', но поскольку

$$\sigma_i^0 = x_i'^0 \cos w_i', \qquad \tau_i^0 = x_i'^0 \sin w_i',$$

мы можем точно так же считать их функциями от Λ_0, w, σ_i^0 и τ_i^0. Я намереваюсь доказать, что *эти функции можно разложить по степеням* σ_i^0 *и* τ_i^0.

Это утверждение допускает иную формулировку, эквивалентность которой с приведенной выше очевидна. Вернемся к переменным Λ_0, w, $x_i'^0$, w_i'. Наши функции Λ_p,... будут периодическими по w и w' и, следовательно, будут разлагаться в тригонометрические ряды. Пусть

$$A \cos h \text{ или } A \sin h$$

— какой-нибудь из членов такого ряда. Я предполагаю, что

$$h = \sum m_k w_k + \sum m_k' w_k',$$

где m_k и m_k' — целые числа, положительные или отрицательные. Коэффициенты A зависят от Λ_0 и $x_i'^0$.

Наше утверждение можно сформулировать следующим образом: A *разлагается по степеням* $x_k'^0$. *Это разложение делится на*

$$(x_i'^0)^{|m_i'|}$$

и все его члены содержат $x_i'^0$ *в четной степени, если* m_i' *четно, или в нечетной степени, если* m_i' *нечетно.*

Для того чтобы доказать это утверждение, я воспользуюсь рассуждением по индукции. В предыдущем пункте мы последовательно нашли функции Λ_p,... из нескольких уравнений, нумерацию которых я сохраняю прежней.

Требуется доказать, что функции, определяемые из этих уравнений, можно разлагать по степеням σ_i^0 и τ_i^0.

Замечу прежде всего, что функцию F можно разлагать по степеням σ_i и τ_i; функции, которые мы обозначили L_p, l_p, S_i^p, Θ_i^p, разлагаются по степеням

$$\left.\begin{array}{l}\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_p, \ldots \\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots \\ \sigma_i^0, \sigma_i^1, \sigma_i^2, \ldots, \sigma_i^p, \ldots \\ \tau_i^0, \tau_i^1, \tau_i^2, \ldots, \tau_i^p.\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{(и по степеням тех же величин,} \\ \text{но со штрихами)}\end{array} \qquad (12)$$

Если припомнить смысл величин Z_p и т. д., то отсюда следует, что правые части уравнений (6) будут разлагаться по степеням величин (12), их производных по w, w' и, наконец, по n_i^p и $n_i'^p$.

Я хочу доказать, что все эти величины так же, как и правые части уравнений (6) и (7), разлагаются по степеням σ_i^0 и τ_i^0. Для этого я перейду к рассмотрению последовательности операций, с помощью которых в предыдущем пункте мы выводили эти величины друг из друга, и покажу, что ни одна из этих операций не нарушает этого свойства.

Операции, о которых говорилось, состоят в следующем.

1. В правые части уравнений (6) вместо величин (12), их производных и величин n_i^p, $n_i'^p$ подставляют их предварительно вычисленные значения. Так как правые части уравнений (6) разлагаются по степеням подставленных величин, а последние в свою очередь (ибо мы рассуждаем по индукции и предполагаем, что ранее вычисленные величины обладают требуемым свойством) разлагаются по степеням σ_i^0 и τ_i^0, то очевидно, что результат подстановки также будет разлагаться по степеням σ_i^0 и τ_i^0.

2. Вычисляется среднее значение какой-нибудь известной периодической функции либо только по w, либо по w и по w'.

Именно к этой операции мы прибегаем при выводе правых частей уравнений (7) из правых частей уравнений (6), а также, когда, обращая в нуль среднее значение правой части уравнения (7,2,2), приравниваем константы n_i^2 среднему значению функции A (см. выше в конце предыдущего пункта).

Поскольку эта операция состоит в вычеркивании членов в тригонометрическом разложении рассматриваемой функции, очевидно, что она не может нарушить справедливость сформулированного утверждения.

3. Дифференцирование величин (12) по w или по w'.
Пусть так же, как и раньше,

$$A \cos h \text{ или } A \sin h$$

— некоторый член разложения той величины, которую мы дифференцируем.
Производной этого члена по w_i будет

$$-Am_i \sin h \text{ либо } Am_i \cos h.$$

Его производная по w_i' будет иметь вид

$$-Am_i' \sin h \text{ или } Am_i' \cos h.$$

Ясно, что если A удовлетворяет сформулированному условию, то этому же условию удовлетворяют также

$$\pm Am_i \text{ и } \pm Am'_i.$$

4. Интегрирование уравнений (6) — (8).
Некоторые из этих уравнений позволяют нам сразу же получить неизвестные величины. Таковы уравнения (8) и уравнения, из которых мы находим n_i^p; последние следует выбирать так, чтобы среднее значение правой части уравнения (7,2, p) было равно нулю. Однако другие уравнения подлежат интегрированию: таковы, например, уравнения (7), имеющие вид

$$n_1^0 \frac{dx}{dw_1} + n_2^0 \frac{dx}{dw_2} = y, \tag{13}$$

где x — неизвестная, а y — известная периодическая функция. Пусть тогда

$$A \cos h \text{ или } A \sin h$$

— один из членов разложения y. Соответствующий член разложения запишется в виде

$$\frac{A}{n_1^0 m_1 + n_2^0 m_2} \sin h \quad \text{или} \quad \frac{A}{n_1^0 m_1 + n_2^0 m_2} \cos h.$$

Ясно, что если A удовлетворяет поставленному условию, то ему удовлетворяют и

$$\pm \frac{A}{n_1^0 m_1 + n_2^0 m_2}.$$

Те же соображения применимы и к уравнению (7, 2, p), которое после того, как n_i^p выбраны так, чтобы среднее значение его правой части было

равно нулю, принимает вид

$$\sum n_k'^1 \frac{dx}{dw_i'} = y, \tag{14}$$

где y — известная, а x — неизвестная функция.

Такой же вид имеет и уравнение (13). Заметим, что $n_i'^1$, а также $n_i'^0$ зависят от Λ_0, но не от $x_i'^0$. Следует еще добавить, что уравнение (14) определяет неизвестную функцию x с точностью до некоторой постоянной, которую можно выбирать в виде произвольной функции от Λ_0 и $x_i'^0$. Разумеется, для того чтобы теорема была справедливой, следует так выбирать эту произвольную функцию, чтобы она разлагалась по целым степеням $(x_i'^0)^2$.

Аналогично уравнения (8) определяют $[\Lambda_p]$ с точностью до некоторой постоянной, которую можно выбирать произвольно. Этот выбор необходимо производить так, чтобы

$$[[\Lambda_p]]$$

разлагалось по степеням $(x_i'^0)^2$.

5. Интегрирование уравнений $(7, 3, p)$ и $(7, 4, p)$ проводится почти таким же образом.

Рассмотрим, например, уравнения (9) и вернемся к обозначениям, которыми мы пользовались при рассмотрении этих уравнений.

Прежде всего рассмотрим случай, когда величина h не равна $\pm w_i'$ и когда определитель системы линейных уравнений (10) отличен от нуля. Тогда ясно, что если коэффициенты A_1, B_1, A_2, B_2 удовлетворяют поставленному условию, то коэффициенты C_1, D_1, C_2, D_2, получаемые из уравнений (10), также удовлетворяют ему.

Перейдем теперь к случаю, когда $h = w_1'$, и вместо уравнений (10) надлежит рассматривать уравнения (10bis).
Имеем прежде всего уравнение

$$n_i'^2 = \frac{A_2 - B_1}{2x_i'^0}.$$

Предположим, что A_2 и B_1, которые представляют собой коэффициенты разложения заранее вычисленной функции, удовлетворяют наложенному условию, т. е. что они разлагаются по степеням $x_k'^0$, что это разложение можно разделить на $x_i'^0$ и что полученное частное будет содержать лишь четные степени $x_k'^0$. Отсюда следует, что $n_i'^2$ содержит лишь четные степени $x_k'^0$ и, следовательно, удовлетворяет нашему условию.

Обратимся снова к уравнениям (10bis). Очевидно, что коэффициенты C_1 и D_1 удовлетворяют наложенному условию, поскольку ему удовлетворяют C_2 и D_2. Однако мы видели, что коэффициенты C_2 и D_2 можно выбирать произвольно. Поэтому их всегда можно подобрать так, чтобы это

условие выполнялось. Разумеется, теорема остается в силе лишь при выполнении указанного условия.

Поскольку интересующее нас свойство не теряется ни при одной из операций, оно остается в силе и при выполнении всей совокупности этих операций.

154. Обратим теперь внимание на то, что уравнения движения не изменяются, если Λ и ρ_i остаются без изменений, а λ и ω_i получают одно и то же приращение.

Рассмотрим разложения (4) (я по-прежнему сохраняю нумерацию п. **152**). Поскольку средние по w и w' значения величин $\Lambda_p, \lambda_p, \Lambda_p', \lambda_p', \rho_i^p$, ω_i^p можно выбирать произвольно, я задам их каким-нибудь образом.

Тогда ряды (4) будут единственными, удовлетворяющими формально уравнениям движения и, кроме того, двум условиям, а именно, все их средние значения должны быть известны и

$$\Sigma \Lambda \lambda' d + \Sigma \rho_i d\omega_i \tag{15}$$

— полный дифференциал.

В самом деле, вычисления, произведенные в п. **152**, позволяют однозначно определить коэффициенты этих рядов, удовлетворяющих указанным различным условиям.

Прибавим теперь к λ, λ' и ω_i одну и ту же константу. В силу замечания, сделанного в начале данного пункта, мы по-прежнему сможем удовлетворить уравнениям движения, причем ряды (4) не изменятся, за исключением того, что λ_0, λ_0' и ω_i^0 перейдут в $w_1 + \alpha$, $w_2 + \alpha$ и $w_i' + \alpha$.

Заменим далее w_i и w_i' на $w_i - \alpha$ и $w_i' - \alpha$. Ряды будут иметь прежний вид, т. е. Λ^p, λ'^p, ρ_i^p, ω_i^p $(p > 0)$ по-прежнему будут периодическими функциями от w и w', среднее значение которых сохранится. Они также будут формально удовлетворять уравнениям движения, поскольку я лишь вычел из произвольных постоянных $\bar{\omega}_i$ и $\bar{\omega}_i'$ некоторую постоянную α.

Наконец, выражение (15) по-прежнему будет полным дифференциалом.

Следовательно, эти ряды не могут отличаться от рядов (4), которые являются единственными рядами, удовлетворяющими всем этим условиям.

Это означает, что Λ_p, λ_p, ω_i^p $(p > 0)$ не изменяются, если w и w' одновременно уменьшить на одну и ту же величину.

Другими словами, если

$$A \cos h \text{ или } A \sin h$$

представляют собой некоторый член разложения Λ_p, λ_p, ρ_i^p, ω_i^p и

$$h = \Sigma m_i w_i + \Sigma m_i' w_i',$$

то алгебраическая сумма целых чисел m_i и m_i' должна быть равна нулю.

Отсюда нетрудно заключить, что если

$$A \cos h \text{ или } A \sin h$$

представляют собой некоторый член разложения σ_i^p или τ_i^p, то *та же самая алгебраическая сумма должна быть равна* ± 1. Добавлю еще, что для разложений величин

$$\sigma_i^p \cos w_k + \tau_i^p \sin w_k,$$

$$\tau_i^p \cos w_k - \sigma_i^p \sin w_k$$

(а также для разложений этого же вида, в которых вместо w_k фигурирует w_k') эта сумма равна нулю.

Другие свойства мы получаем из соображений симметрии и аналогичных рассуждений.

Например, если все симметрично относительно плоскости xz, то уравнения движения не изменятся, если изменить знаки величин λ, λ' и τ_i, не изменяя величин Λ, Λ' и σ_i.

Предположим далее, что в разложениях (4) средние значения величин λ_p и τ_i^p, которые можно выбирать произвольно, равны нулю. Произведем замену переменных

$$\lambda, \lambda', \tau_i$$

на

$$-\lambda, -\lambda, -\tau_i$$

и одновременно переменных w_i и w_i' на

$$-w_i \quad \text{и} \quad -w_i'.$$

Ряды (4) сохранят свой вид и будут по-прежнему удовлетворять уравнениям движения. Средние значения величин Λ_p и σ_i^p не изменятся, средние значения величин λ_p и τ_i^p останутся равными нулю. Наконец, выражение (15) будет по-прежнему полным дифференциалом.

Это возможно лишь в том случае, если ряды (4) не изменятся. Следовательно, не изменятся Λ_p и σ_i^p. Величины же λ_p и τ_i^p изменят знак одновременно с w и w'.

Это означает, что разложения величин Λ и σ_i содержат лишь косинусы, тогда как разложения λ и τ_i содержат лишь синусы.

К аналогичным выводам можно прийти и в случае симметрии относительно плоскости xy.

Предположим, что мы имеем дело с пространственной задачей трех тел. Пусть в качестве переменных выбраны

$$\Lambda, \Lambda', \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4,$$

$$\lambda, \lambda', \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4.$$

Третья и четвертая пары переменных определяют эксцентриситеты и перигелии, две последние пары переменных определяют наклонения и узлы.

В силу только что указанной симметрии уравнения не изменятся, если у переменных σ_3, σ_4, τ_3 и τ_4 изменить знак, оставив остальные переменные без изменений.

С помощью рассуждений, полностью аналогичных тем, которыми мы пользовались выше, можно усмотреть, что ряды (4) не изменятся при одновременной замене

$$\sigma_3,\ \sigma_4,\ \tau_3,\ \tau_4,\ w_3',\ w_4'$$

на

$$-\sigma_3,\ -\sigma_4,\ -\tau_3,\ -\tau_4,\ +w_3'+\pi,\ +w_4'+\pi.$$

Отсюда должен следовать вывод о том, что в разложениях (4), которые производятся по косинусам и синусам величины

$$h=\Sigma m_i w_i+\Sigma m_i' w_i',$$

сумма $m_3'+m_4'$ должна быть четной для разложений величин

$$\Lambda,\ \Lambda',\ \sigma_1,\ \sigma_2,$$
$$\lambda,\ \lambda',\ \tau_1,\ \tau_2$$

и, наоборот, нечетной, для разложений

$$\sigma_3,\ \sigma_4,$$
$$\tau_3,\ \tau_4.$$

155. В п. 152 для упрощения изложения и вычислений я воспользовался искусственным приемом, о котором уже говорилось в конце п. 140 и упоминалось в начале п. 152. Он состоит в том, что некоторые члены считаются членами второго порядка, хотя относительно масс они являются членами лишь первого порядка.

Законность такого приема основывается на крайней малости этих членов. Однако применение его все же приводит к некоторым трудностям. В самом деле, в результате применения такого приема изменяется смысл параметра μ. Положив $\mu=0$, мы приходим к частному случаю задачи трех тел, когда массы возмущающих тел равны нулю, а движение кеплеровское. Придав параметру μ некоторое очень малое, но вполне определенное значение, мы приходим к другому частному случаю задачи трех тел, соответствующему подлинным значениям масс тех тел, которые мы рассматриваем. Однако если придать μ некоторый промежуточный смысл, то уравнения превратятся в уравнения некоторой динамической задачи, не имеющей никакого отношения к задаче трех тел.

Иначе обстояло бы дело, если бы за параметром μ мы сохранили его первоначальный смысл, определенный в п. 11. В этом случае, каково бы ни было значение, придаваемое μ, наши уравнения были бы уравнениями задачи трех тел, соответствующими некоторым значениям масс.

Поэтому было бы удобнее понимать параметр μ в его первоначальном смысле и попытаться разлагать наши переменные не только по степеням μ, но еще и по степеням тех констант, которые мы обозначили $x_i'^0$ (имеющих порядок эксцентриситетов).

Тогда уравнения движения имели бы прежний вид и лишь среднее значение функции F_1, которое я всегда обозначал символом R, имело более сложное выражение. Функция R уже не выражалась бы в виде

$$R = B + \Sigma A_i(\sigma_i^2 + \tau_i^2), \tag{16}$$

как это было в п. 152, а разлагалась по возрастающим степеням σ_i и τ_i. Правая же часть выражения (16) содержит лишь первые члены такого разложения, а именно члены порядка 0 и 2 (как известно, все члены разложения имеют четный порядок).

Итак, разложим наши переменные (1) по степеням μ и $x_i'^0$. Разложения (4) сохраним в прежнем виде. Пусть, кроме того,

$$\begin{aligned}
\Lambda_p &= \Lambda_{p,0} + \Lambda_{p,1} + \Lambda_{p,2} + \dots, \\
\lambda_p &= \lambda_{p,0} + \lambda_{p,1} + \lambda_{p,2} + \dots, \\
\sigma_i^p &= \sigma_i^{p,0} + \sigma_i^{p,1} + \sigma_i^{p,2} + \dots, \\
\tau_i^p &= \tau_i^{p,0} + \tau_i^{p,1} + \tau_i^{p,2} + \dots,
\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\Lambda_{p,q},\ \lambda_{p,q},\ \sigma_i^{p,q},\ \tau_i^{p,q}$$

означают совокупность членов порядка q относительно $x_i'^0$.

Я по-прежнему предполагаю, что

$$\Lambda_0 = \text{const}, \quad \lambda_0 = w_1$$

и, следовательно,

$$\Lambda_{0,q} = \lambda_{0,q} = 0 \quad \text{при} \quad q > 0,$$

однако я не предполагаю более, что

$$\sigma_i^0 = x_i'^0 \cos w_i', \qquad \tau_i^0 = x_i'^0 \sin w_i'.$$

Вместо этого пусть

$$\sigma_i^{0,0} = \tau_i^{0,0} = 0,$$

$$\sigma_i^{0,1} = x_i'^0 \cos w_i', \qquad \tau_i^{0,1} = x_i'^0 \sin w_i',$$

но величины $\sigma_i^{0,q}$, $\tau_i^{0,q}$, вообще говоря, отличны от нуля.

Сделав эти предположения, обратимся вновь к вычислениям, произведенным в п. 152.

В этом пункте мы прежде всего рассмотрели уравнения (6), в которых положили $p = 0$. Эти уравнения будут удовлетворяться, ибо $n_i'^0$ равны

нулю, σ_i^0 и τ_i^0 не зависят от w_i, а зависят лишь от w_i' в силу сделанных нами предположений.

Далее идут уравнения (7), в которых мы положили $p = 1$ [ср. с уравнениями (8 bis из п. 152)]. Однако необходимо заметить, что вид уравнений (6) и (7) на этот раз несколько изменился.

В самом деле, рассмотрим в уравнениях (6, 3, p), (6, 4, p), (7, 3, p),(7, 4, p) последний член в правой части. Этот член можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\text{для уравнения } (6,\ 3,\ p)\ \ldots\ -\sum_k n_k^p \frac{d\sigma_i^0}{dw_k} - \sum_k n_k'^p \frac{d\sigma_i^0}{dw_k'},\\
&\text{для уравнения } (6,\ 4,\ p)\ \ldots\ -\sum_k n_k^p \frac{d\tau_i^0}{dw_k} - \sum_k n_k'^p \frac{d\tau_i^0}{dw_k'},\\
&\text{для уравнения } (7,\ 3,\ p)\ \ldots\ -\sum n_k'^p \frac{d\sigma_i^0}{dw_k'},\\
&\text{для уравнения } (7,\ 4,\ p)\ \ldots\ -\sum n_k'^p \frac{d\tau_i^0}{dw_k'}.
\end{aligned} \tag{18}$$

В п. **152** величины σ_i^0 и τ_i^0 были равны

$$x_i'^0 \cos w_i' \quad \text{и} \quad x_i'^0 \sin w_i',$$

поэтому выписанные четыре члена были бы равны

$$\mp n_i'^p x_i'^0 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} w_i',$$

однако теперь σ_i^0 и τ_i^0 не равны указанным выражениям и выписанные члены необходимо сохранять в виде (18).

Уравнения (7) при $p = 1$ запишутся в виде

$$\begin{aligned}
&[L_1] = \frac{dR}{d\lambda_0} = 0, \quad [l_1] = n_1^1,\\
&\frac{dR}{d\tau_i^0} = \sum n_k'^1 \frac{d\sigma_i^0}{dw_k'}, \qquad -\frac{dR}{d\sigma_i^0} = \sum n_k'^1 \frac{d\tau_i^0}{dw_k'}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Разумеется, следует помнить, что Λ, λ, σ_i и τ_i в функции R заменены величинами Λ_0, λ_0, σ_i^0 и τ_i^0.

Эти уравнения представляют собой те же уравнения, которые разбирались в главе X, но записанные по-другому. Первое уравнение выполняется автоматически. Поэтому мы рассмотрим два последних уравнения, из которых следует находить σ_i^0 и τ_i^0.

Разложим $n_i'^1$ по степеням $x_i'^0$. Пусть

$$n_i'^1 = n_i'^{1,0} + n_i'^{1,1} + n_i'^{1,2} + \ldots, \tag{20}$$

где $n_i'^{1,q}$ означает совокупность членов порядка q относительно $x_i'^0$.

Подставим в два последних уравнения (19) вместо σ_i^0, τ_i^0, $n_k'^1$ разложения (17) и (20) и приравняем члены одинакового порядка в правых и левых частях. Для краткости введем обозначение

$$\Delta'' u = \sum n_k'^{1,0} \frac{du}{dw_k'}.$$

Если приравнять члены первого порядка относительно $x_i'^0$, то

$$\Delta''\sigma_i^{0,1} = 2A_i^0\tau_i^{0,1}; \qquad \Delta''\tau_i^{0,1} = -2A_i^0\sigma_i^{0,1}.$$

Эти уравнения удовлетворяются, поскольку

$$n_i'^{1,0} = -2A_i^0.$$

Предположим теперь, что мы уже нашли

$$\sigma_i^{0,1}, \sigma_i^{0,2}, \ldots, \sigma_i^{0,q-1},$$
$$\tau_i^{0,1}, \tau_i^{0,2}, \ldots, \tau_i^{0,q-1},$$
$$n_i'^{1,0}, n_i'^{1,1}, \ldots, n_i'^{1,q-2}$$

и что требуется найти

$$\sigma_i^{0,q}, \tau_i^{0,q}, n_i'^{1,q-1}.$$

В обеих частях двух последних уравнений (19) приравняем члены порядка q. Эти члены имеют вид:

в третьем уравнении

левая часть: $2A_i\tau_i^{0,q}$ + известные величины,

правая часть: $\Delta''\sigma_i^{0,q} + n_i'^{1,q-1}\frac{d\sigma_i^{0,1}}{dw_i'}$ + известные величины,

в четвертом уравнении

левая часть: $-2A_i\sigma_i^{0,q}$ + известные величины,

правая часть: $\Delta''\tau_i^{0,q} + n_i'^{1,q-1}\frac{d\tau_i^{0,1}}{dw_i'}$ + известные величины.

Следовательно, мы можем записать

$$\Delta''\sigma_i^{0,q} + n_i'^{1,0}\tau_i^{0,q} = \varphi_1 + n_i'^{1,q-1}x_i'^0 \sin w_i',$$
$$\Delta''\tau_i^{0,q} + n_i'^{1,0}\sigma_i^{0,q} = \varphi_2 + n_i'^{1,q-1}x_i'^0 \cos w_i', \tag{21}$$

где φ_1 и φ_2 — известные периодические функции от w'.

Аналогия этих уравнений с уравнениями (9) очевидна. От одних уравнений к другим можно перейти с помощью замены $[\sigma_i^1]$, $[\tau_i^1]$, $n_k'^1$, $n_i'^2$ на $\sigma_i^{0,q}$, $\tau_i^{0,q}$, $n_k'^{1,0}$, $n_i'^{1,q-1}$.

Следовательно, с уравнениями (21) можно поступить так же, как с уравнениями (9). Условие применимости метода, которым мы пользовались, аналогичное равенству нулю суммы $A_1 + B_2$ в уравнениях (10 bis), должно выполняться автоматически, ибо мы заранее доказали возможность разложения.

Чтобы удовлетворить двум последним уравнениям (19), R должна быть постоянной (ибо оба эти уравнения допускают в качестве интеграла, аналогичного интегралу живых сил, $R = \text{const}$). Поскольку это должно быть верно, каковы бы ни были постоянные λ_0, и Λ_0', производная — $dR/d\Lambda_0$ точно так же должна быть постоянной, зависящей лишь от Λ_0 и $x_i'^0$.

Но

$$[l_1] = -\frac{d^2F_0}{d\Lambda_0^2}[\Lambda_1] - \frac{d^2F_0}{d\Lambda_0\, d\Lambda_0'}[\Lambda_1'] - \frac{dR}{d\Lambda_0}.$$

Производные функции F_0 постоянны. Первое из уравнений (8) говорит нам, что постоянными будут также $[\Lambda_1]$ и $[\Lambda_1']$. Следовательно, величина $[l_1]$ есть постоянная, которую можно приравнять n_1^1. Тем самым мы удовлетворим второму из уравнений (19).

В п. 152 мы затем последовательно нашли $\Lambda_1 - [\Lambda_1]$ (а следовательно, и Λ_1, ибо $[\Lambda_1]$ представляет собой константу, которую можно выбирать произвольно), $\sigma_i^1 - [\sigma_i^1]$, $\tau_i^1 - [\tau_i^1]$, $\lambda_1 - [\lambda_1]$ из уравнений (6, 1, 1), (6, 3, 1), (6, 4, 1) и (6, 2, 1). *Эта часть вычислений остается без изменений.*

Теперь найдем $[\sigma_i^1]$ и $[\tau_i^1]$.

Для этого рассмотрим уравнения (7, 3, 2) и (7, 4, 2). Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
\Delta'[\sigma_i^1] &= \varphi_1 + \sum \frac{d^2R}{d\tau_i^0\, d\sigma_k^0}[\sigma_k^1] + \sum \frac{d^2R}{d\tau_i^0\, d\tau_k^0}[\tau_k^1] - \\
&\quad - \sum n_k'^2 \frac{d\sigma_i^0}{dw_k'}, \\
\Delta'[\tau_i^1] &= \varphi_2 - \sum \frac{d^2R}{d\sigma_i^0\, d\sigma_k^0}[\sigma_k^1] - \sum \frac{d^2R}{d\sigma_i^0\, d\tau_k^0}[\tau_k^1] - \\
&\quad - \sum n_k'^2 \frac{d\tau_i^0}{dw_k'},
\end{aligned} \tag{22}$$

где φ_1 и φ_2 известны.

Эти уравнения аналогичны уравнениям (9), только R, σ_i^0, τ_i^0 имеют менее простое выражение. Например, три последних члена в правой части

первого из этих уравнений не будут соответственно равны

$$0,\ 2A_i^0[\tau_i^1],\ n_i^2\tau_i^0,$$

как это было в п. 152, где указанное обстоятельство вносило существенное упрощение.

Итак, подставим в уравнения (22) вместо σ_i^1 и τ_i^1 их разложения (17); вместо $n_k'^1$ — его разложение (20) и вместо $n_k'^2$ — разложение

$$n_k'^2 = n_k'^{2,0} + n_k'^{2,1} + n_k'^{2,2} + \dots,$$

аналогичное разложению (20). Кроме того, пусть φ_1^q и φ_2^q — совокупность членов порядка q относительно $x_i'^0$ функций φ_1 и φ_2.

Затем приравняем члены одного и того же порядка, стоящие в правой и левой частях уравнений (22).

Если сначала приравнять члены порядка 0, то получим

$$\begin{aligned}\Delta'[\sigma_i^{1,0}] &= \varphi_1^0 + 2A_i^0[\tau_i^{1,0}],\\ \Delta''[\tau_i^{1,0}] &= \varphi_2^0 - 2A_i^0[\sigma_i^{1,0}],\end{aligned} \tag{23}$$

где φ_1^0 и φ_2^0 — константы, зависящие лишь от Λ_0 и Λ_0' (действительно, в силу рассуждений, изложенных в п. 153, которые остаются применимыми без всяких изменений, φ_1 и φ_2 допускают разложение по степеням $x_i'^0\cos w_i'$ и $x_i'^0\sin w_i'$, члены же порядка 0 относительно $x_i'^0$ не зависят ни от $x_i'^0$, ни от w_i').

Отсюда следует, что $[\tau_i^{1,0}]$ и $[\sigma_i^{1,0}]$ также представляют собой константы и левые части уравнений (23) равны нулю. Поэтому мы можем найти из этих уравнений $[\sigma_i^{1,0}]$ и $[\tau_i^{1,0}]$.

Предположим теперь, что мы уже нашли

$$\begin{gathered}[\sigma_i^{1,0}],\ [\sigma_i^{1,1}],\ [\sigma_i^{1,2}],\dots,[\sigma_i^{1,q-1}],\\ [\tau_i^{1,0}],\ [\tau_i^{1,1}],\ [\tau_i^{1,2}],\dots,[\tau_i^{1,q-1}],\\ \text{»},\ n_i'^{2,0},\ n_i'^{2,1},\dots,n_i'^{2,q-2}\end{gathered}$$

и что требуется найти

$$[\sigma_i^{1,q}],\ [\tau_i^{1,q}],\ n_i'^{2,q-1}. \tag{24}$$

Для этого приравняем в правой и левой частях уравнений (22) члены порядка q.

Получим, учитывая члены, зависящие от неизвестных величин (24),

$$\begin{aligned}\Delta''[\sigma_i^{1,q}] + n_i'^{1,0}[\tau_i^{1,q}] &= \psi_1 + n_i'^{2,q-1}x_i'^0\sin w_i',\\ \Delta''[\tau_i^{1,q}] - n_i^{1,0}[\sigma_i^{1,q}] &= \psi_2 - n_i'^{2,q-1}x_i'^0\cos w_i',\end{aligned} \tag{25}$$

где ψ_1 и ψ_2 — известные функции.

Эти уравнения аналогичны уравнениям (9). В самом деле, от одних уравнений к другим можно перейти, заменив

$$[\sigma_i^1],\ [\tau_i^1],\ n_k'^1,\ n_i'^2$$

на

$$[\sigma_i^{1,q}],\ [\tau_i^{1,q}],\ n_k'^{1,0},\ n_i'^{2,q-1}.$$

Следовательно, к уравнениям (25) применимы те же методы, что и к уравнениям (9).

Затем так же, как в п. **152**, находим

$$[\Lambda_2],\ n_1^2,\ [\lambda_1],\ \Lambda_2,\ \sigma_i^2 - [\sigma_i^2],\ \tau_i^2 - [\tau_i^2],\ \lambda_2 - [\lambda_2].$$

Чтобы найти

$$[\sigma_i^2],\ [\tau_i^2] \text{ и } n_i'^3,$$

воспользуемся уравнениями (7, 3 ,3) и (7, 4, 3). Эти уравнения имеют тот же вид, что и уравнения (22), и решаются таким же способом.

Замечательные частные случаи

156. Как мы видели в п. **153**, правые части разложений (4) и (17) можно представить в виде ряда по степеням $x_i'^0 \cos w_i'$ и $x_i'^0 \sin w_i'$.

Если мы одновременно обратим в нуль все произвольные постоянные $x_i'^0$, то переменные не будут зависеть от w_i', а будут зависеть лишь от w_1 и w_2. Они будут разлагаться в тригонометрические ряды от

$$m_1 w_1 + m_2 w_2,$$

где m_1 и m_2 — целые числа.

В силу сказанного в п. **154**, сумма $m_1 + m_2$ в разложениях Λ и λ должна равняться нулю, так что эти переменные зависят лишь от $w_1 - w_2$. По тем же причинам сказанное будет справедливо и для

$$\begin{aligned} &\sigma_i \cos w_1 + \tau_i \sin w_1, \\ &\tau_i \cos w_1 - \sigma_i \sin w_1. \end{aligned} \tag{26}$$

Отсюда с очевидностью следует, что сделанное частное предположение ($x_i'^0 = 0$) соответствует какому-то периодическому решению. Нетрудно видеть, что найденные таким способом решения не отличаются от тех, которые мы в главе III назвали *периодическими решениями первого сорта*.

Отсюда можно заключить, что разложения (4), которые обычно не сходятся в математическом смысле этого слова, становятся сходящимися, если постоянные $x_i'^0$ обращаются в нуль.

Поскольку постоянные $x_i'^0$ вообще очень малы, ясно, что реально получаемое решение будет осциллировать вокруг периодического решения, не слишком удаляясь от последнего.

Рассмотрим теперь в разложениях Λ, λ и в выражениях (26) члены первого порядка относительно $x_i'^0$. Учитывая результаты пунктов **153** и **154**, нетрудно понять, что эти члены будут иметь вид

$$\sum_k x_k'^0 \cos(w_k' - w_k)\,\varphi_k + \sum_k x_k' \sin(w_k' - w_k)\,\psi_k, \tag{27}$$

где φ_n и ψ_k — периодические функции, разлагающиеся по синусам и косинусам аргументов, кратных $w_1 - w_2$.

Интерпретация этого результата очевидна. В главе IV мы рассмотрели уравнения в вариациях относительно некоторого данного периодического решения. Рассмотрим теперь уравнения движения и то периодическое решение первого сорта, которое получим, если обратим в нуль все $x_i'^0$. Выражения (27) будут не чем иным, как наиболее общими решениями соответствующих уравнений в вариациях.

Отсюда следует, что характеристические показатели относительно такого решения первого сорта будут иметь вид

$$\pm\sqrt{-1}\,(n_k' - n_1).$$

Важно заметить, что в этом выражении постоянные $x_i'^0$ (от которых зависят n_k' и n_1) следует положить равными 0.

Может представиться случай, когда необходимо получить разложения (4) и (17) для периодических решений второго и третьего сорта так же, как мы это делали для решений первого сорта. Эта задача несколько более трудная.

Чтобы лучше выявить существо дела, я хочу сначала рассмотреть более простой пример. Обратимся вновь к рядам из п. **127** и попытаемся вывести из них периодические решения п. **42**. Мы видели, что средние значения периодических функций x_i^p и y_i^p в рядах п. **127** можно выбирать произвольно, в частности, их можно выбрать так, что n_i^p будут равны нулю, коль скоро $p > 0$. Это условие можно реализовать и с помощью надлежащего выбора средних значений x_i^p, в то время как средние значения y_i^p останутся произвольными.

Итак, предположим, что мы выбрали эти средние значения указанным образом и что, следовательно,

$$n_i = n_i^0.$$

Кроме того, предположим, что x_i^0 выбраны так, что n_i^0 имеют некоторые наперед заданные соизмеримые между собой значения. В этом случае, как можно было бы усмотреть из вычислений п. **127**, некоторые коэффициенты обращаются в бесконечность, *если только константы* ω_i *не подобраны надлежащим образом, а средние значения* y_i^p *остаются произвольными.*

Если же выбор постоянных произведен так, как указано, то ряды п. 127 существуют, они сходятся и не отличаются от рядов п. 44.

Вернемся к задаче трех тел. Константы Λ_0, Λ_0' и $x_i'^0$ так же, как и средние значения различных членов разложений (4) и (17), рассматриваемые как периодические функции от w и w', выберем так, чтобы:

1) n_1^0 и n_0^2 принимали наперед заданные соизмеримые между собой значения (замечу, что в обозначениях п. 155 $n_i^{0,p}$ равно нулю при $p > 0$);

2) n_i^p и $n_i'^p$ были равны нулю при $p > 1$;

3) $n_1^1 = n_2^1 = n_i'^1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Выбор постоянных я могу произвести так, чтобы удовлетворить всем этим условиям и чтобы одновременно половина средних значений оставалась произвольной.

Но тогда, если бы потребовалось произвести вычисления, проводимые в пунктах 152 или 155, окажется, что некоторые коэффициенты обращаются в бесконечность, если только не подобрать надлежащим образом постоянные ϖ_i и ϖ_i', а средние значения по-прежнему оставлять произвольными.

Коль скоро это сделано, ряды (4) и (17) существуют, *они сходятся* и не отличаются от рядов, представляющих решения второго и третьего сорта.

Предположим теперь, что мы обратили в нуль $x_3'^0$ и $x_4'^0$, не обращая в нуль $x_1'^0$ и $x_2'^0$. Найдется некоторый ряд частных решений задачи трех тел, зависящих лишь от четырех аргументов

$$w_1, w_2, w_1', w_2'.$$

Это именно те решения, которые соответствуют плоскому случаю задачи трех тел. Число аргументов в этом случае равно 4, ибо таково число степеней свободы.

Можно, однако, заметить, что Λ, λ и выражения (26) зависят лишь от разностей

$$w_2 - w_1, \; w_1' - w_1, \; w_2' - w_1$$

так же, как в п. 154.

Если в качестве переменных выбрать Λ, λ и указанные выражения (26), то число аргументов понизится до трех. Это соответствует тому случаю задачи, который разобран в п. 15, где имелось три степени свободы.

Представим себе теперь, что масса первой планеты бесконечно мала (случай малой планеты, возмущаемой Юпитером). Тогда величины

$$\sigma_2, \tau_2, \sigma_4, \tau_4$$

перейдут в

$$\xi', \eta', p', q'.$$

Эти величины так же, как и Λ', будут постоянными, а λ' будет равна w_2.

Отсюда следует, что

$$n_2' = \frac{dw_2'}{dt} = 0,$$
$$n_4' = \frac{dw_4'}{dt} = 0.$$

Число аргументов, которое было равно шести, понижается до четырех:

$$w_1,\ w_2,\ w_1',\ w_3'.$$

Однако в этом случае нельзя заключить, что $\Lambda, \lambda, \ldots$ зависят лишь от разностей

$$w_1 - w_2,\ w_1' - w_2,\ w_3' - w_2.$$

В самом деле, рассуждения, приведенные в п. 154, позволяют нам лишь заключить, что в общем случае Λ зависит только от пяти разностей

$$w_2 - w_1, \qquad w_i' - w_1 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Поскольку две из величин w_i' представляют собой константы (именно так происходит в рассматриваемом нами частном случае), два из этих пяти аргументов отличаются друг от друга не более чем на константу, в силу чего их остается не более четырех. Однако нет никаких причин, по которым такое понижение числа независимых аргументов можно было бы провести дальше.

В силу п. 153 переменные по-прежнему будут допускать разложение по степеням

$$x_i'^0 \cos w_i', \qquad x_i'^0 \sin w_i'.$$

Предположим, что $x_3'^0$ и $x_4'^0$ равны нулю. Это соответствует случаю, когда три тела движутся в одной и той же плоскости (я по-прежнему считаю, что массы бесконечно малы). Тогда переменные не будут зависеть от w_3' и у нас останется только три аргумента, а именно:

$$w_1,\ w_2,\ w_1'.$$

Обратим еще в нуль постоянную $x_2'^0$. Это соответствует случаю, когда орбита второй планеты круговая, т. е. задаче п. 9.

Поскольку наши переменные допускают разложение по степеням $x_i'^0 \cos w_i'$ и $x_i'^0 \sin w_i'$, и

$$x_2'^0 = x_3'^0 = x_4'^0 = 0,$$

они не зависят ни от w_2', ни от w_3', ни от w_4'. В силу п. 154 они зависят лишь от

$$w_1 - w_2, \qquad w_1 - w_i'.$$

Однако мы только что видели, что три из w_i' не должны входить в выражения для переменных, поэтому переменные зависят лишь от

$$w_1 - w_2, \quad w_1 - w_1'.$$

Число аргументов понизилось до двух. Однако мы видели, что в задаче п. 9 имеется ровно две степени свободы. Если же, кроме того, положить $x_1'^0 = 0$, то мы приходим к периодическим решениям, изученным Хиллом (см. п. 41, следует принять во внимание замечание, сделанное в трех последних строках).

Если в теории Луны считать, что на этот спутник действуют лишь Земля и Солнце, а относительное движение этих двух небесных тел кеплеровское, то указанная теория сведется к одному из рассмотренных выше частных случаев.

Однако часто требуется учесть возмущения, вносимые в движение Земли частью остальных планет, по-прежнему полностью пренебрегая прямым действием этих планет на Луну. Если стать на эту точку зрения, то относительное движение Земли и Солнца уже не будет кеплеровским, но все же будет *известным*, и Луна по-прежнему будет подвержена действию лишь этих двух движущихся тел, причем закон их движения известен.

Итак, предположим, что координаты Солнца относительно Земли можно представить рядами того же вида, как мы рассматривали в этой главе, зависящими от n аргументов.

С помощью рассуждений, лишь незначительно отличающихся от тех, которые мы проводили в этой главе, нетрудно усмотреть, что координаты Луны также выражаются с помощью аналогичных рядов, зависящих от $n + 2$ аргументов.

Чтобы то, что я под этим подразумеваю, было лучше понятно, я вновь обращусь к задаче п. 9. Представим себе, что Земля и Солнце описывают концентрические окружности. Координаты Солнца зависят в этом случае от $n = 1$ аргументов, расстояния от Луны до Земли и до Солнца зависят от двух аргументов (именно тех, которые я только что обозначил $w_1 - w_2$, $w_1 - w_1'$), однако координаты Луны относительно фиксированных осей зависят от $n + 2 = 3$ аргументов.

Аналогичные соображения применимы и в случае, когда число тел больше трех. Предположим теперь, что их, например, четыре. Тогда число переменных w_i равно трем, а число переменных w_i' равно шести.

Предположим, что все шесть постоянных $x_i'^0$ равны нулю одновременно. Первое следствие из этого предположения состоит в том, что движение происходит в плоскости. Кроме того, Λ, λ выражения (26), а следовательно, и взаимные расстояния между четырьмя телами, будут зависеть лишь от двух аргументов

$$w_1 - w_2, \quad w_1 - w_3.$$

Отсюда не следует (как это было в том случае, когда мы, рассматривая только три тела, обратили в нуль все $x_i'^0$), что ряды будут сходиться в ма-

тематическом смысле, однако можно попытаться вывести отсюда периодические решения п. 50.

Вот как следует это делать. Выберем постоянные интегрирования и средние значения различных членов разложений (4) и (17) так, чтобы:

1) величины

$$n_1^0 - n_2^0, \quad n_1^0 - n_3^0$$

имели заданные соизмеримые между собой значения;

2) при $p > 0$

$$n_1^p = n_2^p = n_3^p.$$

Постоянные $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{S}_i'$ и половина средних значений остаются произвольными.

Если требуется произвести вычисления п. 152, то некоторые коэффициенты становятся бесконечными, *если только* $\mathfrak{S}_i$ *и* $\mathfrak{S}_i'$ *не выбраны надлежащим образом, а средние значения по-прежнему остаются произвольными.*

Если выбор $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{S}_i'$ произведен нужным образом, то ряды существуют, сходятся и представляют периодические решения п. 50.

Выводы

157. Таковы ряды, к которым приводят методы вычислений, изложенные в предыдущих главах. Исходная идея принадлежит Ньюкому, он же открыл и основные свойства этих рядов.

Эти ряды расходятся. Однако если разложения оборвать на каком-нибудь члене, я имею в виду обрыв разложения до того, как встретимся с малыми знаменателями, то ряды будут представлять координаты с весьма большой точностью.

Эти ряды можно использовать и по-иному.

Предположим, что мы оборвали разложение на каком-то члене и воспользовались затем методом вариации постоянных, приняв в качестве новых переменных Λ_0, $x_i'^0$, $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{S}_i'$. Эти новые переменные изменяются чрезвычайно медленно, и к дифференциальным уравнениям, определяющим их вариации, можно с успехом применять старые методы. Например, новые переменные можно разлагать по степеням времени.

Глава XV

ДРУГИЕ МЕТОДЫ ПРЯМЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Задача из п. 125

158. Рассмотрим снова уравнения

$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \tag{1}$$

и

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}. \tag{2}$$

Предположим, что этим уравнениям можно удовлетворить с помощью рядов, расположенных по синусам и косинусам линейных комбинаций

$$w_1, w_2, \ldots, w_n$$

с целыми коэффициентами.

Существование этих рядов мы доказали в п. 125.

Напомню, что

$$w_k = n_k t + \omega_k$$

и, следовательно

$$\begin{aligned} \sum_k n_k \frac{dx_i}{dw_k} &= \frac{dx_i}{dt}, \\ \sum_k n_k \frac{dy_i}{dw_k} &= \frac{dy_i}{dt}. \end{aligned} \tag{3}$$

В п. 127 мы воспользовались для нахождения этих рядов уравнениями (1) и (2), но можно поступить иначе.

Прежде всего у нас имеется интеграл живых сил

$$F = \text{const}. \tag{4}$$

Кроме того, выражение

$$\sum x_i dy_i \tag{5}$$

должно быть полным дифференциалом, а поскольку величины x_i^0 — константы, полным дифференциалом должно быть и выражение

$$\sum (x_i - x_i^0)\, dy_i = dS,$$

что дает нам уравнение

$$\frac{dS}{dw_k} = \sum (x_i - x_i^0) \frac{dy_i}{dw_k}. \tag{6}$$

Теперь я утверждаю, что уравнения (2) следуют из уравнений (1), (3), (4) и (6). В самом деле, уравнения (6) означают, что выражение (5) является полным дифференциалом. Условия интегрируемости этого выражения можно записать в следующем виде

$$\sum_i \left(\frac{dx_i}{dw_q} \frac{dy_i}{dw_k} - \frac{dx_i}{dw_k} \frac{dy_i}{dw_q} \right) = 0. \tag{7}$$

Умножим это уравнение на n_q. Затем зафиксируем k и будем придавать q последовательно значения $q = 1, 2, \ldots, n$.

Наконец, сложим n полученных уравнений. Учитывая соотношения (3), получим

$$\sum_i \left(\frac{dx_i}{dt} \frac{dy_i}{dw_k} - \frac{dx_i}{dw_k} \frac{dy_i}{dt} \right) = 0$$

или, если учесть уравнения (1),

$$\sum \frac{dx_i}{dt} \frac{dy_i}{dw_k} + \sum \frac{dF}{dx_i} \frac{dx_i}{dw_k} = 0. \tag{8}$$

Продифференцируем теперь интеграл живых сил (4) по w_k

$$\sum \frac{dF}{dx_i} \frac{dx_i}{dw_k} + \sum \frac{dF}{dy_i} \frac{dy_i}{dw_k} = 0$$

или, сопоставляя с уравнением (8),

$$\sum \frac{dx_i}{dt} \frac{dy_i}{dw_k} = \sum \frac{dF}{dy_i} \frac{dy_i}{dw_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i},$$

что и требовалось доказать.

Итак, наши ряды мы можем найти с помощью уравнений (4), (6) и уравнений

$$\sum n_k \frac{dy_i}{dw_k} = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{1 bis}$$

Подставим в эти уравнения вместо x_i, y_i, n_k и S разложения этих величин по степеням μ

$$\sum \mu^p x_i^p, \quad \sum \mu^p y_i^p, \quad \sum \mu^p n_k^p, \quad \sum \mu^p S_p.$$

Затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ, стоящих в правой и левой частях этих уравнений.

Получим при этом цепочку уравнений, которые позволят найти коэффициенты выписанных выше рядов из рекуррентных соотношений.

В самом деле, предположим, что мы уже вычислили коэффициенты

$$x_i^0, \ x_i^1, \ x_i^2, \ldots, x_i^{p-1},$$
$$y_i^0, \ y_i^1, \ y_i^2, \ldots, y_i^{p-1},$$
$$n_k^0, \ n_k^1, \ n_k^2, \ldots, n_k^{p-1},$$
$$S_0, \ S_1, \ldots, S_{p-1}.$$

Требуется найти коэффициенты

$$x_i^p, \ y_i^p, \ n_k^p, \ S_p.$$

Приравняем коэффициенты при μ^p в правой и левой частях уравнения (4). Получим

$$\sum n_k^0 x_k^p = \Phi + \text{const}. \tag{9}$$

Символом Φ я обозначил так же, как я буду делать на протяжении всей этой главы, некоторую полностью известную функцию, периодически зависящую от w. Излишне добавлять, что различные функции, которые я буду обозначать этим символом Φ, не должны совпадать друг с другом. Что же касается константы в правой части уравнения (9), то она произвольна так же, как и константа, стоящая в правой части интеграла живых сил (4).

Приравняв теперь коэффициенты при μ^p в правой и левой частях уравнения (6), получим

$$\frac{dS_p}{dw_k} = x_k^p + \Phi, \tag{10}$$

но имея в виду (9), получим

$$\sum n_k^0 \frac{dS_p}{dw_k} = \Phi + \text{const}. \tag{11}$$

Все производные функции S_p должны быть периодическими функциями от w, т. е. функция S_p должна иметь вид

$$\alpha_{1,p} w_1 + \alpha_{2,p} w_2 + \ldots + \alpha_{n,p} w_n + \varphi,$$

где $\alpha_{k,p}$ — константы, а φ — периодическая функция.

Функцию S_p можно найти из уравнения (11) с помощью вычислений, вполне аналогичных интегрированию уравнения (6). Добавлю, что вид зависимости и констант $\alpha_{k,p}$ от констант x_i^0 можно выбирать произвольно, поскольку правая часть уравнения (11) сама произвольна.

После того как функция S_p найдена, находим из уравнений (10) величины x_k^p, средние значения $\alpha_{k,p}$ которых, как мы только что видели, можно выбирать произвольным образом.

Получив функции x_i^p, приравняем коэффициенты при μ^p в правой и левой частях уравнения (1). Имеем

$$\sum n_k^0 \frac{dy_i^p}{dw_k} = \Phi - n_i^p. \tag{12}$$

Прежде всего определим константы n_i^p так, чтобы среднее значение правой части уравнения (12) было равно нулю. С помощью вычислений, вполне аналогичных вычислениям п. 127, найдем из уравнения (12) функции y_i^p. Заметим, между прочим, что вид зависимости среднего значения y_i^p от x_i^p можно выбирать произвольно.

Другой пример

159. Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n,$$
$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

- n пар сопряженных переменных.

Предположим, что функцию F можно разложить по возрастающим степеням ξ_i и η_i и что в ее разложении нет членов ни нулевой, ни первой степени, а члены второй степени можно записать в виде

$$\sum A_i (\xi_i)^2 + \sum A_i (\eta_i)^2.$$

Я записал квадрат величины ξ_i в скобках $(\xi_i)^2$, чтобы не путать его с обозначением ξ_i^2, которым мы воспользуемся несколько позднее. В этом случае 2 будет являться уже не показателем степени, а индексом.

Пусть

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dF}{d\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{dF}{d\xi_i} \tag{1}$$

— наши дифференциальные уравнения.

Предположим, что ξ_i и η_i можно разложить по степеням некоторых постоянных интегрирования α_i, и запишем

$$\xi_i = \xi_i^1 + \xi_i^2 + \ldots + \xi_i^p + \ldots,$$
$$\eta_i = \eta_i^1 + \eta_i^2 + \ldots + \eta_i^p + \ldots.$$

Функцию S_p можно найти из уравнения (11) с помощью вычислений, вполне аналогичных интегрированию уравнения (6). Добавлю, что вид зависимости и констант $\alpha_{k,p}$ от констант x_i^0 можно выбирать произвольно, поскольку правая часть уравнения (11) сама произвольна.

После того как функция S_p найдена, находим из уравнений (10) величины x_k^p, средние значения $\alpha_{k,p}$ которых, как мы только что видели, можно выбирать произвольным образом.

Получив функции x_i^p, приравняем коэффициенты при μ^p в правой и левой частях уравнения (1). Имеем

$$\sum n_k^0 \frac{dy_i^p}{dw_k} = \Phi - n_i^p. \tag{12}$$

Прежде всего определим константы n_i^p так, чтобы среднее значение правой части уравнения (12) было равно нулю. С помощью вычислений, вполне аналогичных вычислениям п. 127, найдем из уравнения (12) функции y_i^p. Заметим, между прочим, что вид зависимости среднего значения y_i^p от x_i^p можно выбирать произвольно.

Другой пример

159. Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n,$$
$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

— n пар сопряженных переменных.

Предположим, что функцию F можно разложить по возрастающим степеням ξ_i и η_i и что в ее разложении нет членов ни нулевой, ни первой степени, а члены второй степени можно записать в виде

$$\sum A_i (\xi_i)^2 + \sum A_i (\eta_i)^2.$$

Я записал квадрат величины ξ_i в скобках $(\xi_i)^2$, чтобы не путать его с обозначением ξ_i^2, которым мы воспользуемся несколько позднее. В этом случае 2 будет являться уже не показателем степени, а индексом.

Пусть

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dF}{d\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{dF}{d\xi_i} \tag{1}$$

— наши дифференциальные уравнения.

Предположим, что ξ_i и η_i можно разложить по степеням некоторых постоянных интегрирования α_i, и запишем

$$\xi_i = \xi_i^1 + \xi_i^2 + \ldots + \xi_i^p + \ldots,$$
$$\eta_i = \eta_i^1 + \eta_i^2 + \ldots + \eta_i^p + \ldots.$$

Прежде всего нетрудно найти, что

$$n_k^0 = -2A_k.$$

Заметим затем, что из уравнений (2) следует, что

$$\sum_k n_k \frac{dx_i}{dw_k} = \frac{dF}{d\eta_i}\cos w_i - \frac{dF}{d\xi_i}\sin w_i - n_i y_i, \tag{3}$$

$$\sum_k n_k \frac{dy_i}{dw_k} = \frac{dF}{d\eta_i}\sin w_i + \frac{dF}{d\xi_i}\cos w_i + n_i x_i. \tag{4}$$

Теперь мы вычислим ряды с помощью уравнения (4), уравнения

$$F = \text{const}, \tag{5}$$

и

$$\frac{dS}{dw_k} = \sum \xi_i \frac{d\eta_i}{dw_k} - \sum \frac{d(\xi_i^1 \eta_i)}{dw_k}. \tag{6}$$

Решить уравнение (3), а следовательно, и вытекающие из него уравнения (2) и (1), весьма несложно.

Предположим, что мы уже нашли величины

$$\begin{gathered}
\xi_i^1, \ \xi_i^2, \ldots, \xi_i^{p-1}; \\
\eta_i^1, \eta_i^2, \ldots, \eta_i^{p-1}; \\
x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^{p-1}; \\
y_i^1, y_i^2, \ldots, y_i^{p-1}; \\
n_k^0, n_k^1, \ldots, n_k^{p-2}; \\
S_1, S_2, \ldots, S_p
\end{gathered}$$

и что требуется найти

$$\xi_i^p, \ \eta_i^p, \ x_i^p, \ y_i^p, \ n_k^{p-1}, \ S_{p+1}.$$

Приравняем в уравнении (4) члены порядка p в правой и левой частях, а в правых и левых частях уравнений (5) и (6) — члены $(p+1)$-го порядка.

Так же, как и в предыдущей главе, я обозначу для краткости

$$\Delta u = \sum n_k^0 \frac{du}{dw_k}.$$

Тогда

$$\Delta y_i^p = \Phi + 2A_i(\xi_i^p \cos w_i + \eta_i^p \sin w_i) + n_i^0 x_i^p + n_i^{p-1} x_i^1, \tag{7}$$

$$\sum 2A_i(\xi_i^1 \xi_i^2 + \eta_i^1 \eta_i^2) + \Phi + \text{const} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{dS_{p+1}}{dw_k} = \sum \xi_i^p \frac{d\eta_i^1}{dw_k} - \sum \eta_i^p \frac{d\xi_i^1}{dw_k} + \Phi.$$

Заметив, что

$$d\xi_i^1 = -\eta_i^1 dw_i, \qquad d\eta_i^1 = \xi_i dw_i,$$

мы сможем записать

$$\frac{dS_{p+1}}{dw_k} = \xi_k^1 \xi_k^p + \eta_k^1 \eta_k^p + \Phi. \tag{9}$$

Комбинируя уравнения (8) и (9), получим

$$\Delta S_{p+1} = \Phi + \text{const}. \tag{10}$$

С другой стороны, уравнение (9) можно записать в виде

$$\frac{dS_{p+1}}{dw_k} = \alpha_k x_k^p + \Phi, \tag{11}$$

а уравнение (7) — в виде

$$\Delta y_i^p = \Phi + n_i^{p-1}\alpha_i. \tag{12}$$

Тогда из уравнения (10) найдем S_{p+1}. Уравнение (11) даст x_k^p. Записывая условие того, что среднее значение правой части уравнения (12) равно нулю, получим n_i^{p-1}, а затем из уравнения (12) найдем y_i^p. Зная таким образом y_i^p и x_i^p, получим ξ_i^p и η_i^p.

Для того чтобы найти эти величины, можно было бы воспользоваться следующими уравнениями, которые получаются, если приравнять в уравнении (2) члены порядка p в правой и левой частях и проделать то же самое с уравнением (9) из п. 152

$$\Delta\xi_i^p = 2A_i\eta_i^p + n_i^{p-1}\eta_i^1 + \Phi, \tag{13}$$

$$\Delta\eta_i^p = -2A_i\xi_i^p - n_i^{p-1}\xi_i^1 + \Phi. \tag{14}$$

С помощью рассуждений, вполне аналогичных рассуждениям п. 153, можно было бы показать, что ξ_i^p и η_i^p допускают разложение по степеням величин

$$\alpha_i \cos w_i, \qquad \alpha_i \sin w_i$$

и что то же относится и к $n_i^{(0)}$ (т. е. эти величины, не зависящие от w_i, можно разлагать по *четным* степеням α_i).

В силу уравнения (10) то же справедливо и для периодических членов функций S_{p+1}.

Известно, что

$$S_{p+1} = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_n w_n + S'_{p+1},$$

где β_k — константы, а S'_{p+1} — периодическая функция. Уравнение (10) и рассуждения, аналогичные тем, которые проводились в п. **153**, дают нам возможность убедиться в том, что относительно S'_{p+1} условие выполнено. Что же касается величин β_k, то их можно выбирать произвольно. Следовательно, можно предположить, что β_k разлагаются по четным степеням α_i и делятся на $(\alpha_k)^2$.

Повторять здесь рассуждения, которыми мы воспользовались в п. **153**, было бы излишним.

Мы лишь коротко остановимся на том, что происходит при рассмотрении уравнения (11). Это уравнение доставляет нам величину $\alpha_k x_k^p$. Разумеется, эта величина должна делиться на α_k (действительно, я уже говорил, что dS_{p+1}/dw_k и Φ делятся на α_k.)

Замечу, что если φ является функцией, допускающей разложение по степеням $\alpha_i \cos w_i$ и $\alpha_i \sin w_i$, и мы разложим ее в тригонометрический ряд, то коэффициент при косинусе или синусе аргумента

$$m_1 w_1 + m_2 w_2 + \ldots + m_n w_n$$

в этом разложении будет делиться на

$$\alpha_1^{|m_1|}\, \alpha_2^{|m_2|} \ldots \alpha_n^{|m_n|}.$$

В силу этого коэффициенты при членах, зависящих от w_k, будут делиться на α_k, следовательно, производная $d\varphi/dw_k$ делится на α_k.

Но

$$\frac{dS_{p+1}}{dw_k} = \beta_k + \frac{dS'_{p+1}}{dw_k},$$

причем β_k выбрано так, чтобы оно делилось на α_k, а производная dS'_{p+1}/dw_k, как мы только что видели, также должна делиться на α_k. Следовательно, производная dS_{p+1}/dw_k делится на α_i.

С другой стороны, Φ представляет собой сумму членов, каждый из которых является произведением сомножителей вида

$$\frac{d\xi_i^p}{dw_k} \quad \text{или} \quad \frac{d\eta_i^p}{dw_k}$$

и, следовательно, делится на α_k.

Поэтому и функция Φ делится на α_i, что и требовалось доказать.

160. Предположим, что F зависит от малого параметра μ и

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots .$$

Я по-прежнему исхожу из предположения о том, что F разлагается по степеням ξ_i и η_i и что разложение F_0 начинается с членов второго порядка,

которые можно записать в виде

$$\sum A_i (\xi_i)^2 + \sum A_i (\eta_i)^2.$$

Однако относительно разложений функций F_1, F_2,... я предполагаю, что они начинаются с членов первого порядка.

Я намереваюсь разложить

$$\xi_i,\ \eta_i,\ x_i,\ y_i,\ n_k,\ S$$

не только по степеням констант α_k, но и по степеням μ.

Символами

$$\xi_i^{p,q},\ \eta_i^{p,q},\ x_i^{p,q},\ y_i^{p,q},\ n_k^{p,q},\ S_{p,q}$$

я обозначу члены p-го порядка относительно α_i и q-го порядка относительно μ.

Тогда

$$\xi_i^{0,0} = \eta_i^{0,0} = 0,$$

$$\xi_i^{1,0} = \alpha_i \cos w_i, \qquad \eta_i^{1,0} = \alpha_i \sin w_i,$$

$$n_k^{0,0} = -2A_k.$$

Поэтому

$$dS = \sum \xi_i d\eta_i - \sum d(\xi_i^{1,0}\eta_i),$$

откуда

$$S_{0,0} = S_{1,0} = 0,$$

$$S_{2,0} = \frac{1}{2}\sum (\alpha_i)^2 w_i - \frac{1}{4}\sum (\alpha_i)^2 \sin 2w_i.$$

Предположим, что мы уже вычислили

$$\xi_i^{a,b},\ \eta_i^{a,b},\ x_i^{a,b},\ y_i^{a,b},\ n_k^{a+1,b},\quad S_{a+1,b}$$

$$(a \leqslant p,\ a+b \leqslant p+q),$$

a и b могут принимать все значения, кроме $a = p$, $b = q$. Пусть требуется вычислить

$$\xi_i^{p,q},\ \eta_i^{p,q},\ x_i^{p,q},\ y_i^{p,q},\ n_k^{p-1,q},\ S_{p+1,q}.$$

Обратимся еще раз к уравнениям (1) — (6) предыдущего пункта. Приравняем в правой и левой частях уравнения (4) члены порядка p относительно α_i и порядка q относительно μ. В уравнениях (5) и (6) мы точно таким же образом приравняем члены, имеющие порядок $p+1$ относительно

α_i и порядок q относительно μ. Пусть

$$\Delta u = \sum n_k^{0,0} \frac{du}{dw_k}.$$

Тогда мы снова получим уравнения (7) — (14) предыдущего пункта с тем лишь различием, что вместо простых индексов (верхних или нижних) p, $p+1$ или $p-1$ будут фигурировать двойные индексы p, q, $p+1$, q или $p-1$, q, а вместо простых индексов 1 или 0 появятся двойные индексы 1,0 или 0,0.

Так же, как и в предыдущем пункте, воспользуемся этими уравнениями для того, чтобы последовательно найти $S_{p+1,q}$, $x_k^{p,q}$, $n_i^{p-1,q}$, $y^{p,q}$, а следовательно, и $\xi_i^{p,q}$, и $\eta_i^{p,q}$.

Ясно, что так же, как в п. **153**, величины $\xi_i^{p,q}$ и $\eta_i^{p,q}$ можно будет разлагать по степеням

$$\alpha_k \cos w_k \text{ и } \alpha_k \sin w_k.$$

Отсюда следует, что $\xi_i^{0,q}$ и $\eta_i^{0,q}$ константы.

С другой стороны, необходимо обратить внимание на то, что замечание, сделанное в п. **126**, в силу которого средние значения x_i^p и y_i^p можно выбирать произвольным образом, в рассматриваемом случае применимо лишь при некоторых ограничениях.

В самом деле, обратимся еще раз к рассуждениям, изложенным в п. **126**. Рассмотрим разложения ξ_i и η_i по степеням μ и α_i.

Заменим α_i и w_i на

$$\alpha_i(1+\varphi_i), \quad w_i + \psi_i.$$

В этих выражениях φ_i и ψ_i — две функции, допускающие разложение по степеням μ и $(\alpha_k)^2$, которые равны нулю всякий раз, когда эти величины обращаются в нуль. Величины $\xi_i^{0,q}$ и $\eta_i^{0,q}$ при произведенной замене не изменятся. Отсюда следует, что средние значения величин

$$x_i^{p,q}, \; y_i^{p,q} \quad (p>0)$$

можно выбирать произвольно, чего нельзя сказать о средних значениях величин

$$x_i^{0,q}, \; y_i^{0,q}.$$

Нетрудно видеть, что средние значения последних должны быть равными нулю.

Предположим теперь, что мы снова возвратились к уравнениям (1) — (6) п. **159** и рассматриваем в уравнениях (1) — (4) члены нулевого порядка относительно α_i, а в уравнениях (5) и (6) члены нулевого или пер-

вого порядка относительно α_i. Получим уравнения, форма которых будет несколько отличаться от уравнений (7) — (14). Следовательно, необходимо рассмотреть их особо.

Различие в форме уравнений проявляется прежде всего в том, что $n_i^{p-1,q}$ равно нулю, если $p = 0$, а с другой стороны, в том, что $\xi_i^{0,q}$ и $\eta_i^{0,q}$ становятся константами,

$$\Delta\xi_i^{0,q} = \Delta\eta_i^{0,q} = 0.$$

Достаточно рассмотреть уравнения (1), (2), (5) и (6), из которых уравнения (3) и (4) следуют тотчас же. Введем для краткости обозначения

$$\xi_i^0 = \xi_i^{0,1} + \xi_i^{0,2} + \ldots,$$
$$\xi_i^1 = \xi_i^{1,0} + \xi_i^{1,1} + \xi_i^{1,2} + \ldots.$$

Точно таким же образом определим η_i^0 и η_i^1. Пусть F^* означает функцию, которая получается в результате подстановки ξ_i^0 и η_i^0 в F вместо ξ_i и η_i.

Тогда в уравнениях (1) и (2) члены нулевого порядка дадут нам

$$\frac{dF^*}{d\xi_i^0} = \frac{dF^*}{d\eta_i} = 0.$$

Эти два уравнения дают нам возможность последовательно найти $\xi_i^{0,q}$ и $\eta_i^{0,q}$.

Члены нулевого и первого порядка в уравнении (5) дают

$$F^* = \text{const},$$
$$\frac{dF^*}{d\xi_i^0}\,\xi_i^1 + \frac{dF^*}{d\eta_i^0}\,\eta_i^1 = \text{const}.$$

Первое из этих уравнений позволяет определить константу, стоящую в его правой части [в этом случае ее уже нельзя выбирать произвольно, как это можно было сделать с константой, входящей в уравнение (8), когда предполагалось, что $p > 1$].

Разумеется, второе уравнение удовлетворяется и константа, стоящая в его правой части, равна нулю, поскольку обе производные от F^* равны нулю.

Остается уравнение (6). Рассматривая члены нулевого порядка, получим

$$d\,(S_{0,0} + S_{0,1} + S_{0,2} + \ldots) = 0,$$

так как η_i^0 — константы и $d\eta_i^0 = 0$. Чтобы это уравнение выполнялось, достаточно предположить, что $S_{0,q}$ — константы.

Члены первого порядка приводят к соотношению

$$d(S_{1,0}+S_{1,1}+S_{1,2}+\ldots)=\sum\xi_i^0 d\eta_i-\sum d\xi_i^{1,0}\eta_i^0.$$

Чтобы удовлетворить этому уравнению, достаточно предположить, что

$$S_{1,q}=\sum(\xi_i^{0,1}\eta_i^{1,\,q-1}+\xi_i^{0,2}\eta_i^{1,\,q-2}+\ldots+\xi_i^{0,\,q}\eta_i^{1,0})-\sum(\xi_i^{1,0}\eta_i^{0,\,q}).$$

Итак, члены нулевого и первого порядка не приводят ни к каким затруднениям, как можно было опасаться.

Задача п. 134

161. Очевидно, этот же метод можно применить и к задаче из п. 134. Мы снова будем использовать обозначения, введенные в п. 151.

Обратимся еще раз к уравнениям (1) — (6) из п. 158, условившись, что знаки Σ означают суммирование не только по всем x_i (либо по всем y_i, либо же по всем w_i и т. д.), но одновременно по x_i и x_i' (либо по y_i и y_i', либо по w_i и w_i' и т. д.).

Так же, как и в п. 158, заметим тогда, что уравнения (2) будут следовать из уравнений (1), (3), (4) и (6). Поэтому рассмотрим уравнения (4), (6) и (1), которые послужат для нахождения неизвестных.

Так же, как и в п. 158, заменим в этих уравнениях функции x_i, y_i, n_i и S их разложениями по степеням μ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ в правой и левой частях этих уравнений.

Однако я пользовался не только теми уравнениями, которые получаются, если приравнять коэффициенты при одинаковых степенях μ. Точно так же я использовал и те уравнения, которые возникают, если приравнять в правой и левой частях уравнений средние значения, но усреднение производить только по w_k (но не по w_k').

Пусть U — произвольная функция, периодическая по w и w'. Через $[U]$ я так же, как и в п. 151, обозначу ее среднее значение, вычисленное только по w, а через $[[U]]$ — ее среднее значение по w и w' одновременно.

Тогда

$$\frac{d[U]}{dw_k}=0,$$

однако в общем случае

$$\frac{d[U]}{dw_k'}\neq 0.$$

Что же касается функции S, то она будет не периодической функцией, а всего лишь функцией, производные которой периодичны.

Поэтому мы получаем только соотношение

$$\left[\frac{dS}{dw_k}\right] = \text{const.}$$

Предположим теперь, что мы уже полностью вычислили

$$x_i^0,\ x_i^1,\ x_i^2,\ \ldots,\ x_i^{p-2},$$
$$y_i^0,\ y_i^1,\ \ldots,\ y_i^{p-2},$$
$$n_k^0,\ n_k^1,\ \ldots,\ n_k^{p-2},$$
$$S_0,\ S_1,\ \ldots,\ S_{p-2},$$

а x_i^{p-1}, y_i^{p-1} и S_{p-1} — *с точностью до произвольной функции от* w' и что требуется завершить вычисление x_i^{p-1}, y_i^{p-1}, и S_{p-1} и полностью найти n_k^p, а функции x_i^p, y_i^p и S_p — *с точностью произвольной функции* w'.

Уравнение (9) из п. **158**, которое получается, если приравнять в уравнении (4) члены, стоящие при μ^p, имеет несколько иной вид, поскольку его правая часть уже не будет полностью известна. Это уравнение запишется в виде

$$\sum n_k^0 x_k^p = \sum \frac{dF_1}{dy_i^0}\, y_i^{p-1} + \sum \frac{dF_1}{dx_i^0}\, x_i^{p-1} + \Phi + \text{const.} \qquad (9\,\text{bis})$$

В случае $p = 1$ имеем

$$\sum n_k^0 x_k^1 = F_1 + \text{const.} \qquad (9\,\text{ter})$$

Разумеется, мы предполагаем, что вместо x_i и y_i в F подставлены x_i^0 и $y_i^0 = w_i$.

Правую часть уравнения (9 bis) нельзя считать полностью известной, поскольку x_i^{p-1} и y_i^{p-1} известны лишь с точностью до произвольных функций от w'.

Рассмотрим теперь уравнение (10) п. **158**. И в этом случае правую часть нельзя считать полностью известной, ее вид несколько изменился и мы запишем, что

$$\frac{dS_p}{dw_k} = x_k^p + \sum_i x_i^{p-1}\,\frac{dy_i^1}{dw_k} + \sum x_i^1 \frac{dy_i^{p-1}}{dw_k} + \Phi. \qquad (10\,\text{bis})$$

Если учесть, что величины

$$x_i^{p-1} - [x_i^{p-1}] \quad \text{и} \quad y_i^{p-1} - [y_i^{p-1}]$$

известны, то уравнения (9bis) и (10bis) можно записать в виде

$$\sum n_k^0 x_k^p = \sum \frac{dF_1}{dy_i^0}[y_i^{p-1}] + \sum \frac{dF_1}{dx_i^0}[x_i^{p-1}] + \Phi + \text{const}, \tag{9a}$$

$$\frac{dS_p}{dw_k} = x_k^p + \sum_i [x_i^{p-1}] \frac{dy_i^1}{dw_k} + \sum_i x_i^1 \frac{d[y_i^{p-1}]}{dw_k} + \Phi. \tag{10a}$$

Очевидна роль, которую играет производная dy_i^1/dw_k. Поэтому следует прежде всего найти эту величину путем подробного рассмотрения первого приближения. Для этого имеется записанное выше уравнение (9ter) и уравнение

$$\frac{dS_1}{dw_k} = x_k^1, \tag{10ter}$$

так что уравнение (9ter) можно переписать в виде

$$\sum n_k^0 \frac{dS_1}{dw_k} = F_1 + \text{const}.$$

Замечу, что величины n_k^0 равны нулю, и, следовательно, я могу записать

$$\mathrm{S}\, n_k^0 \frac{dS_1}{dw_k} = F_1 + \text{const}, \tag{9b}$$

условившись обозначать символом S суммирование только по x_i или только по x_i', в то время как Σ означает, как мы условились выше, суммирование, проводимое одновременно по x_i и x_i'. Если вычислить средние значения правой и левой частей уравнения, то поскольку

$$\left[\frac{dS_1}{dw_k}\right] = \text{const},$$

получим

$$[F_1] = \text{const}.$$

Но среднее значение $[F_1]$ есть функция R, зависящая лишь от x_i^0 и $x_i'^0$. Так как эти константы произвольны, константа в правой части уравнения (9b) также произвольна, и это уравнение интегрируется без труда.

Приравняем теперь члены первого порядка в правой и левой частях уравнения (1bis), тогда

$$\sum_k n_k^0 \frac{dw_i^1}{dw_k} + n_i^1 = -\sum_k \frac{d^2F_0}{dx_i^0 dx_k^0} x_k^1 - \frac{dF_1}{dx_i^0}.$$

Правая часть этого уравнения полностью известна. В самом деле, она зависит лишь от x_i^0 и $y_i^0 = w_i$. Левая же часть этого уравнения по-

мимо прочего зависит от x_k^1 (и не зависит от $x_k'^1$, поскольку по предположению функция F_0 не зависит от x_i'); величины x_k^1 равны производным dS_1/dw_k, которые известны, ибо S_1 определена с точностью до произвольной функции от w_k'.

Кроме того, среднее значение правой части, вычисленное только по w_i, является константой.

В самом деле, это среднее значение равно

$$-\sum \frac{d^2F_0}{dx_i^0 dx_k^0}[x_k^1] - \frac{d[F_1]}{dx_i^0}.$$

Но

$$[x_k^1] = \left[\frac{dS_1}{dw_k}\right] = \text{const},$$

$$\frac{d[F_1]}{dx_i^0} = \frac{dR}{dx_i^0} = \text{const},$$

ибо R зависит лишь от x_i^0 и $x_i'^0$, которые являются константами.

Итак, среднее значение правой части является константой, которую мы можем приравнять n_i^1. Точно таким же образом вычислим $n_i'^1$, только в этом случае первый член обращается в нуль, и мы получим лишь

$$n_i'^1 = -\frac{dR}{dx_i'^0}.$$

Это уравнение интегрируется без труда, и мы получаем y_i^1 с точностью до произвольной функции от w'.

То, что я говорил об y_i^1, без всяких изменений переносится и на $y_i'^1$. Что же касается величин $x_i'^1$, то они равны dS_1/dw_i' и, следовательно, известны с точностью до произвольной функции от w'.

Возвратимся к уравнениям (9а) и (10а).

Вычислим средние значения правых и левых частей только по w, причем сначала произведем выкладки для (10а), предположив, что производная dS_p/dw_k взята по одной из величин w_k, а не по w_k'

$$\left[\frac{dS_p}{dw_k}\right] = \text{const}, \qquad \frac{d[y_i^{p-1}]}{dw_k} = 0,$$

$$\left[[x_i^{p-1}]\frac{dy_i^1}{dw_k}\right] = [x_i^{p-1}]\left[\frac{dy_i^1}{dw_k}\right] = 0,$$

откуда, наконец,

$$[x_k^p] = \Phi + \text{произвольная константа}. \qquad (10c)$$

Такие же операции произведем и над уравнением (9а), тогда (с учетом $n_k'^0 = 0$)

$$\sum n_k^0 x_k^p = \mathrm{S}\, n_k^0 x_k^p,$$

$$\left[\frac{dF_1}{dy_i^0}\right] = \frac{dR}{dy_i^0} = 0,$$

$$\left[\frac{dF_1}{dx_i^0}\right] = \frac{dR}{dx_i^0} = \text{некоторая известная константа.}$$

Итак, мы имеем

$$\mathrm{S}\, n_k^0 [x_k^p] = \sum \frac{dR}{dx_i^0} [x_i^{p-1}] + \Phi + \text{const}, \tag{9c}$$

откуда с учетом (10с)

$$\sum \frac{dR}{dx_i^0} [x_i^{p-1}] = \Phi + \text{const}$$

или

$$\mathrm{S} \frac{dR}{dx_i^0} [x_i^{p-1}] + \mathrm{S} \frac{dR}{dx_i'^0} [x_i'^{p-1}] = \Phi + \text{const}.$$

Но $[x_i^{p-1}]$ известно с точностью до некоторой постоянной. В самом деле, заменив p на $p - 1$, получаем уравнение, аналогичное уравнению (10с),

$$[x_k^{p-1}] = \Phi + \text{const}.$$

Учитывая равенство

$$n_i'^1 = -\frac{dR}{dx_i'^0},$$

можем записать

$$\mathrm{S}\, n_i'^1 [x_i'^{p-1}] = \Phi + \text{const}.$$

Вернемся теперь к уравнению (10а), но заменим w_k на w_k' и p на $p - 2$

Если учесть, что $[x_i^{p-2}]$ и $[y_i^{p-2}]$ известны, то это уравнение можно записать в виде

$$\frac{dS_{p-1}}{dw_k'} = x_k'^{p-1} + \Phi. \tag{10d}$$

Функция S_{p-1} представляет собой сумму членов, из которых одни периодичны по w и w', другие равны некоторой константе, умноженной на w или w'.

Именно это и вытекает из высказанной выше гипотезы о том, что производные от функции S_{p-1} периодичны.

Если в этой сумме мы отбросим все члены, которые зависят от w, то оставшиеся члены образуют функцию, зависящую от w', которую мы можем обозначить символом $[S_{p-1}]$. Поскольку мы предполагали, что функция S_{p-1} известна с точностью до произвольной функции от w', можно сказать, что мы знаем разность $S_{p-1} - [S_{p-1}]$, но отнюдь не $[S_{p-1}]$.

Тогда

$$\frac{d[S_{p-1}]}{dw'_k} = [x'^{p-1}_k] + \Phi$$

и, следовательно,

$$\mathrm{S}\, n'^1_i \frac{d[S_{p-1}]}{dw'_i} = \Phi + \text{const.}$$

Это уравнение определяет $[S_{p-1}]$. Таким образом, функция S_{p-1} полностью известна.

Теперь величины x^{p-1}_k и x'^{p-1}_k определяются из уравнения (10d) и аналогичного уравнения

$$\frac{dS_{p-1}}{dw_k} = x^{p-1}_k + \Phi.$$

Приравняем теперь в правой и левой частях уравнения (1bis) п. 158 члены p-го порядка. Тогда

$$\sum n^0_k \frac{dy^p_i}{dw_k} + \sum n^1_k \frac{dy^{p-1}_i}{dw_k} + n^p_i = \Phi + A + B. \qquad (12\text{bis})$$

Здесь A означает коэффициент при μ^p в производной $-dF_0/dx_i$, а B — коэффициент при μ^p в $-dF_1/dx_i$.

Функция F_0 зависит только от величин x_i, которые полностью известны до x^{p-1}_i включительно. Поэтому можно записать, что

$$A = \Phi - \mathrm{S} \frac{d^2F_0}{dx^0_i dx^0_k} x^p_k.$$

Члены x^{p-1}_i точно так же полностью известны. Имеем

$$B = \Phi - \sum_\kappa \frac{d^2F_1}{dy^0_k dx^0_i} y^{p-1}_k$$

или (поскольку нам известна разность $y^{p-1}_k - [y^{p-1}_k]$)

$$B = \Phi - \sum_k \frac{d^2F_1}{dy^0_k dx^0_i} [y^{p-1}_k].$$

С другой стороны, n'^0_k равны нулю, а поскольку y_i^{p-1} известны с точностью до произвольной функции от w', то

$$\sum n_k^0 \frac{dy_i^p}{dw_k} = \mathrm{S}\, n_k^0 \frac{dy_i^p}{dw_k},$$

$$\sum n_k^1 \frac{dy_i^{p-1}}{dw_k} = \Phi + \mathrm{S}\, n'^1_k \frac{dy_i^{p-1}}{dw'_k},$$

откуда

$$\mathrm{S}\, n_k^0 \frac{dy_i^p}{dw_k} + \mathrm{S}\, n_k^1 \frac{dy_i^{p-1}}{dw'_k} + n_i^p = \Phi - \sum \frac{d^2F_0}{dx_i^0 dx_k^0}[y_k^{p-1}]. \quad (12a)$$

Вычислим теперь средние значения правой и левой части, заметив, что

$$\left[\frac{d^2F_1}{dy_k^0 dx_i^0}\right] = \left[\frac{d^2R}{dy_k^0 dx_i^0}\right] = 0.$$

Получим

$$\mathrm{S}\, n'^1_k \frac{d[y_i^{p-1}]}{dw'_k} = \Phi - \sum \frac{d^2F_0}{dx_i^0 dx_k^0}[x_k^p] - n_i^p. \quad (12b)$$

Выше мы нашли (10c)

$$[x_k^p] = \Phi + \text{произвольная постоянная}.$$

Это означает, что $[x_k^p]$ известно, поскольку константу в правой части уравнения (10c) можно выбирать произвольно. Следовательно,

$$\mathrm{S}\, n'^1_k \frac{d[y_i^{p-1}]}{dw'_k} = \Phi - n_i^p. \quad (12c)$$

Величинами n_i^p можно воспользоваться для того, чтобы обратить в нуль среднее значение правой части (12c), после чего это уравнение без труда интегрируется, и мы получаем $[y_i^{p-1}]$.

Таким же образом вычисляют $n_i'^p$ и $[y_i'^{p-1}]$, так что x_i^{p-1}, $x_i'^{p-1}$, y_i^{p-1}, $y_i'^{p-1}$ становятся теперь полностью известными функциями.

После этого уравнения (9bis) и (10bis) можно записать так:

$$\sum n_k^0 x_k^p = \mathrm{S}\, n_k^0 x_k^p = \Phi + \text{const}, \quad (9e)$$

$$\frac{dS_p}{dw_k} = x_k^p + \Phi, \quad (10e)$$

$$\frac{dS_p}{dw'_k} = x'^p_k + \Phi, \quad (10f)$$

откуда следует уравнение

$$\mathrm{S} n_k^0 \frac{dS_p}{dw_k} = \Phi + \text{ произвольная постоянная},$$

задающее S_p с точностью до некоторой неизвестной функции от w' (ибо ранее мы выбрали $[S_{p-1}]$ так, чтобы среднее значение правой части было равно некоторой постоянной). Иначе говоря, это уравнение определяет $S_p - [S_p]$.

Затем из уравнений (10e) и (10f) мы находим x_k^p и $x_k'^p$ с точностью до функций от w'. Иначе говоря, эти уравнения определяют разности $x_k^p - [x_k^p]$, $x_k'^p - [x_k'^p]$.

Добавлю еще, что $[x_k^p]$ нам уже известно из уравнения (10c). Таким образом, мы уже полностью знаем x_k^p, но отнюдь не $x_k'^p$.

Уравнение (12a) принимает вид

$$\mathrm{S} n_k^0 \frac{dy_i^p}{dw_k} = \Phi. \tag{12d}$$

Среднее значение правой части уравнения (12c) равно нулю в силу уравнения (12b), отсюда находим

$$y_i^p - [y_i^p].$$

Таким же образом вычисляем и

$$y_i'^p - [y_i'^p].$$

Задача трех тел

162. Выберем в качестве независимых переменных

$$\Lambda,\ \Lambda',\ \sigma_i,$$
$$\lambda_1,\ \lambda_1',\ \tau_i.$$

Так же, как в п. 152, будем отбрасывать лишние индексы и вместо λ_1 и λ'_1 писать λ и λ'.

Попытаемся теперь удовлетворить уравнениям задачи трех тел, подставляя вместо каждой из этих переменных разложения (4) из п. 152 и (17) из п. 155 и располагая их по степеням μ и некоторых констант, обозначенных мной в пунктах 152 и 155 через x_i^0 и $x_i'^0$. По аналогии с обозначениями п. 159 и во избежание недоразумений я буду здесь обозначать эти постоянные через α_i.

Получим

$$\Lambda_{0,0} = \text{const}, \quad \Lambda'_{0,0} = \text{const}, \quad \lambda_{0,0} = w_1, \quad \lambda'_{0,0} = w_2;$$
$$\Lambda_{0,q} = \Lambda'_{0,q} = \lambda_{0,q} = \lambda'_{0,q} = 0 \qquad (q > 0);$$
$$\sigma_i^{0,0} = \tau_i^{0,0} = 0;$$
$$\sigma_i^{0,1} = \alpha_i \cos w'_i; \quad \tau_i^{0,1} = \alpha_i \sin w'_i.$$

Прежде всего следует записать уравнение, которое должно быть аналогичным уравнению (6) из п. 158 и уравнению (6) из следующего пункта.

Таким уравнением будет

$$\frac{dS}{dw_k} = (\Lambda - \Lambda_{0,0}) \frac{d\lambda}{dw_k} + (\Lambda' - \Lambda'_{0,0}) \frac{d\lambda'}{dw_k} + \sum \sigma_i \frac{d\tau_i}{dw_k} - \sum \frac{d(\sigma_i^{0,1}\tau_i)}{dw_k} \qquad \text{(6bis)}$$

вместе с аналогичным уравнением, которое получится, если w_k заменить на w'_k.

К уравнению (6bis) и интегралу живых сил

$$F = \text{const} \qquad \text{(4bis)}$$

добавим следующие уравнения. Во-первых, уравнение

$$\frac{d\lambda}{dt} = \sum_k n_k \frac{d\lambda}{dw_k} = -\frac{dF}{d\Lambda}. \qquad \text{(1bis)}$$

К нему присовокупим еще одно уравнение того же вида, в котором вместо Λ и λ фигурируют Λ' и λ'.

Условимся раз и навсегда считать, что к каждому уравнению, не симметричному относительно Λ и Λ', λ и λ' и т. д., необходимо присоединить еще одно уравнение, в котором эти буквы переставлены. Знаки Σ и S сохраняют тот же смысл, что и в предыдущем пункте.

Во-вторых, у нас еще имеются уравнения, аналогичные уравнениям (4) из п. 159.

Чтобы их получить, положим так же, как и в п. 159,

$$x_i = \sigma_i \cos w'_i + \tau_i \sin w'_i,$$
$$y_i = \sigma_i \sin w'_i - \tau_i \cos w'_i,$$
$$x_i^{p,q} = \sigma_i^{p,q} \cos w'_i + \tau_i^{p,q} \sin w'_i, \ldots,$$

откуда

$$x_i^{0,1} = \alpha_i, \qquad y_i^{0,1} = 0.$$

Тогда

$$\sum_k n_k \frac{dx_i}{dw_k} = \frac{dF}{d\tau_i} \cos w_i' - \frac{dF}{d\sigma_i} \sin w_i' - n_i' y_i, \tag{7}$$

$$\sum_k n_k \frac{dy_i}{dw_k} = \frac{dF}{d\tau_i} \sin w_i' + \frac{dF}{d\sigma_i} \cos w_i' + n_i' x_i. \tag{8}$$

Ясно, что так же, как и раньше, уравнение

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{dF}{d\lambda}$$

и уравнения (7) являются следствиями уравнений (6bis), (4bis), (1bis) и (8). Следовательно, для решения задачи достаточно найти решение лишь последних уравнений.

Поставленная таким образом задача, сводящаяся к решению этих уравнений, содержит в себе все те трудности, которые мы по отдельности разрешали в предыдущих пунктах настоящей главы, и к ней применимы те же методы.

Для сокращения некоторых выражений я буду применять следующие обозначения:

$$\sigma_i^p = \sum_q \sigma_i^{p,q},$$

$$\sigma_i^{(q)} = \sum_p \sigma_i^{p,q}$$

[ср. разложения (17) п. 155].

Аналогичные обозначения я буду применять не только для σ_i, но и для других величин.

Условившись об этом, обратим прежде всего в нуль параметр μ во всех наших уравнениях. Уравнение (4bis) примет вид

$$F_0(\Lambda_0, \Lambda_0') = \text{const}. \tag{4a}$$

Поскольку постоянная в правой части произвольна, мы удовлетворим этому уравнению, положив Λ_0 и Λ_0' равными некоторым произвольным константам. Можно предположить так же, как мы делали ранее, что эти константы не зависят от α_i, т. е. что

$$\Lambda_{0,q} = 0 \text{ при } q > 0.$$

Затем из уравнения (6bis) получим

$$\frac{dS_0}{dw_k} = \sum \sigma_i^0 \frac{d\tau_i^0}{dw_k} - \sum \frac{d(\sigma_i^{0,1}\tau_i^0)}{dw_k}. \tag{6a}$$

Что же касается уравнения (1bis), то оно сведется к уравнениям

$$n_1^0 = -\frac{dF_0}{d\Lambda_0}$$

и (1a)

$$n_2^0 = -\frac{dF_0}{d\Lambda_0'}.$$

Из уравнений (7) и (8) получим

$$\sum n_k^0 \frac{dx_i^0}{dw_k} = -n_i'^0 y_i^0, \tag{7a}$$

$$\sum n_k^0 \frac{dy_i^0}{dw_k} = n_i'^0 x_i^0. \tag{8a}$$

Этим уравнениям можно удовлетворить, предположив, что величины $n_i'^0$ равны нулю, а x_i^0, y_i^0, σ_i и τ_i зависят не от w, а только от w'.

Определим теперь величину S_0 или, точнее,

$$S_0 - [S_0'].$$

Поскольку σ_i^0 и τ_i^0 не зависят от w, из уравнения (6a) получаем

$$\frac{dS_0}{dw_1} = \frac{dS_0}{dw_2} = 0.$$

Это означает, что S_0 не зависит от w, а зависит лишь от w'.

Рассмотрим теперь в уравнениях члены первого порядка по μ. Из уравнения (4bis) получим

$$\mathrm{S} n_i^0 \Lambda_1 = n_1^0 \Lambda_1 + n_2^0 \Lambda_1' = F_1 + \text{const}. \tag{4b}$$

Из уравнения (6bis) следует, что

$$\frac{dS_1}{dw_k} = \mathrm{S}\Lambda_1 \frac{d\lambda_0}{dw_k} + \sum \sigma_i^1 \frac{d\tau_i^0}{dw_k} + \sum \sigma_i^0 \frac{d\tau_i^1}{dw_k} - \sum \frac{d(\sigma_i^0, {}^1\tau_i^1)}{dw_k}. \tag{6b}$$

Первое слагаемое в правой части, очевидно, Λ_1 при $k = 1$ и Λ_1' при $k = 2$, ибо мы знаем, что

$$\lambda_0 = w_1, \qquad \lambda_0' = w_2.$$

По этой же причине, если заменить w_k на w_k', получим

$$\frac{dS_1}{dw_k'} = \sum \left[\sigma_i^1 \frac{d\tau_i^0}{dw_k'} + \sigma_i^0 \frac{d\tau_i^1}{dw_k'} - \frac{d(\sigma_i^0, {}^1\tau_i^1)}{dw_k'} \right]. \tag{6b'}$$

Ранее мы видели, что τ_i^0 не зависит ни от w_1, ни от w_2. То же относится и к σ_i^0. Следовательно,

$$\frac{d[S_1]}{dw_k} = \text{const}, \qquad \frac{d\tau_i^0}{dw_k} = 0, \qquad \left[\frac{d(\sigma_i^{0,1}\tau_i^1)}{dw_k}\right] = 0,$$

$$\left[\sigma_i^0 \frac{d\tau_i^1}{dw_k}\right] = [\sigma_i^0]\left[\frac{d\tau_i^1}{dw_k}\right] = 0.$$

Поэтому, переходя в уравнении (6b) к средним значениям в правой и левой частях, получим последовательно при $k = 1$ или 2

$$[\Lambda_1] = \left[\frac{dS_1}{dw_1}\right] = \text{const},$$

$$[\Lambda_1'] = \left[\frac{dS_1}{dw_2}\right] = \text{const}.$$

Если перейти к средним значениям в правой и левой частях уравнения (4b), то левая часть должна стать произвольной постоянной, значение которой может совпадать со значением константы, входящей в правую часть этого уравнения. В результате получаем соотношение

$$[F_1] = R = \text{const}. \tag{4c}$$

Предполагается, что в F_1 вместо Λ, λ, σ_i и τ_i подставлены Λ_0, λ_0, σ_i^0 и τ_i^0. В функции R переменные λ_0 и λ_0' исчезают, и R становится функцией от Λ_0, σ_i^0 и τ_i^0. Эту функцию можно разлагать по степеням σ_i^0 и τ_i^0. Наименьшую степень в этом разложении будут иметь члены второго порядка, их можно записать в виде

$$\sum A_i (\sigma_i^0)^2 + \sum A_i (\tau_i^0)^2.$$

Перейдем теперь к уравнению (1bis). Рассматривая члены первого порядка по μ, получим

$$\mathrm{S}\, n_k^0 \frac{d\lambda_1}{dw_k} + \mathrm{S}\, n_k^1 \frac{d\lambda_0}{dw_k} = -\frac{dF_1}{d\Lambda_0} - \frac{d^2F_0}{d\Lambda_0^2}\Lambda_1 - \frac{d^2F_0}{d\Lambda_0 d\Lambda_0'}\Lambda_1'. \tag{1b}$$

Переходя к средним значениям в правой и левой частях, найдем

$$n_1^1 = -\frac{dR}{d\Lambda_0} - \frac{d^2F_0}{d\Lambda_0^2}[\Lambda_1] - \frac{d^2F_0}{d\Lambda_0 d\Lambda_0'}[\Lambda_1']. \tag{1c}$$

Этим уравнением мы воспользуемся для нахождения n_1^1.

Перейдем теперь к уравнениям (7) и (8). Их можно записать в виде

$$\sum n_k^0 \frac{dx_i^1}{dw_k} + \sum n_k^1 \frac{dx_i^0}{dw_k} = \frac{dF_1}{d\tau_i^0} \cos w_i' - \frac{dF_1}{d\sigma_i^0} \sin w_i' - n_i'^1 y_i^0, \tag{7b}$$

$$\sum n_k^0 \frac{dy_i^1}{dw_k} + \sum n_k^1 \frac{dy_i^0}{dw_k} = \frac{dF_1}{d\tau_i^0} \sin w_i' + \frac{dF_1}{d\sigma_i^0} \cos w_i' + n_i'^1 x_i^0 \tag{8b}$$

или же, если перейти к средним значениям и учесть, что x_i^0, y_i^0 σ_i^0 и τ_i^0 зависят лишь от w',

$$S n_k'^1 \frac{dx_i^0}{dw_k'} = \frac{dR}{d\tau_i^0} \cos w_i' - \frac{dR}{d\sigma_i^0} \sin w_i' - n_i'^1 y_i^0, \tag{7c}$$

$$S n_k'^1 \frac{dy_i^0}{dw_k'} = \frac{dR}{d\tau_i^0} \sin w_i' + \frac{dR}{d\sigma_i^0} \cos w_i' + n_i'^1 x_i^0. \tag{8c}$$

Теперь мы уже в состоянии найти S_0, σ_i^0, τ_i^0 и $n_k'^1$. В самом деле, аналогия с задачей, рассмотренной в п. 159, очевидна.

Переход от рассматриваемой нами сейчас задачи к задаче п. 159 можно совершить, заменив соответственно

$$\sigma_i^0,\ \tau_i^0,\ x_i^0,\ y_i^0,\ n_k'^1,\ w_k'^1,\ R,\ S_0$$

на

$$\xi_i, \eta_i, x_i, y_i, n_k, w_k, F, S,$$

после чего уравнения (4c) (7c), (8c) становятся соответственно эквивалентными уравнениям (5), (3) и (4) п. 159. Аналогично уравнение (6a'), получающееся из уравнения (6a) при замене в последнем w_k на w_k', эквивалентно уравнению (6) из п. 159.

Правда, R зависит не только от σ_i^0, и τ_i^0, но и от Λ_0 и Λ_0'. Однако, как мы видели, эти величины должны быть постоянными.

Таким образом, в рассматриваемом случае оказываются применимыми методы п. 159, и мы получаем

$$\sigma_i^0,\ \tau_i^0,\ n_k'^1,\ S_0.$$

Из уравнения (4c) следует, что R равно некоторой константе и эта константа должна зависеть от α_i, Λ_0 и Λ_0', которые являются нашими постоянными интегрирования.

Отсюда следует, что $dR/d\Lambda_0$ также представляет собой константу. Поскольку $[\Lambda_1]$, $[\lambda_0']$ и производные от F_0 являются константами, правая часть уравнения (1c) также будет постоянной. Именно поэтому мы можем приравнять ее n_1^1.

Таким же образом вычислим n_2^1.

Теперь уже полностью известны правые части уравнений (7b) и (8b), в силу чего эти уравнения можно записать в виде

$$\mathrm{S}\, n_k^0 \frac{dx_i^1}{dw_k} = \Phi,$$

$$\mathrm{S}\, n_k^0 \frac{dy_i^1}{dw_k} = \Phi.$$

Среднее значение правых частей этих уравнений равно нулю ввиду уравнений (7c) и (8c). Поэтому мы можем вычислить исходя из уравнений

$$x_i^1 - [x_i^1], \qquad y_i^1 - [y_i^1]$$

и, следовательно,

$$\sigma_i^1 - [\sigma_i^1], \qquad \tau_i^1 - [\tau_i^1], \qquad \frac{d\tau_i^1}{dw_k}, \ldots .$$

Лучше поступить иначе.

Приравняв в правой и левой частях уравнения

$$\frac{d\tau_i}{dt} = -\frac{dF}{d\sigma_i} \tag{A}$$

члены, стоящие при μ, получим

$$\mathrm{S}\, n_k^0 \frac{d\tau_i^1}{dw_k} = \Phi, \tag{B}$$

откуда найдем

$$\tau_i^1 - [\tau_i^1], \frac{d\tau_i^1}{dw_k}.$$

При $w_k = w_1$ из уравнения (6b) получим

$$\frac{dS_1}{dw_1} = \Lambda_1 + \sum (\sigma_i^0 - \sigma_i^{0,1}) \frac{d\tau_i^1}{dw_1},$$

откуда

$$\Lambda_1 = \frac{dS_1}{dw_1} + \Phi, \qquad \Lambda_1' = \frac{dS_1}{dw_2} + \Phi.$$

Тогда, поскольку функция F_1 известна, а постоянная в правой части уравнения (4b) была несколько выше выбрана нами произвольно, из уравнения (4b) следует

$$\mathrm{S}\, n_k^0 \frac{dS_1}{dw_k} = \Phi.$$

Из этого уравнения находим

$$S_1 - [S_1],$$

а следовательно, и

$$\Lambda_1 - [\Lambda_1], \qquad \Lambda_1' - [\Lambda_1'].$$

Поскольку $[\Lambda_1]$ и $[\Lambda_1']$, как я уже говорил ранее, представляют собой константы, которые можно выбирать произвольно, величины Λ_1 и Λ_1' известны.

После этого из уравнения (6b′) получаем

$$\sum \sigma_i^1 \frac{d\tau_i^0}{dw_k'} = \frac{dS_1}{dw_k'} + \Phi, \tag{C}$$

либо, если перейти к средним значениям и принять во внимание, что производная $d\tau_1^0/dw_k'$ не зависит от w_k',

$$\sum [\sigma_i^1] \frac{d\tau_i^0}{dw_k^i} = \frac{d[S_1]}{dw_k'} + \Phi,$$

либо же, вычитая и принимая во внимание, что разность $S_1 - [S_1]$ известна,

$$\sum \frac{d\tau_i^0}{dw_k'} (\sigma_i' - [\sigma_i']) = \Phi. \tag{D}$$

Таким образом, мы получаем цепочку линейных уравнений, из которых находим

$$\sigma_i^1 - [\sigma_i^1].$$

Заметим, что уравнение

$$\mathrm{S}\, n_k^0 \frac{d\sigma_i^1}{dw_k} = \Phi, \tag{E}$$

полученное из уравнения

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = \frac{dF}{d\tau_i} \tag{F}$$

путем приравнивания коэффициентов, стоящих при μ, является следствием уравнений (A), (B), (D) и предшествующих им уравнений (4a), (4b), (1a), (7a), (8a), (6a), (6b), которые уже удовлетворены.

Это почти очевидно, и я еще вернусь к этому в дальнейшем. Затем отсюда легко выводятся уравнения (7b) и (8b).

С другой стороны, поскольку сумма

$$\mathrm{S}\, n_k^1 \frac{d\lambda_0}{dw_k} = n_1^1$$

известна из (1c), уравнение (1b) можно записать в виде

$$\mathrm{S}\, n_k^0 \frac{d\lambda_1}{dw_k} = \Phi.$$

В силу уравнения (1c) среднее значение Φ равно нулю. Из этого уравнения мы получаем

$$\lambda_1 - [\lambda_1].$$

Таким же образом находим

$$\lambda_1' - [\lambda_1'].$$

Рассмотрим теперь в наших уравнениях члены второго порядка по μ. Прежде всего из уравнения (4 bis) найдем

$$\mathrm{S}\, n_i^0 \Lambda_2 = \sum \frac{dF_1}{d\sigma_i^0} \sigma_i^1 + \sum \frac{dF_1}{d\tau_i^0} \tau_i^1 + \sum \frac{dF_1}{d\lambda_0} \lambda_1 + \Phi + \text{const.} \qquad (4d)$$

Аналогично из уравнения (6bis) получим

$$\frac{dS_2}{dw_k} = \mathrm{S}\, \Lambda_2 \frac{d\lambda_0}{dw_k} + \mathrm{S}\, \Lambda_1 \frac{d\lambda_1}{dw_k} + \\ + \sum \left[\sigma_i^2 \frac{d\tau_i^0}{dw_k} + \sigma_i^1 \frac{d\tau_i^1}{dw_k} + \sigma_i^0 \frac{d\tau_i^2}{dw_k} - \frac{d\,(\sigma_i^{0,1}\tau_i^2)}{dw_k} \right]. \qquad (6d)$$

Вычислим средние значения правой и левой частей этого уравнения. Я утверждаю, что среднее значение правой части равно

$$[\Lambda_2] + \Phi.$$

В самом деле, нам известны Λ_1, $\lambda_1 - [\lambda_1]$ и, следовательно, $d\lambda_1/dw_k$. Из рассмотрения уравнения (6b) ясно, что

$$\left[\sigma_i^0 \frac{d\tau_i^0}{dw_k} \right] = \left[\sigma_i^0 \frac{d\tau_i^2}{dw_k} \right] = \left[\frac{d\,(\sigma_i^{0,1}\tau_i^2)}{dw_k} \right] = 0.$$

С другой стороны,

$$\left[\sigma_i^1 \frac{d\tau_i^1}{dw_k} \right] = \left[(\sigma_i^1 - [\sigma_i^1]) \frac{d\tau_i^1}{dw_k} \right] + \left[[\sigma_i^1] \frac{d\tau_i^1}{dw_k} \right].$$

Первое слагаемое в правой части известно, ибо σ_i^1 и τ_i^1 известны с точностью до функции от w'. Второе слагаемое равно нулю, так как

$$\left[[\sigma_i^1]\frac{d\tau_i^1}{dw_k}\right] = [\sigma_i^1]\left[\frac{d\tau_i^1}{dw_k}\right] = 0.$$

Поэтому окончательно имеем

$$[\Lambda_2] = \left[\frac{dS_2}{dw_k}\right] + \Phi = \Phi + \text{произвольная постоянная}.$$

Вычислим теперь средние значения правой и левой частей уравнения (4d). Мы только что нашли среднее значение $[\Lambda_2]$. Рассмотрим какое-нибудь слагаемое в правой части, например,

$$\frac{dF_1}{d\sigma_i^0}\sigma_i^1.$$

Тогда

$$\left[\frac{dF_1}{d\sigma_i^0}\sigma_i^1\right] = \left[\frac{dF_1}{d\sigma_i^0}(\sigma_i^1 - [\sigma_i^1])\right] + \left[\frac{dF_1}{d\sigma_i^0}[\sigma_i^1]\right] = \Phi + \left[\frac{dF_1}{d\sigma_i^0}\right][\sigma_i^1] = \Phi + \frac{dR}{d\sigma_i^0}[\sigma_i^1].$$

Производя те же операции над остальными слагаемыми в уравнении (4d), получим только известные функции Φ и произвольные постоянные и найдем

$$\sum\left(\frac{dR}{d\sigma_i^0}[\sigma_i^1] + \frac{dR}{d\tau_i^0}[\tau_i^1]\right) = \Phi + \text{const}. \tag{4e}$$

В самом деле, известно, что

$$\frac{dR}{d\lambda_0} = 0.$$

Перейдем теперь к уравнению (7) и посмотрим, что можно из него извлечь. Во-первых, из левой части получим

$$\sum n_k^0 \frac{dx_i^2}{dw_k} + \sum n_k^1 \frac{dx_i^1}{dw_k} + \sum n_k^2 \frac{dx_i^2}{dw_k}.$$

Если при вычислении среднего значения мы учтем, что $n_k^{'0}$ равно нулю как среднее значение производной, взятой по w_1 или по w_2, то получим

$$\mathrm{S}\, n_k^{'1}\left[\frac{dx_i^1}{dw_k'}\right] + \mathrm{S}\, n_k^2\left[\frac{dx_i^0}{dw_k'}\right].$$

В правой части мы прежде всего рассмотрим член с $dF/d\tau_i$, откуда найдем

$$\frac{dF_2}{d\tau_i^0} + \sum\left(\frac{d^2F_1}{d\tau_i^0 d\Lambda_0}\Lambda_1 + \frac{d^2F_1}{d\tau_i^0 d\lambda_0}\lambda_1 + \frac{d^2F_1}{d\tau_i^0 d\tau_k^0}\tau_k^1 + \frac{d^2F_1}{d\tau_i^0 d\sigma_k^0}\sigma_k^1\right)$$

или

$$\Phi + \sum\left(\frac{d^2F_1}{d\tau_i^0 d\lambda_0}[\lambda_1] + \frac{d^2F_1}{d\tau_i^0 d\tau_k^0}[\tau_k^1] + \frac{d^2F_1}{d\tau_i^0 d\sigma_k^0}[\sigma_k^1]\right)$$

и среднее значение будет иметь вид

$$\Phi + \sum\left(\frac{d^2R}{d\tau_i^0 d\tau_k^0}[\tau_k^1] + \frac{d^2R}{d\tau_i^0 d\sigma_k^0}[\sigma_k^1]\right).$$

Аналогичные вычисления произведем и для $dF_1/d\sigma_i^0$. Это позволит нам записать те соотношения, которые следуют из уравнений (7) и (8), если в правой и левой их части выделить члены второго порядка по μ. Имеем

$$\mathrm{S}\, n_k' \frac{d[x_i^1]}{dw_k'} = A\cos w_i' - B\sin w_i' - n_i'^1[y_i^1] - n_i'^2 y_i^0. \tag{7e}$$

$$\mathrm{S}\, n_k' \frac{d[y_i^1]}{dw_k'} = A\sin w_i' + B\cos w_i' + n_i'^1[x_i^1] + n_i'^2 x_i^0, \tag{8e}$$

где A и $-B$ — правые части уравнений (22) из п. **155**, из которых нетрудно получить уравнения (7e) и (8e). К уравнениям (7e) и (8e) добавим еще следующее уравнение, получающееся при взятии среднего значения в уравнении (6b′):

$$\frac{dS_1}{dw_k'} = \sum\left([\sigma_i^1]\frac{d\tau_i^0}{dw_k'} + \sigma_i^0\frac{d[\tau_i^1]}{dw_k'} - \frac{d(\sigma_i^{0,1}[\tau_i^1])}{dw_k'}\right). \tag{6c′}$$

Теперь мы с помощью уравнений (4e), (7e), (8e), (6c′) найдем величины

$$[\sigma_i^1],\ [\tau_i^1],\ n_i'^2,\ [S_1].$$

Не все из взятых нами уравнений различны — в главе XIV мы видели, что эти же величины можно найти, используя одни лишь уравнения (22) из п. **155**, эквивалентные уравнениям (7e) и (8e).

Однако я хотел бы указать другой метод, использующий лишь уравнения (4e), (6c′) и (8e), который более тесно связан с методом, применяемым в настоящей главе.

В связи с этим представляло бы интерес доказательство того, что уравнение (7e) можно вывести из уравнений (4e), (6c) и (8e), а для этого необходимо рассмотреть более подробно, каким образом можно получить уравнения (7) из уравнений (4bis), (6bis) и (8bis). Рассмотрению этого вопроса, несколько уводящего нас в сторону от основной темы, и будут посвящены следующие пункты.

163. Вернемся к задаче и обозначениям п. **158**. Наши ссылки будут относиться только к нему.

Всякое же обращение к другим пунктам будет оговариваться особо. В начале п. 158 мы доказали, что уравнение (2) является следствием уравнений (1), (3), (4) и (6). Однако можно поставить следующий вопрос.

Предположим, что уравнения, полученные из уравнений (1), (3), (4) и (6) приравниванием членов, не зависящих от μ, затем членов первого, второго и т. д. порядка относительно μ до p-го порядка включительно, стоящих в их левых и правых частях, удовлетворены. Не следует ли отсюда, что при этом будут удовлетворены и уравнения, полученные из уравнения (2) приравниванием членов нулевого, первого, второго,..., p-го порядка относительно μ в его правой и левой части? Иначе говоря, я предполагаю, что уравнения (1), (3), (4) и (6) удовлетворяются с точностью до μ^{p+1}, т. е. так, что после подстановки в них нашего приближенного решения разность между их правой и левой частью будет делиться на μ^{p+1}. Не следует ли отсюда, что и уравнения (2) удовлетворяются с точностью до членов $(p+1)$-го порядка? Если уравнения (1), (3), (4) и (6) удовлетворяются с точностью до членов $(p+1)$-го порядка, то точно так же будут выполняться и уравнения, получающиеся из них с помощью дифференцирования, сложения или умножения, такие, как, например, уравнения (7) и (8). Поэтому уравнения (7) и (8) будут выполняться с той лишь разницей, что в их правой части вместо 0 будет стоять функция, допускающая разложение по степеням μ, которая делится на μ^{p+1}.

Таким образом,

$$\sum \frac{dy_i}{dw_k}\left(\frac{dF}{dx_i}-\frac{dy_i}{dt}\right)=H,$$

где H делится на μ^{p+1}. Отсюда можно заключить, что разность

$$\frac{dF}{dx_i}-\frac{dy_i}{dt}$$

равна некоторой функции, также допускающей разложение по степеням μ и делящейся на μ^{p+1} при условии, что определитель, составленный из производных dy_i/dw_k, на μ делиться не будет. Но именно так и происходит, ибо этот определитель равен 1 при $\mu=0$.

Итак, уравнения (2) удовлетворяются с точностью до членов $(p+1)$-го порядка относительно μ, что и требовалось доказать.

Обратимся теперь к задаче п. 161. Предыдущие рассуждения применимы в этом случае без всяких изменений, но нам следует поставить еще один вопрос.

Помимо уравнений, получаемых из уравнений (1bis), (2), (4), (6) путем приравнивания в их правой и левой частях коэффициентов при μ^p, мы можем рассмотреть еще и такие уравнения, которые можно получить, приравнивая средние значения правой и левой частей.

Я предполагаю, что уравнения (1bis), (4) и (6) выполняются с точностью до членов p-го порядка относительно μ. Отсюда следует, как мы

только что видели, что и уравнения (2) также выполняются с точностью до членов p-го порядка относительно μ.

Более того, я предполагаю, что удовлетворяются уравнения, полученные следующим образом: в уравнениях (1bis), (4) и (6) мы приравняли коэффициенты при μ^p, а затем заменили правую и левую части уравнения их средними значениями. Следует ли отсюда, что уравнение, *получаемое таким же способом из уравнения (2), будет также удовлетворяться?*

Наше предположение можно сформулировать следующим образом. Уравнения (1bis), (4) и (6) удовлетворяются не точно, а так, что разность между их правой и левой частью является периодической функцией от w, и w', допускающей разложение по степеням μ, делящейся на μ^p и такой, что ее среднее значение по w делится на μ^{p+1}.

Всякую функцию, удовлетворяющую этим условиям, я буду обозначать символом H. Отсюда следует, что сумма двух функций H есть функция H и производная от H по w_k или w_k' есть снова функция H. Наконец, если мы умножим H на некоторую функцию K, периодическую по w и w' и разлагающуюся по степеням μ, то их произведение также будет функцией H при условии, что при $\mu = 0$ функция K зависит не от w, а только от w'. В этом случае

$$\sum\left(\frac{dx_i}{dt}\frac{dy_i}{dw_k} - \frac{dx_i}{dw_k}\frac{dy_i}{dt}\right) = H$$

и

$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} + H,$$

$$\frac{dx_i}{dw_k}\left(\frac{dy_i}{dt} + \frac{dF}{dx_i}\right) = H\,\frac{dx_i}{dw_k} = H,$$

потому что dx_i/dw_k или dx_i/dw_k' при $\mu = 0$ равны нулю и, следовательно, не зависят от w.

Отсюда следует, что правая часть уравнения (8) также будет функцией H. Поскольку при дифференцировании уравнения (4) мы получим

$$\sum\left(\frac{dF}{dx_i}\frac{dx_i}{dw_k} + \frac{dF}{dy_i}\frac{dy_i}{dw_k}\right) = H,$$

будет выполняться соотношение

$$\sum\frac{dy_i}{dw_k}\left(\frac{dx_i}{dt} - \frac{dF}{dy_i}\right) = H_k,$$

где H_k — функция H.

Отсюда следует

$$\frac{dx_i}{dt} - \frac{dF}{dy_i} = \sum H_k\frac{\Delta_{i,k}}{\Delta},$$

где Δ — определитель, составленный из dy_i/dw_k. Разумеется, в него входят dy_i'/dw_k, dy_i/dw_k' и dy_i'/dw_k'. Что же касается $\Delta_{i,k}$, то это — миноры определителя Δ.

При $\mu = 0$ определитель $\Delta = 1$, минор $\Delta_{i,k}$ равен 1 либо 0, следовательно, $\Delta_{i,k}/\Delta$ не зависит от w. Но тогда

$$\frac{dx_i}{dt} - \frac{dF}{dy_i} = H,$$

что и требовалось доказать.

164. Обратимся теперь еще раз к гипотезам п. 159. Мы будем придерживаться тех же обозначений и условимся, что рассмотрение будет затрагивать только уравнения этого пункта. Речь идет о том, чтобы установить:

1) что уравнения (3) можно вывести из уравнений (4), (5) и (6) (несколько выше мы привели это утверждение без доказательства, но теперь я приведу доказательство, поскольку оно понадобится в дальнейшем);

2) что если уравнения (5) и (6) удовлетворяются с точностью до членов $(p+2)$-го порядка относительно α_i, а уравнения (4) — с точностью до членов $(p+1)$-го порядка, то уравнения (3) будут выполняться с точностью до членов $(p+1)$-го порядка или, иначе говоря, уравнения (13) и (14) будут следствиями уравнений (7), (8) и (9).

Уравнения (6) означают, что dS является точным дифференциалом, и позволяют записать, что

$$\sum_i \left(\frac{d\xi_i}{dw_k} \frac{d\eta_i}{dw_q} - \frac{d\xi_i}{dw_q} \frac{d\eta_i}{dw_k} \right) = 0, \qquad (\alpha)$$

откуда так же, как в п. 158, следует, что

$$\sum_i \left(\frac{d\xi_i}{dw_k} \frac{d\eta_i}{dt} - \frac{d\xi_i}{dt} \frac{d\eta_i}{dw_k} \right) = 0. \qquad (\beta)$$

С другой стороны, уравнение (5), продифференцированное по w_k, дает уравнение

$$\sum \left(\frac{dF}{d\xi_i} \frac{d\xi_i}{dw_k} + \frac{dF}{d\eta_i} \frac{d\eta_i}{dw_k} \right) = 0. \qquad (\gamma)$$

Введем теперь следующие обозначения:

$$\frac{d\xi_i}{dt} \cos w_i + \frac{d\eta_i}{dt} \sin w_i = X_i,$$
$$\frac{d\xi_i}{dt} \sin w_i - \frac{d\eta_i}{dt} \cos w_i = Y_i,$$
$$\frac{d\xi_i}{dw_k} \cos w_i + \frac{d\eta_i}{dw_k} \sin w_i = X_i^k,$$
$$\frac{d\xi_i}{dw_k} \sin w_i - \frac{d\eta_i}{dw_k} \cos w_i = Y_i^k,$$
$$\frac{dF}{d\eta_i} \cos w_i - \frac{dF}{d\xi_i} \sin w_i = A_i,$$
$$\frac{dF}{d\eta_i} \sin w_i + \frac{dF}{d\xi_i} \cos w_i = B_i.$$

В новых обозначениях уравнения (3) и (4) запишутся соответственно в виде

$$X_i = A_i, \tag{δ}$$

$$Y_i = B_i. \tag{ε}$$

Уравнение (β) перейдет в уравнение

$$\sum (X_i^k Y_i - Y_i^k X_i) = 0, \tag{β′}$$

а уравнение (γ) — в уравнение

$$\sum (X_i^k B_i - Y_i^k A_i) = 0. \tag{γ′}$$

Я утверждаю, что из уравнений (ε), (β′) и (γ′) можно вывести уравнение (δ). Действительно, из уравнений (β′) и (ε) получим

$$\sum (X_i^k B_i - Y_i^k X_i) = 0 \tag{ζ}$$

и, наконец,

$$\sum_i Y_i^k (X_i - A_i) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{ϑ}$$

Поскольку определитель, составленный из Y_i^k, отличен от нуля, получаем

$$X_i = A_i,$$

что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что уравнения (4) выполняются с точностью до членов $(p+1)$-го порядка относительно α_i, а уравнения (5) и (6) — с точностью до членов $(p+2)$-го порядка.

Тогда уравнения (α), (β), (γ), (β′) и (γ′) будут выполняться с точностью до членов $(p+2)$-го порядка, а уравнение (ε) — с точностью до членов $(p+1)$-го порядка. Поскольку разложение X_i^k начинается с членов первого порядка, то, умножив уравнение (ε) на X_i^k, получим уравнение, которое будет выполняться с точностью до членов $(p+2)$-го порядка.

Отсюда следует, что уравнения (ζ) и (ϑ) будут удовлетворяться с точностью до членов $(p+2)$-го порядка. Я утверждаю, что в силу этого уравнение (δ) будет выполняться с точностью до членов $(p+1)$-го порядка.

В самом деле, положим пока

$$\alpha_i = \lambda \alpha_i',$$

так что члены порядка p относительно α_i будут делиться на λ^p.

Затем я установлю, что

$$X_i - A_i = \lambda^{p+1} C_i,$$
$$Y_i^k = \lambda Z_i^k.$$

Остается показать, что при $\lambda = 0$ величина C_i остается конечной.

Уравнение (ϑ) выполняется с точностью до членов $(p + 2)$-го порядка. Имеем

$$\sum Y_i^k (X_i - A_i) = \lambda^{p+2} H_k.$$

При $\lambda = 0$ функции H_k остаются конечными, откуда

$$\sum Z_i^k C_i = H_k.$$

Отсюда следует, что C_i остается конечным при $\lambda = 0$ при условии, если определитель, составленный из Z_i^k, не обращается в нуль при $\lambda = 0$.

Но этот определитель при $\lambda = 0$ равен

$$\pm \alpha_1' \alpha_2' \ldots \alpha_n'.$$

Следовательно, он отличен от нуля, что и требовалось доказать.

165. Теперь я возвращаюсь к задаче п. 162. Мне осталось показать, что уравнение (7e) следует из уравнений (4e), (6c′) и (8e), разумеется, если предположить, как мы делали раньше, что предварительно мы уже удовлетворили уравнениям (4a), (4b), (6a), (6b), (8a), (8b), (1a), (1b).

Эти предположения можно выразить следующим образом. Утверждение о том, что выполняются уравнения (4a), (4b) и (4e), означает, что

$$F = \text{const} + \mu^2 H_0.$$

Я обозначаю символом H любую функцию, допускающую разложение по возрастающим степеням μ и периодическую по w и w', и символом H_0 любую функцию H, среднее значение которой обращается в нуль при $\mu = 0$.

Отсюда следует

$$\sum \left(\frac{dF}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dw_k} + \frac{dF}{d\Lambda} \frac{d\Lambda}{dw_k} + \frac{dF}{d\tau_i} \frac{d\tau_i}{dw_k} + \frac{dF}{d\sigma_i} \frac{d\sigma_i}{dw_k} \right) = \mu^2 H_0. \qquad (\alpha)$$

Утверждение о том, что уравнения (1a) и (1b) выполняются, равносильно утверждению о том, что

$$\frac{d\lambda}{dt} - \frac{dF}{d\Lambda} = \mu^2 H, \qquad (\beta)$$

откуда в силу того, что производная $d\Lambda/dw_k$ обращается в нуль при $\mu = 0$

$$\frac{d\Lambda}{dw_k} \left(\frac{d\lambda}{dt} - \frac{dF}{d\Lambda} \right) = \mu^2 H. \qquad (\beta')$$

Перейдем к уравнениям, выводимым из уравнений (6bis).

Мы предполагаем, что уравнения (6a), (6b), (6b′) удовлетворяются, но этого недостаточно. В самом деле, при выводе уравнения (4e) мы использовали уравнение (6d) или, вернее, уравнение (6e)*, которое получается, если приравнять средние значения правой и левой частей уравнения (6d).

Итак, мы исходим из предположения о том, что уравнение (6e) удовлетворяется. Однако с уравнением (6e′) *, которое получилось бы из него, если бы мы заменили w_k на w_k', дело обстоит иначе. Как выразить все, что было сказано, на языке новых обозначений?

Поскольку уравнения (6a), (6b) и (6e) удовлетворяются, имеем

$$\frac{dS}{dw_k} = C_k + \mu^2 H_0,$$

причем C_k пока что означает правую часть уравнения (6bis). Если мы произведем замену переменных w_k на w_q' и обозначим то, что при этом получится из C_k символом C_q', то обнаружим, что

$$\frac{dS}{dw_q'} = C_q' + \mu^2 H.$$

Среднее значение функции H не равно нулю при $\mu = 0$, поскольку не предполагается, что уравнение (7e′)* выполнено.

Если продифференцировать первое из этих уравнений по w_q', а второе — по w_k и вычесть одно из другого, то

$$\frac{dC_k}{dw_q'} - \frac{dC_q'}{dw_k} = \mu^2 H_0.$$

Аналогично

$$\frac{dC_k}{dw_q} - \frac{dC_q}{dw_k} = \mu^2 H_0,$$

но в соотношении

$$\frac{dC_k'}{dw_q'} - \frac{dC_q'}{dw_k'} = \mu^2 H$$

среднее значение функции H не обращается в нуль при $\mu = 0$. Однако если это соотношение умножить на величину n_q', которая обращается в нуль при $\mu = 0$, то

$$n_q' \left(\frac{dC_k'}{dw_q'} - \frac{dC_q'}{dw_k'} \right) = \mu^3 H.$$

---

* Уравнение (6e), а также уравнения (6e′) и (7e′), получаемые из (6e) и (7e) заменой w_k на w_k', автором не выписаны. (*Прим. ред.*).

Следовательно, мы получаем уравнение

$$\sum_q \left[n_q \left(\frac{dC_k}{dw_q} - \frac{dC_q}{dw_k} \right) + n_q' \left(\frac{dC_k}{dw_q'} - \frac{dC_q'}{dw_k} \right) \right] = \mu^2 H_0$$

вместе с аналогичным уравнением, которое получается из него при замене w_k на w_k'.

Это позволяет нам записать уравнение

$$\sum \left(\frac{d\Lambda}{dt} \frac{d\lambda}{dw_k} - \frac{d\lambda}{dt} \frac{d\Lambda}{dw_k} + \frac{d\sigma_i}{dt} \frac{d\tau_i}{dw_k} - \frac{d\tau_i}{dt} \frac{d\sigma_i}{dw_k} \right) = \mu^2 H_0 \qquad (\gamma)$$

вместе с уравнением, которое можно из него получить заменой w_k на w_k'.

Так же, как и в предыдущем пункте, введем обозначения

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_i}{dt} \cos w_i' + \frac{d\tau_i}{dt} \sin w_i' &= X_i, \\
\frac{d\sigma_i}{dt} \sin w_i' - \frac{d\tau_i}{dt} \cos w_i' &= Y_i, \\
\frac{d\sigma_i}{dw_k} \cos w_i' + \frac{d\tau_i}{dw_k} \sin w_i' &= X_i^k, \\
\frac{d\sigma_i}{dw_k} \sin w_i' - \frac{d\tau_i}{dw_k} \cos w_i' &= Y_i^k, \\
\frac{dF}{d\tau_i} \cos w_i' - \frac{dF}{d\sigma_i} \sin w_i' &= A_i, \\
\frac{dF}{d\tau_i} \sin w_i' + \frac{dF}{d\sigma_i} \cos w_i' &= B_i
\end{aligned}$$

вместе с аналогичными уравнениями, в которых вместо w_k, X_i^k и Y_i^k фигурируют те же самые буквы, но со штрихами.

Тогда уравнения (α) и (γ) запишутся в виде

$$\sum \left(\frac{dF}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dw_k} + \frac{dF}{d\Lambda} \frac{d\Lambda}{dw_k} + X_i^k B_i - Y_i^k A_i \right) = \mu^2 H_0, \qquad (\alpha')$$

$$\sum \left(\frac{d\Lambda}{dt} \frac{d\lambda}{dw_k} - \frac{d\lambda}{dt} \frac{d\Lambda}{dw_k} + X_i^k Y_i - Y_i^k X_i \right) = \mu^2 H_0 \qquad (\gamma')$$

(к ним следует еще присоединить аналогичные уравнения, в которых X_k^i и Y_i^k заменены штрихованными величинами).

С другой стороны, предположив, что уравнения (8a), (8b) и (8c) выполняются, получим

$$Y_i - B_i = \mu^2 H_0.$$

Комбинируя все выписанные уравнения, найдем

$$\sum \frac{d\lambda}{dw_k} \left(\frac{d\Lambda}{dt} - \frac{dF}{d\lambda} \right) + Y_i^k (X_i - A_i) = \mu^2 H_0$$

(плюс еще одно уравнение, в котором w_k и Y_i^k заменены соответствующими величинами со штрихами).

При этом получим некоторую систему линейных уравнений, из которой можно найти

$$\frac{d\Lambda}{dt} - \frac{dF}{d\lambda} \quad \text{и} \quad X_i - A_i.$$

Во что обратятся коэффициенты этих уравнений и определитель всей системы при $\mu = 0$?

Производные $d\lambda/dw_k$ обратятся в нуль, за исключением производных $d\lambda/dw_1$ и $d\lambda'/dw_2$, которые станут равными 1. Величины Y_i^k обратятся в нуль. Что же касается величин

$$Y_i'^k = \frac{d\sigma_i^0}{dw_k'} \sin w_i' - \frac{d\tau_i^0}{dw_k'} \cos w_i',$$

то они не зависят от w_1 и w_2.

Следовательно, определитель системы и его миноры при $\mu = 0$ не зависят от w, кроме того, этот определитель не обращается в нуль.

Итак, мы получаем

$$X_i - A_i = \mu^2 H_0.$$

Это означает, что уравнения (7a), (7b), (7e) удовлетворяются, что и требовалось доказать.

Мне остается еще показать, что, уравнение (E) из п. 162 является следствием уравнений (A), (B), (D), (4a), (4b), (1a), (7a), (8a), (6a) и (6b), как я и утверждал выше.

Из уравнений (4a) и (4b) следует

$$A = \mu^2 H, \qquad (\alpha'')$$

где A — левая часть уравнения (α).

Из уравнения (1a) вытекает

$$\frac{d\lambda}{dt} - \frac{dF}{d\Lambda} = \mu H$$

и

$$\frac{d\Lambda}{dw_k}\left(\frac{d\lambda}{dt} - \frac{dF}{d\Lambda}\right) = \mu^2 H. \qquad (\beta'')$$

Перейдем к уравнениям, выводимым из уравнения (6bis). Поскольку уравнения (6a) и (6b) выполняются, имеем

$$\frac{dS}{dw_k} = C_k + \mu^2 H.$$

Аналогично уравнение (6a′) * выполняется, но уравнение (6b′) удовлетворяется лишь с точностью до некоторой функции от w'. В самом деле, уравнение (D) мы вывели из уравнения (C), эквивалентного уравнению, (6b′), вычтя из него другое уравнение, обе части которого были неизвестными функциями от w'. Следовательно, я могу записать

$$\frac{dS}{dw_q'} = C_q' + \mu^2 H + \mu K.$$

Здесь K не зависит от w.
Отсюда следует

$$\frac{dC_k}{dw_q'} - \frac{dC_q'}{dw_k} = \mu^2 H,$$

$$\frac{dC_k}{dw_q} - \frac{dC_q}{dw_k} = \mu^2 H,$$

$$\frac{dC_k'}{dw_q'} - \frac{dC_q'}{dw_k'} = \mu H$$

или, поскольку n_q' делится на μ,

$$n_q' \left(\frac{dC_k'}{dw_q'} - \frac{dC_q'}{dw_k'} \right) = \mu^2 H,$$

или же, наконец,

$$C = \mu^2 H, \qquad (\gamma'')$$

где C — левая часть уравнения (γ), точнее, левая часть этого уравнения, в котором w_k заменено на w_k'.

Из уравнений (7a), (8a) и (D) найдем

$$\frac{d\tau_i}{dt} + \frac{dF}{d\sigma_i} = \mu^2 H.$$

Затем, комбинируя наши уравнения, получим

$$\sum \frac{d\lambda}{dw_k} \left(\frac{dA}{dt} - \frac{dF}{d\lambda} \right) + \frac{d\tau_i}{dw_k} \left(\frac{d\sigma_i}{dt} - \frac{dF}{d\tau_i} \right) = \mu^2 H$$

— линейные уравнения, откуда так же, как и раньше, найдем

$$\frac{d\sigma_i}{dt} - \frac{dF}{d\tau_i} = \mu^2 H,$$

что и требовалось доказать.

---

* Штрих означает замену в соответствующем уравнении w_k на w_k'. (*Прим. ред.*).

166. После столь долгого отступления я вновь возвращаюсь к задаче п. **162** и продолжу ее рассмотрение с того самого места, на котором остановился. Речь шла о том, чтобы найти $[\sigma_i^1]$ и $[\tau_i^1]$ с помощью уравнений (4e), (8e) и (6c′).

Для этого мы предположим, что обе части наших уравнений разложены по степеням α_i, и приравняем в правой и левой частях члены одинакового порядка.

Уравнение (4e) начинается с членов первого порядка; приравнивая члены первого порядка, получим

$$\sum 2A_i\,(\sigma_i^{0,1}\,[\sigma_i^{0,1}] + \tau_i^{0,1}\,[\tau_i^{0,1}]) = \Phi + \text{const}. \tag{4f}$$

Разложение правой части уравнения (6c′) начинается также с членов первого порядка, и мы найдем

$$[S_{1,0}] = \text{const}.$$

Отсюда получим, приравняв члены первого порядка,

$$\frac{d\,[S_{1,1}]}{dw_k'} = \sum \left[[\sigma_i^{1,0}]\,\frac{d\tau_i^{0,1}}{dw_k'} + \sigma_i^{0,1}\,\frac{d\,[\tau_i^{0,1}]}{dw_k'} - \frac{d\,(\sigma_i^{0,1}\,[\tau_i^{0,1}])}{dw_k'} \right]$$

или же

$$\frac{d\,[S_{1,1}]}{dw_k'} = \sum \left([\sigma_i^{1,0}]\,\frac{d\tau_i^{0,1}}{dw_k'} - [\tau_i^{1,0}]\,\frac{d\sigma_i^{0,1}}{dw_k'} \right) = [\sigma_k^{1,0}]\,\frac{d\tau_k^{0,1}}{dw_k'} - [\tau_k^{1,0}]\,\frac{d\sigma_k^{0,1}}{dw_k'} =$$
$$= \sigma_k^{0,1}\,[\sigma_k^{1,0}] + \tau_k^{0,1}\,[\tau_k^{1,0}] = x_k^{0,1}\,[x_k^{1,0}]. \tag{6f}$$

Таким образом, получаем из уравнения (4f) соотношение

$$\sum 2A_i\,\frac{d\,[S_{1,1}]}{dw_i'} = \Phi + \text{const},$$

позволяющее найти $[S_{1,1}]$ и, следовательно, $[x_k^{1,0}]$.

Нам остается найти $[y_k^{1,0}]$ и удовлетворить тому уравнению (8f), которое получается путем приравнивания в уравнении (8e) членов нулевого порядка относительно α_i. Собственно, для этого достаточно уравнения (4f), если мы вспомним, что $[\sigma_k^{1,0}]$ и $[\tau_k^{1,0}]$ должны быть константами, ибо σ_k и τ_k разлагаются по степеням $\alpha_i \cos w_i'$ и $\alpha_i \sin w_i'$, причем члены этих разложений нулевого порядка относительно α_i должны быть независимыми от w_i'.

Что теперь представляет собой функция Φ в правой части уравнения (4f)? Очевидно, что для получения этой функции необходимо следующее: взять функцию — F_2, заменить в ней переменные Λ, λ, σ_i, τ_i переменными Λ_0, w, σ_i^0, τ_i^0, вычислить среднее значение получившейся при этом функции,

в этом среднем значении рассмотреть члены первого порядка относительно σ_i^0 и τ_i^0, произвести замену σ_i^0 и τ_1^0 на $\sigma_i^{0,1}$ и $\tau_i^{0,1}$. После этого функция Ф будет иметь вид

$$\sum B_i \sigma_i^{0,1} + \sum C_i \tau_i^{0,1},$$

где B_i и C_i — константы. Уравнение (4f) запишется тогда в виде

$$\sum 2A_i (\sigma_i^{0,1} [\sigma_i^{1,0}] + \tau_i^{0,1} [\tau_i^{1,0}]) = \sum B_i \sigma_i^{0,1} + \sum C_i \tau_i^{0,1} + \text{const}.$$

Так как $[\sigma_i^{1,0}]$ и $]\tau_i^{1,0}]$ должны быть константами, то этому уравнению можно удовлетворить, лишь положив константу в правой части равной нулю и выбрав

$$[\sigma_i^{1,0}] = -\frac{B_i}{2A_i}, \qquad [\tau_i^{1,0}] = \frac{C_i}{2A_i}.$$

Кроме того, я утверждаю, что таким же образом можно удовлетворить и уравнению (8f) *, ибо этим способом можно удовлетворить уравнениям (23) из п. 155. Уравнение же (8f) есть не что иное, как простая комбинация этих уравнений, получающаяся при сложении этих уравнений, после предварительного умножения их на $+\sin w_i'$ и $-\cos w_i'$.

Приравняв теперь в уравнении (4e) члены второго порядка, получим

$$\sum 2A_i (\sigma_i^{0,1} [\sigma_i^{1,0}] + \tau_i^{0,1} [\tau_i^{1,0}]) = \Phi + \text{const}. \qquad (4g),$$

Приравнивая точно так же члены второго порядка в уравнении (6c') получим

$$\Phi + \frac{d[S_{1,2}]}{dw_k'} = + (\sigma_k^{0,1} [\sigma_k^{1,1}] + \tau_k^{0,1} [\tau_k^{1,1}]) = + x_k^{0,1} [x_k^{1,1}]. \qquad (6g)$$

Но тогда уравнение (4g) можно переписать в виде

$$\sum 2A_i \frac{d[S_{1,2}]}{dw_i'} = \Phi + \text{const.},$$

откуда найдем $[S_{1,2}]$ и, следовательно, $[x_k^{1,1}]$.

Рассмотрим теперь уравнение (8g), получающееся путем приравнивания в уравнении (8e) членов первого порядка. Но его точно так же можно было бы получить, положив в уравнениях (25) п. 155 $q = 1$, умножив первое из них на $\sin w_i'$, а второе на $\cos w_i'$ и сложив.

---

* Которое в явном виде не выписано. (*Прим. ред.*).

Проделав эти операции и принимая во внимание, что константой, которую мы в п. 155 обозначали $x_i'^0$, теперь является α_i, получим

$$\mathrm{S}\, n_k'^{1,0} \frac{d\,[y_i^{1,1}]}{dw_k'} = \Delta''\,[y_i^{1,1}] = \Phi - n_i^{1,0}\,[x_i^{1,1}] + n_i'^{2,1}\alpha_i. \tag{8g}$$

Теперь нам известны $[x_i^{1,1}]$, следовательно, уравнение (8g) запишется в виде

$$\Delta''\,[y_i^{1,1}] = \Phi + n_i'^{2,1}\alpha_i.$$

Величины $n_i'^{2,1}$ определяются так, чтобы среднее значение правой части было равно нулю, после чего нетрудно найти из этого уравнения $[y_i^{1,1}]$, а следовательно, и $[\sigma_i^{1,1}]$ и $[\tau_i^{1,1}]$.

Продолжая в том же духе, находим $n_i'^{2,q-1}$, $[\sigma_i^{1,q}]$, $[\tau_i^{1,q}]$.

Итак, величины n_i^2, $[\sigma_i']$ и $[\tau_i']$ известны. Остальные величины вычислим по методу п. 162. Каждую величину следует находить точно так же, как находили величины n_i^2, $[\sigma_i']$ и $[\tau_i']$. Единственное отличие состоит в том, что ее порядок (относительно μ) будет на единицу меньше.

Разумеется, следует позаботиться о том, чтобы порядок действий был таким же, как и в п. 162.

Итак, методы, изложенные в главе XV, позволяют достичь тех же результатов, что и методы главы XIV. Некоторые вычисления оказываются более простыми. Кроме того, новые методы обладают одним преимуществом, на которое следует обратить внимание и которым методы, изложенные в предыдущей главе, не обладают. Речь идет о том, что, излагая эти методы, мы одновременно доказываем и возможность их применения. Именно поэтому их можно было излагать, не проходя через промежуточные этапы в главах XI—XIII и не прибегая к многочисленным заменам переменных, которые мы вынуждены были производить в этих главах. Эти замены переменных были целесообразны при проведении доказательств, но отнюдь не для вычислений.

Глава XVI

МЕТОДЫ ГИЛЬДЕНА

167. Методы, о которых я хочу рассказать в этой главе, в высокой степени оригинальны. На первый взгляд может показаться, что они не имеют ничего общего с теми, о которых говорилось раньше. Однако вопреки этому впечатлению методы, о которых пойдет речь, тесно связаны с изложенными в предыдущих главах, но кое в чем превосходят их и позволяют рассматривать задачи, к которым нельзя было применять методы глав IX и XV. Таким образом, они более тесно связаны с теми методами, о которых речь будет идти дальше. Разумеется, мое изложение значительно отличается от изложения Гильдена.

В самом деле, методы Гильдена представляют собой совокупность искусственных приемов, между которыми нет никаких необходимых связей и которые удобнее изучать по отдельности. Читатель без труда сможет свести их затем воедино.

Первый из этих искусственных приемов состоит в использовании специально выбранных независимых переменных.

Предположим сначала, что движение трех тел происходит в одной плоскости. В этой плоскости рассмотрим движение одной из планет, на которую действует центральное тело, положение которого мы примем за начало координат, и на которую оказывает возмущающее воздействие другая планета.

Пусть r и v — полярные координаты рассматриваемой планеты, μ — масса центрального тела, Ω — возмущающая функция. Уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{d\left(r^2\frac{dv}{dt}\right)}{dt}=\frac{d\Omega}{dv},\qquad \frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\frac{\mu}{r^2}=\frac{d\Omega}{dr}. \tag{1}$$

В случае, когда $\Omega = 0$, движение становится кеплеровским, первое из уравнений (1) тотчас же интегрируется

$$r^2\frac{dv}{dt}=\sqrt{c} \tag{2}$$

(c — некоторая постоянная).

Если затем принять ν за независимую переменную и положить $r = -1/u$, то второе из уравнений (1) запишется в виде

$$\frac{d^2u}{d\nu^2} + u + \frac{\mu}{c} = 0, \tag{3}$$

откуда непосредственно усматривается эллиптический вид траектории.

Вернемся к общему случаю, когда $\Omega \neq 0$. В этом случае Гильден предложил так выбирать независимую переменную, чтобы уравнения движения имели вид, аналогичный уравнениям (2) и (3).

Для этого положим

$$\frac{d\nu_0}{dt} = \frac{\sqrt{c_0}}{r^2}, \tag{4}$$

где c_0 — новая постоянная.

Если ν_0 принять за независимую переменную, то первое из уравнений (1) запишется в виде

$$\frac{d^2\nu}{d\nu_0^2} = \frac{r^2}{c_0}\frac{d\Omega}{d\nu}. \tag{5}$$

Если же, кроме того, положить $r = -1/u$, то второе из уравнений (1) примет вид

$$\frac{d^2u}{d\nu_0^2} + u\left(\frac{d\nu}{d\nu_0}\right)^2 + \frac{\mu}{c_0} = \frac{r^2}{c_0}\frac{d\Omega}{dr}.$$

Аналогия с уравнением (3) станет еще более очевидной, если заметить, что в последующих вычислениях ν будет мало отличаться от ν_0. Поэтому, если перенести в правую часть член, имеющий тот же порядок малости, что и Ω, то

$$\frac{d^2u}{d\nu_0^2} + u + \frac{\mu}{c_0} = \frac{r^2}{c_0}\frac{d\Omega}{dr} + u\left[1 - \left(\frac{d\nu}{d\nu_0}\right)^2\right]. \tag{6}$$

Выбор переменной ν_0, имеющий явные преимущества, не лишен и недостатков.

В самом деле, существуют два сильно отличающихся варианта задачи трех тел. В одном из них мы имеем дело с двумя планетами, массы которых сравнимы, в другом же, наоборот, масса одной из планет много меньше массы другой.

В первом случае с одной из планет необходимо связать независимую переменную ν_0, а с другой планетой — другую независимую переменную ν_0', аналогичную первой, но отличную от нее и определяемую уравнением

$$\frac{d\nu_0'}{dt} = \frac{\sqrt{c_0'}}{r'^2},$$

где r' — радиус-вектор второй планеты.

В этом состоит один источник трудностей. Поэтому метод Гильдена в его первоначальном виде особенно пригоден для второго случая, например для изучения возмущений малых планет Юпитером.

Однако имеются еще и другие трудности.

Движение Юпитера известно, но как функция от t, а не от ν_0. Чтобы выразить функцию, зависящую от t, через ν_0, необходимо подставить вместо t его выражение через ν_0, полученное из уравнения (4). Но зависимость t от ν_0 в каждом приближении имеет свой вид. Следовательно, в координаты Юпитера необходимо постоянно вносить поправки. Эти неудобства отчасти компенсируются важными преимуществами. Еще один недостаток заключается в том, что наши уравнения не будут иметь вид уравнений Лагранжа, но к этому мы еще в скором времени вернемся.

168. Посмотрим теперь, какой вид имеют уравнения движения.

Координаты u и ν первой планеты выражаются в виде функций от ν_0 с помощью уравнений (5) и (6), левые части которых имеют простой вид

$$\frac{d^2\nu}{d\nu_0^2} \quad \text{и} \quad \frac{d^2u}{d\nu_0^2} + u + \frac{\mu}{c_0}\,.$$

а правые части зависят не только от u и ν, но и от координат u' и ν' возмущающей планеты.

Переменная ν_0 связана с t уравнением (4).

Координаты u' и ν' второй планеты также выражаются в виде функций новой переменной ν_0' с помощью уравнений (5′) и (6′) *, аналогичных уравнениям (5) и (6).

Переменная ν_0', в свою очередь, определяется в виде функции от t с помощью уравнения (4′), аналогичного уравнению (4).

Предположим теперь, что к этим уравнениям требуется применить методы, аналогичные старым методам небесной механики. Вот что получилось бы при этом. Предположим, что мы знаем приближенные значения u и ν, u' и ν' в виде функций, зависящих как от ν_0, так и от ν_0'.

В правую часть уравнения (5) или (6) вместо u, ν, u' и ν' подставим их приближенные значения, записанные в виде функций от ν_0. Эти правые части станут известными функциями от ν_0, и наши уравнения без труда будут интегрироваться в квадратурах. При этом получим следующее приближение для u и ν в виде функций от ν_0.

Производя аналогичные действия с уравнениями (5′) и (6′), получим следующие приближения для u' и ν' в виде функций от ν_0'.

После этого из уравнений (4) с помощью квадратур получим t как функцию от ν_0, а из уравнения (4′) выразим t через ν_0'. Объединяя оба эти результата, получим ν_0 в виде функции от ν_0' и наоборот.

---

* Уравнения, обозначенные здесь числами со штрихами, явно не выписаны. (*Прим. ред.*).

Таким образом, можно получить следующее приближение для u и v в виде функций от v_0' либо для u' и v' в виде функций от v_0. Имея теперь второе приближение для u, v, u' и v' как в виде функций от v_0, так и в виде функций от v_0', мы можем произвести с этим приближением те же операции, что и с первым, и т. д.

Остается выбрать первое приближение. Чтобы лучше понять те усовершенствования, которые пришлось ввести Гильдену, временно предположим, что первое приближение мы выбираем так, как это сделали бы вычислители, действующие в духе старых методов. Очевидно, что выбор в качестве первого приближения кеплеровского движения лучше всего отвечал бы духу старых методов.

В этом случае

$$v = v_0, \quad u = -\frac{\mu}{c_0} + \alpha \cos v_0 + \beta \sin v_0,$$

$$v' = v_0', \quad u' = -\frac{\mu'}{c_0'} + \alpha' \cos v_0' + \beta' \sin v_0',$$

где α, β, α' и β' — постоянные интегрирования.

Что касается соотношения между v_0 и v_0', то оно будет более сложным. Его мы получим из уравнения

$$\frac{dv_0}{u^2 \sqrt{c_0}} = \frac{dv_0'}{u'^2 \sqrt{c_0'}},$$

которое интегрируется в квадратурах. Это дает нам v_0' в виде функции от v_0. Если v_0' разложить по возрастающим степеням постоянных α, β, α' и β', вообще говоря, весьма малых, то первый член разложения, не зависящий от четырех указанных постоянных, оказывается линейной функцией от v_0.

Таким образом, соотношение между v_0' и v_0 в первом приближении усложнилось. Эта трудность носит несколько искусственный характер и совершенно нового рода. Она связана с выбором независимых переменных и не устраняется, если вместо старых методов воспользоваться методами Гильдена.

Ничего подобного не возникает при рассмотрении методов Ньюкома. Не следует, однако, переоценивать это обстоятельство. Разложение возмущающей функции всегда требует продолжительных вычислений. Однако получить ее в виде функции от истинных аномалий можно быстрее, чем в виде функции от средних аномалий. В методе Ньюкома мы предполагаем, что возмущающая функция записана через оскулирующие элементы двух планет и их средние аномалии. Следовательно, чтобы найти ее, необходимы продолжительные вычисления, но методы, имеющиеся в нашем распоряжении, позволяют устранить все трудности. Здесь же, наоборот, мы выражаем Ω в виде функции от u, v, u', v', что несравненно легче. Однако устраненная в методе Ньюкома трудность должна появиться вновь. Слож-

ное соотношение, связывающее ν_0 и ν_0',— это первое ее проявление, с которым мы сталкиваемся. Она будет возникать вновь и вновь в каждом приближении, и мы будем с ней встречаться еще неоднократно.

Посмотрим теперь, где же находится тот подводный камень, на который наталкивается применение методов, имитирующих старые методы, и с помощью каких остроумных приемов Гильден обходит возникающие при этом трудности.

Уравнения (5) и (6) после замены в правых частях u, ν, u', ν' на их выражения через ν_0' становятся неоднородными линейными уравнениями, которые легко интегрируются.

В первом приближении правые части записываются в виде тригонометрических рядов, расположенных по синусам и косинусам, зависящих от

$$(n + mk)\,\nu_0,$$

где n и m — целые числа, k — отношение средних движений. Если бы правая часть уравнения (5) не содержала свободного члена или если бы правая часть уравнения (6) не содержала членов $\sin\nu_0$ и $\cos\nu_0$, то выражения для u и ν, найденные из уравнений (5) и (6), имели бы тот же вид. Но правые части уравнений (5) и (6) содержат свободные члены и члены $\sin\nu_0$ и $\cos\nu_0$. В силу этого в выражении для ν появляется член ν_0^2, а в выражении для u — члены

$$\nu_0\cos\nu_0 \text{ и } \nu_0\sin\nu_0.$$

Следовательно, независимая переменная ν_0 входит не только под знаком тригонометрических функций.

Очевидно, что в последующих приближениях вне знаков тригонометрических функций будут встречаться еще более высокие степени ν_0. Таким образом, как нетрудно было бы видеть заранее, использование переменной ν_0 не меняет существенно характера старых методов и если требуется, чтобы переменная входила только под знаком тригонометрических функций, то необходимо прибегать к какому-то искусственному приему.

Единственное преимущество, даваемое выбором ν_0, если оставить в стороне те недостатки, о которых говорилось, заключается в том, что уравнения становятся линейными.

169. Итак, чтобы избежать вековых членов, т. е. членов, в которых ν_0 не входит под знаком синуса или косинуса, Гильдену было необходимо придумать новый прием.

Рассмотрим какое-нибудь одно из уравнений (5) или (6). Перенесем в левую часть главные члены правой части. Заменим u, ν, u' и ν' в правой части их приближенными значениями так, чтобы и неизвестные u, ν, u' и ν' остались только в левой части. При этом мы получим новые уравнения, которые можно будет проинтегрировать с помощью новых ухищрений.

Сказанное допускает, очевидно, достаточно большую степень произвола. В самом деле, в зависимости от обстоятельств мы можем считать главным и переносить в левую часть уравнения то один, то другой член. В этом и состоит гибкость метода.

Из всего бесконечного разнообразия получающихся при этом уравнений я намереваюсь перечислить здесь лишь те из них, которые были рассмотрены Гильденом особенно подробно.

Пусть u_1, ν_1, u_1', ν_1' — приближенные значения u, ν, u', ν'. Положим

$$u = u_1 + \rho, \qquad \nu = \nu_1 + \chi, \qquad u' = u_1' + \rho', \qquad \nu' = \nu_1' + \chi'.$$

Величина ρ означает то, что Гильден назвал *эвекцией*, а величина χ называется *вариацией*. Обычно полагают

$$\nu_1 = \nu_0, \qquad \nu = \nu_0 + \chi.$$

В новых неизвестных уравнения (5) и (6) п. 167 записываются в следующем виде:

$$\frac{d^2\chi}{d\nu_0^2} = A, \tag{5bis}$$

$$\frac{d^2\rho}{d\nu_0^2} + \rho = B. \tag{6bis}$$

Функции A и B допускают разложение по возрастающим степеням ρ, ρ', χ и χ' и, кроме того, (по крайней мере B) по степеням $d\chi/d\nu_0$. Коэффициенты разложений являются известными функциями от ν_0. Затем мы переносим в левую часть некоторые члены разложений A и B и, оставляя ρ и χ в левой части неизвестными, заменяем их в правой. В первом приближении будем считать эти величины равными нулю.

Функция B помимо других замечательных членов содержит члены вида

$$C\rho^n, \; C\rho \sin(\lambda\nu_0 + k),$$

где C, λ и k — постоянные.

1. Если перенести в левую часть уравнения (6bis) второй из этих членов, то

$$\frac{d^2\rho}{d\nu_0^2} + \rho\,[1 - C\sin(\lambda\nu_0 + k)] = B', \tag{6a}$$

где B' означает функцию, в которую переходит B после вычеркивания члена, перенесенного в левую часть.

В функции B' положим

$$\rho = \chi = \rho' = \chi' = 0.$$

Уравнение (6a) будет линейным с правой частью, но его коэффициенты уже не будут постоянными.

Теперь ясно, что точно так же можно было бы записать

$$\frac{d^2\rho}{dv_0^2} + \rho\,[(1+\alpha) - C\,(1+\beta)\sin(\lambda v_0 + k)] = B'', \qquad (6b)$$

где α и β — произвольные малые величины,

$$B'' = B' + \alpha\rho + C\beta\rho\sin(\lambda v_0 + k)$$

и, кроме того, в первом приближении

$$B'' = B' = B,$$

ибо в этом случае параметры ρ, ρ', χ и χ' в правой части равны нулю.

Далее можно воспользоваться тем, что α и β не определены и их можно выбирать по-разному.

2. Аналогично можно перенести в левую часть член с ρ^3 и записать

$$\frac{d^2\rho}{dv_0^2} + \rho - C\rho^3 = B - C\rho^3$$

или

$$\frac{d^2\rho}{dv_0^2} + \rho\,(1+\alpha) - C\rho^3 = B + \alpha\rho - C\rho^3, \qquad (6c)$$

а затем в правой части положить

$$\rho = \chi = 0.$$

3. Ясно, что A разлагается в ряд по синусам и косинусам линейных комбинаций v и v'. Пусть

$$C\sin(mv + nv' + k)$$

— некоторый член разложения A; m и n — целые числа, k — некоторая постоянная. Заменяя v суммой $v_1 + \chi$ и v' — его приближенным значением v_1', выраженным через v_0, мы, очевидно, получаем

$$v_1 = v_0 + \varphi,$$
$$v_1' = \mu v_0 + \varphi',$$

где φ и φ' — ряды, расположенные по синусам и косинусам линейных комбинаций v_0 и μv_0, где μ — отношение средних движений. По сравнению с главными членами v_0 и μv_0 дополнительные члены φ и φ' очень малы.

Следовательно, выражение

$$C\sin(mv_1 + nv_1' + k)$$

можно также разложить в ряд, расположенный по синусам и косинусам линейных комбинаций ν_0 и $\mu\nu_0$, причем главным членом разложения будет

$$C \sin (m\nu_0 + n\mu\nu_0 + k).$$

Аналогично, если в выражении

$$C \sin (m\nu + n\nu_1' + k)$$

заменить ν и ν' на

$$\nu_0 + \chi + \varphi \text{ и } \mu\nu_0 + \varphi',$$

то это выражение можно будет разложить в тригонометрический ряд по

$$\nu_0,\ \nu_0 + \chi \text{ и } \mu\nu_0,$$

причем главный член этого разложения будет иметь вид

$$C \sin (m\nu_0 + n\mu\nu_0 + m\chi + k).$$

Именно этот член мы и перенесем в левую часть уравнений (5), которое в этом случае запишется в виде

$$\frac{d^2\chi}{d\nu_0^2} - C \sin (m\nu_0 + n\mu\nu_0 + m\chi + k) = A', \tag{5a}$$

где

$$A' = A - C \sin (m\nu_0 + n\mu\nu_0 + m\chi + k).$$

Затем в A' положим

$$\rho = \chi = \rho' = \chi' = 0,$$

так что функцию A' можно будет рассматривать как известную функцию от ν_0.

Чаще всего выбирают

$$\nu_1 = \nu_0, \qquad \nu_1' = \mu\nu_0.$$

В этом случае все предыдущее изложение несколько упрощается.

Именно уравнениями (6b), (6c) и (5a) Гильден пользовался чаще всего. Заметим, что все они имеют вид

$$\frac{d^2\rho}{d\nu_0^2} = f(\rho, \nu_0) \tag{α}$$

или

$$\frac{d^2\chi}{d\nu_0^2} = f(\chi, \nu_0). \tag{β}$$

Следовательно, их можно привести к каноническому виду (это вытекает из сказанного в т. I, уравнение (3), п. 2).

Мы предположили, что в правых частях уравнений

$$\rho = \chi = \rho' = \chi' = 0.$$

Так на самом деле и обстоит дело в первом приближении. Однако во втором приближении необходимо вместо величин ρ, χ, ρ' и χ' подставить в правые части их приближенные значения, найденные в первом приближении, и т. д.

Следовательно, правые части всегда будут известными функциями от ν_0 и уравнения всегда будут иметь один и тот же вид.

Сведéние рассматриваемых уравнений к уравнениям второго порядка

170. Уравнения (5a), (6b), (6c) п. 169 — уравнения второго порядка. Это связано с тем, что в левую часть уравнения (5) мы перенесли лишь те члены, которые зависят только от χ, а в левую часть уравнения (6) — лишь те члены, которые зависят только от ρ.

Если затем в правых частях положить

$$\rho = \chi = \rho' = \chi' = 0,$$

то уравнение (5) будет содержать лишь одну неизвестную χ, а уравнение (6) — лишь одну неизвестную ρ.

Однако такой прием не всегда законен. Например, может представиться случай, когда в правой части уравнения (5) некоторые члены, зависящие от ρ, имеют тот же порядок, что и главные члены, зависящие от χ, однако их в левую часть не переносят.

Аналогичные соображения применимы и к уравнению (6). Если затем положить ρ и χ в правых частях равными нулю, то оба уравнения (5) и (6) будут содержать неизвестные ρ и χ. После исключения одной из них получим уравнение не второго, а четвертого порядка.

Если в левую часть перенести члены, зависящие от ρ' и χ', то результирующее уравнение будет такого же или даже более высокого порядка.

Чтобы свести уравнения к уравнениям второго порядка, Гильден использует в этом случае один метод, сущность которого я хотел бы пояснить.

Сначала рассмотрим уравнение четвертого порядка, например уравнение

$$\frac{d^2\rho}{d\nu^2} + \rho = \alpha\left(A + B_4\frac{d^4\rho}{d\nu^4} + B_3\frac{d^3\rho}{d\nu^3} + B_2\frac{d^2\rho}{d\nu^2} + B_1\frac{d\rho}{d\nu} + B_0\rho\right), \quad (1)$$

где A и B — известные конечные функции от ν, а α — весьма малый коэффициент. Относительно этого уравнения докажем прежде всего, что если

начальные значения ρ и $d\rho/dv$ имеют порядок α, то ρ все время будет иметь порядок α.

Пренебрегая членами порядка α^2, можно записать

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + \rho = \alpha A,$$

и наше уравнение сведется к уравнению второго порядка.

Учтем члены порядка α^2, пренебрегая членами порядка α^3. В этом приближении получим

$$\begin{aligned} \alpha \frac{d^4\rho}{dv^4} &= -\alpha \frac{d^2\rho}{dv^2} + \alpha^2 \frac{d^2A}{dv^2}, \\ \alpha \frac{d^3\rho}{dv^3} &= -\alpha \frac{d\rho}{dv} + \alpha^2 \frac{dA}{dv}, \\ \alpha \frac{d^2\rho}{dv^2} &= -\alpha\rho + \alpha^2 A. \end{aligned} \tag{2}$$

К этому результату можно прийти, умножая уравнение (1) на α и пренебрегая после умножения членами порядка α^3.

Уравнение (1) перейдет в уравнение

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + \rho = \alpha C + \alpha D \frac{d\rho}{dv} + \alpha E\rho, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} C &= A + \alpha B_4\left(\frac{d^2A}{dv^2} - A\right) + \alpha B_3 \frac{dA}{dv} + \alpha B_2 A, \\ D &= B_1 - B_3, \\ E &= B_4 - B_2 + B_0. \end{aligned}$$

Полученное уравнение снова является уравнением второго порядка.

Уравнение (3) выполняется с точностью до величин третьего порядка, т. е. с точностью до α^3. Следовательно, с точностью до величин четвертого порядка

$$\alpha \frac{d^{2+i}\rho}{dv^{2+i}} = -\alpha \frac{d^i\rho}{dv^i} + \alpha^2 \frac{d^i}{dv^i}\left(C + D\frac{d\rho}{dv} + E\rho\right). \tag{4}$$

Если в правую часть уравнения (1) вместо производных

$$\alpha \frac{d^4\rho}{dv^4}, \alpha \frac{d^3\rho}{dv^3}, \alpha \frac{d^2\rho}{dv^2}$$

подставить их выражения (4), то получится уравнение, выполняющееся с точностью до величин четвертого порядка. Порядок самого уравнения равен двум.

Аналогичным образом можно поступать и дальше.

Ясно, что тот же метод применим ко всем уравнениям вида

$$\frac{d^2\rho}{d\nu^2} + f_1 = \alpha f_2, \tag{5}$$

где α — малый коэффициент, f_1 разлагается по степеням ρ и $d\rho/d\nu$, а f_2 — по степеням

$$\rho, \frac{d\rho}{d\nu}, \ldots, \frac{d^{n-1}\rho}{d\nu^{n-1}}, \frac{d^n\rho}{d\nu^n}.$$

Уравнение (5) не будет линейным. Единственное отличие будет состоять лишь в том, что появятся члены высоких порядков относительно ρ и производных от ρ по ν. Эти члены следует учитывать начиная со второго и третьего приближений.

171. Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{d^2\rho}{d\nu^2} + \rho = \alpha\left(A + B\int \rho C d\nu\right), \tag{6}$$

где α — по-прежнему очень мало, а A, B и C — известные функции от ν. После дифференцирования (проводимого для того, чтобы уничтожить знак интеграла) это уравнение станет уравнением третьего порядка. Однако Гильден, воспользовавшись малостью коэффициента α и применив метод, аналогичный по существу тому методу, который мы только что применяли к более простым примерам, свел это уравнение к уравнению второго порядка.

В самом деле, ρ и α — величины первого порядка, так что

$$\alpha B\int \rho C d\nu$$

можно считать величиной второго порядка. Пренебрегая величинами третьего порядка, получаем

$$\alpha\frac{d^2\rho}{d\nu^2} + \alpha\rho = \alpha^2 A,$$

откуда

$$\alpha B\int \rho C d\nu = \alpha^2 B\int AC d\nu - \alpha B\int \frac{d^2\rho}{d\nu^2} C d\nu. \tag{7}$$

Интегрируя по частям и обозначая через C и C'' производные C по ν, находим

$$\int \frac{d^2\rho}{d\nu^2} C d\nu = C\frac{d\rho}{d\nu} - C'\rho + \int \rho C'' d\nu$$

Квадратура $\int ACd\nu$, вообще говоря, берется легко, так что

$$B\int ACd\nu = D$$

можно считать известной функцией от ν, а интеграл $\int \rho Cd\nu$ сведется к интегралу $\int \rho C''d\nu$ того же вида.

В общем случае в примерах, рассмотренных Гильденом, C имело вид

$$C = \beta \sin(\lambda\nu + \mu),$$

где β, λ и μ — постоянные. Отсюда следует, что

$$C'' = -\lambda^2 C.$$

Поэтому

$$\alpha B\int \rho C\nu = \alpha^2 D - \alpha BC\frac{d\rho}{d\nu} + \alpha BC'\rho + \lambda^2\alpha B\int \rho Cd\nu,$$

откуда

$$\alpha B\int \rho Cd\nu = \frac{\alpha^2 D}{1-\lambda^2} - \frac{\alpha BC}{1-\lambda^2}\frac{d\rho}{d\nu} + \frac{\alpha BC'}{1-\lambda^2}\rho. \tag{8}$$

Если в уравнение (6) вместо

$$\alpha B\int \rho Cd\nu$$

подставить правую часть выражения (8) (что можно сделать, если пренебречь величинами третьего порядка малости), то уравнение (6) сведется к уравнению второго порядка.

Если C — сумма членов вида

$$\beta \sin(\lambda\nu + \mu),$$

то выражение

$$\alpha B\int \rho Cd\nu$$

будет представлять собой сумму членов вида

$$\alpha\beta B\int \rho \sin(\lambda\nu + \mu)\, d\nu,$$

причем каждое слагаемое можно преобразовать по формуле, аналогичной формуле (8). Уравнение (6) будет таким образом сведено к уравнению второго порядка.

Уравнение (7) верно лишь с точностью до величин третьего порядка. Если требуется учесть и эти величины, то необходимо записать уравнение

$$\alpha B\int \rho C d\nu = \alpha^2 D - \alpha B\int \frac{d^2\rho}{d\nu^2} C d\nu + \alpha^2\sigma,$$

где для краткости введено обозначение

$$\sigma = B\int d\nu \left(CB\int \rho C d\nu\right).$$

Если снова предположить, что сумма C состоит из одного слагаемого

$$C = \beta \sin(\lambda\nu + \mu),$$

то

$$\alpha B\int \rho C d\nu = \frac{\alpha^2 D}{1-\lambda^2} - \frac{\alpha BC}{1-\lambda^2}\frac{d\rho}{d\nu} + \frac{\alpha BC'}{1-\lambda^2}\rho + \frac{\alpha^2\sigma}{1-\lambda^2},$$

так что из уравнения (6) мы получим, перенеся некоторые из членов в левую часть

$$\frac{d^2\rho}{d\nu^2} + \rho\left(1 - \frac{\alpha BC'}{1-\lambda^2}\right) + \frac{d\rho}{d\nu}\frac{\alpha BC}{1-\lambda^2} = \alpha A + \frac{\alpha^2 D}{1-\lambda^2} + \frac{\alpha^2\sigma}{1-\lambda^2}.$$

В общем случае в левой части можно сохранять не все перенесенные нами члены, а только главные из них. Если остальные члены вновь перенести в правую часть, получим уравнение вида

$$\frac{d^2\rho}{d\nu^2} + E\frac{d\rho}{d\nu} + F\rho = G + H\rho + K\frac{d\rho}{d\nu} + L\sigma, \tag{9}$$

где E, F, G, H, K, L — известные функции от ν.

Это обстоятельство позволяет действовать следующим образом. Прежде всего положим в правой части $\rho = \sigma = 0$. Мы получим линейное уравнение с правой частью, которое можно проинтегрировать и получить первое приближение для ρ, а следовательно, и для σ. Подставив эти приближения в правую часть уравнения, получим новое линейное уравнение с правой частью, из которого найдем второе приближение для ρ и σ и т. д.

Ясно, что точно таким же образом можно было поступать и в том случае, если бы уравнение (6) не было линейным, а содержало, например, более высокие степени ρ. Единственное отличие состояло бы в том, что правая часть уравнения (9) содержала члены вида

$$B\rho^n \quad \text{и} \quad B\int C\rho^n d\nu,$$

где B и C — известные функции от ν ($n > 1$). В этих членах, имеющих порядок, по крайней мере, $n+1$ относительно α, нетрудно так же, как и в остальных членах правой части, сначала положить $\rho = 0$, затем вместо ρ подставить первое приближение, затем второе и т. д.

Этот метод имеет смысл применять, когда λ мало отличается от 1. В этом случае выражение

$$\frac{\alpha}{1-\lambda^2},$$

несомненно малое, будет во много раз больше α. Поэтому ясно, что различные члены в правой части уравнения (8) станут достаточно большими для того, чтобы их нельзя было отбросить в первом приближении.

В противном случае проще было бы оставить член

$$\alpha B\int \rho C d\nu$$

в правой части и полагать ρ равным сначала нулю, а затем различным приближенным значениям.

Таким образом, чаще всего в левую часть уравнения приходится переносить лишь небольшое число (обычно лишь один) членов вида

$$\alpha B\int \rho\beta \sin(\lambda\nu + \mu)\, d\nu.$$

Метод приведения уравнений к уравнениям второго порядка, о котором только что шла речь, обладает преимуществами лишь при условии, если A не содержит членов с $\sin\lambda\nu$ или $\cos\lambda\nu$. В противном случае интеграл

$$\int ACd\nu$$

содержал бы член с ν и переменная ν входила бы в выражение D не только под знаком тригонометрических функций.

Это обстоятельство не возникает в тех приложениях, для которых Гильден использовал свой метод. Однако и в тех случаях, когда оно имеет место, всегда можно избежать его.

В самом деле, запишем уравнение (6) в виде

$$\frac{d^2\rho}{d\nu^2} + \rho - \alpha B\int \rho C d\nu = \alpha A. \qquad (6\text{bis})$$

До сих пор мы считали A известной функцией от ν. Но я могу предположить, что A зависит не только от ν, но и от ρ (линейно или нелинейно, непосредственно или через производные или же через интегралы вида $\int \rho D d\nu$). Требуется лишь, чтобы члены A, зависящие от ρ, были малы по сравнению с членом

$$\alpha B\int \rho C d\nu,$$

перенесенным в левую часть.

После этого в A вместо ρ подставляем сначала нуль, затем последовательные приближения для ρ. Таким образом, A можно в каждом приближении считать известной функцией от ν.

При этих условиях уравнение (6bis) представляет собой линейное уравнение с правой частью. В самом деле, если положить

$$\int \rho C d\nu = \tau,$$

то ρ и $d^2\rho/d\nu^2$ будут линейно выражаться через производные от τ.

Чтобы проинтегрировать неоднородное уравнение, достаточно уметь интегрировать уравнение без правой части

$$\frac{d^2\rho}{d\nu^2} + \rho - \alpha B \int \rho C d\nu = 0.$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и уравнение (6), и к нему можно применить тот же метод. Единственное отличие состоит в том, что A теперь равно нулю, и та трудность, о которой только что говорилось, не возникает.

172. То, что мы делаем, сводится к следующему. Предположим, что член, содержащий однократный интеграл

$$\int \rho C d\nu$$

достаточно велик для того, чтобы его необходимо было перенести в левую часть. С помощью преобразования, которое было рассмотрено выше, этот член можно заменить суммой членов, зависящих лишь от ρ и $d\rho/d\nu$ (*причем в этой сумме можно не учитывать те члены, которые достаточно малы для того, чтобы их можно было вновь перенести в правую часть*).

Предположим теперь, что в левую часть необходимо перенести член, содержащий повторный интеграл, т. е. член вида

$$M = \alpha A \int d\nu B \left(\int \rho C d\nu \right) = A \int d\nu \left(\alpha B \int \rho C d\nu \right),$$

где A, B и C — известные функции от ν. Пренебрегая членами, которые можно оставить в правой части, получим

$$\alpha B \int \rho C d\nu = D\rho + E \frac{d\rho}{d\nu},$$

где D и E — известные функции от ν, откуда

$$M = A \int \rho D d\nu + A \int \frac{d\rho}{d\nu} E d\nu = AE\rho + A \int \rho \left(D - \frac{dE}{d\nu} \right) d\nu.$$

Таким образом, M содержит лишь члены, зависящие от однократного интеграла. Следовательно, M можно преобразовать так же, как мы делали в предыдущем пункте.

Остается показать, каким образом члены, содержащие однократные или повторные интегралы, могут появиться в наших уравнениях.

Эти уравнения можно записать в виде

$$\frac{d^2\chi}{d\nu_0^2} = A + B\chi + C\rho + D,$$

$$\frac{d^2\rho}{d\nu_0^2} + \rho = E + F\rho + G\frac{d\chi}{d\nu_0} + H\chi + K,$$

где A, B, C, E, F, G и H — известные функции от ν_0, D и K зависят от ρ' и χ' или от более высоких степеней ρ', χ' и $d\chi/d\nu_0$.

Отсюда найдем

$$\frac{d^2\rho}{d\nu_0^2} + \rho = E' + F\rho + G\int B\chi d\nu_0 + G\int C\rho d\nu_0 + H\iint B\chi d\nu_0 d\nu_0 + \\ + H\iint C\rho d\nu_0 d\nu_0 + K',$$

где E' — новая известная функция от ν_0, которую нетрудно выписать, а

$$K' = K + G\int D d\nu_0 + H\iint D d\nu_0 d\nu_0$$

зависит от ρ', χ' и более высоких степеней ρ, χ, ...

Очевидно, что, выделив члены

$$G\int C\rho d\nu_0, \qquad H\iint C\rho d\nu_0 d\nu_0,$$

можно перенести их в левую часть уравнения и преобразовать так, как говорилось выше.

173. Наше уравнение привелось к виду

$$\frac{d^2\rho}{d\nu_0^2} + A\frac{d\rho}{d\nu_0} + B\rho = C,$$

где A и B — известные функции от ν_0, а величина C содержит неизвестные функции, в частности функции ρ. Однако эти неизвестные величины необходимо сначала заменить нулем, затем их последовательными приближениями, так что C можно считать известной функцией от ν_0.

Выписанное уравнение является линейным с правой частью, однако его можно упростить еще больше, если уничтожить член с $d\rho/d\nu_0$. Как известно, для этого достаточно положить

$$\rho = \sigma e^{-\int \frac{A}{2} dt}.$$

Уравнение запишется в виде

$$\frac{d^2\sigma}{dv_0^2} + B'\sigma = C',$$

где B' и C' — новые известные функции от v_0.

В общем случае в B' достаточно удержать только один член, а остальные перенести в правую часть, так что рассматриваемое уравнение будет иметь вид уравнения (6а) из п. 169.

174. До сих пор предполагалось, что движение трех тел происходит в одной плоскости. Мало что изменилось бы и в том случае, если бы потребовалось учесть наклонения орбит.

Пусть r, v и θ означают радиус-вектор, долготу и широту первой планеты. В обозначениях п. 167 уравнения движения запишутся так

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\cos^2\theta\,\frac{dv}{dt}\right) = \frac{d\Omega}{dt},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\cos^2\theta\,\frac{d^2v}{dt^2} - r\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\mu}{r^2} = \frac{d\Omega}{dr},$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\,\frac{d\theta}{dt}\right) + r^2\sin\theta\cos\theta\,\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d\Omega}{dv}.$$

Положим

$$u = \frac{1}{r\cos\theta}, \qquad s = \operatorname{tg}\theta$$

и введем, кроме того, так же, как и в п. 167, вспомогательную переменную v_0, определяемую уравнением

$$\frac{dv_0}{dt} = u^2\sqrt{c_0}.$$

Получим уравнение

$$\frac{d^2v}{dv_0^2} = \frac{1}{c_0u^2}\,\frac{d\Omega}{dv}, \tag{1}$$

аналогичное уравнению (5) из п. 167. Аналогично найдем

$$\frac{d^2u}{dv_0^2} + u = A - \frac{\mu}{c_0}\cos^2\theta, \tag{2}$$

$$\frac{d^2s}{dv_0^2} + s = B, \tag{3}$$

где A и B — комбинации производных возмущающей функции. В A и B можно подставить вместо координат планет их приближенные значения. Тогда правые части уравнений (1) и (3) будут известны и можно будет вы-

числить ν и s. Если известно s, а следовательно, и θ, то правая часть уравнения (2) в свою очередь будет известна, что позволит вычислить u.

Действуя так, мы поступали бы в духе старых методов. Гильден же, напротив, переносил бы в левые части уравнений (1), (2), (3) некоторые члены (наиболее важные) из правых частей и, воспользовавшись для приведения получившихся уравнений к уравнениям второго порядка методами пунктов 170—173, получал бы уравнения того же вида, что и уравнения п. 169.

Промежуточная орбита

175. Выше мы полагали

$$u = u_1 + \rho, \quad \nu = \nu_1 + \chi,$$

где u_1 и ν_1 — приближенные значения u и ν.

Очевидно, выбор этих приближенных значений, в какой-то мере произвольный, имеет черезвычайно важное значение. Если действовать в духе старых методов, то в качестве u_1 и ν_1 необходимо было бы выбирать величины, отвечающие кеплеровскому движению.

Гильден предпочитал получать в первом приближении орбиту, более близкую к истинной. В самом деле, очевидно, что последовательные приближения будут сходиться очень быстро. Кроме того, в п. 133 мы видели, что случай, когда движение в первом приближении является кеплеровским, приводит к особой трудности, которую можно попытаться преодолеть.

Вот как поступал Гильден.

Сначала он предполагал, что $\nu_1 = \nu_0$, а величина u_1 задана в виде функции от ν_0 следующим образом. Возьмем уравнение

$$\frac{d^2u}{d\nu_0^2} + u\left(\frac{du}{d\nu_0}\right)^2 + \frac{\mu}{c_0} = \frac{r^2}{c_0}\frac{d\Omega}{dr}.$$

Заменим прежде всего производную $d\Omega/dr$ функцией $c_0u^2\varphi(u)$, зависящей только от u и мало отличающейся от среднего значения $d\Omega/dr$, вычисленного при условии, что u постоянно, ν изменяется от 0 до 2π и, кроме того, u' и ν' изменяются так, что вторая планета (координатами которой служат u' и ν') занимает все возможные положения на своей кеплеровской орбите. Заменим u и ν на u_1 и ν_1 так, чтобы производная $d\nu/d\nu_0$ была равна

$$\frac{d\nu_1}{d\nu_0} = \frac{d\nu_0}{d\nu_0} = 1.$$

Тогда уравнение запишется в виде

$$\frac{d^2u_1}{d\nu_0^2} + u_1 + \frac{\mu}{c_0} = \varphi(u_1). \qquad (1)$$

Это уравнение легко интегрируется в квадратурах. Нетрудно дать интерпретацию такого приближенного решения.

Присоединим к уравнению (1) уравнение

$$\frac{dv_0}{d\tau} = u_1^2 \sqrt{c_0}. \qquad (2)$$

Ясно, что если рассматривать некоторое фиктивное небесное тело, которое в момент τ имеет радиус-вектор $1/u_1$ и долготу v_0, то это тело двигалось бы так же, как если бы его притягивала некоторая неподвижная масса, расположенная в начале координат, причем закон притяжения был бы отличен от закона Ньютона.

Тем не менее это притяжение зависело бы лишь от расстояния, ибо сила притяжения, очевидно, равна

$$\mu u_1^2 - c_0 u_1^2 \varphi(u_1),$$

а $1/u_1$ есть не что иное, как расстояние от фиктивного небесного тела до начала координат, т. е. до фиктивной притягивающей массы.

Переменные t и τ, соответствующие одному и тому же значению v_0, связаны соотношением

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{u_1^2}{u^2}.$$

Переменная τ, фигурирующая лишь в этой интерпретации, носит название *приведенного времени*.

Что же касается орбиты, описываемой фиктивным телом, то она называется *промежуточной орбитой*, ибо расположена между истинной и кеплеровской орбитами.

При

$$\varphi(u) = hu^{-3} \text{ или } hu^2,$$

где h — некоторая постоянная, интегрирование уравнения (1) можно провести в эллиптических функциях.

Абсолютная орбита

176. Если разобраться в существе теории Гильдена, то станет ясно, что выбор переменной v_0 не играет никакой существенной роли и что результатов, вполне аналогичных полученным, можно достичь и с помощью иного выбора независимой переменной.

Наиболее простым и в большинстве случаев наиболее удобным является выбор в качестве независимой переменной времени t. Именно так и поступал сам Гильден в своем мемуаре помещенном в т. IX журнала «Acta mathematica».

Однако имеется и много других возможностей выбора. В некоторых своих исследованиях Гильден среди прочих пользовался одной переменной, определение которой более сложно. Эту переменную он также обозначал ν_0. Именно о ней я и хочу сказать несколько слов.

Знаменитый астроном предложил пользоваться орбитой, расположенной вблизи от истинной и названной им *абсолютной орбитой*. Эта абсолютная орбита проходит в некотором смысле посредине между промежуточной и истинной орбитами.

Обратимся к уравнениям (1) п. 167. Рассмотрим в правых частях этих уравнений главные члены. Пусть Q означает совокупность главных членов выражения $r^2\, d\Omega/d\nu$, а P — совокупность главных членов в $r^2\, d\Omega/dr$, так что разностями

$$r^2 \frac{d\Omega}{d\nu} - Q, \qquad r^2 \frac{d\Omega}{dr} - P$$

в первом приближении можно пренебречь.

Пусть Q_0 означает результат подстановки в Q вместо u, u' и ν' их приближений, записанных в виде функций от ν после чего ν, заменено на ν_0.

Введем вспомогательную функцию c_1, полагая

$$r^2 \frac{d\sqrt{c_1}}{dt} = Q_0, \tag{2}$$

и, наконец, пусть

$$r^2 \frac{d\nu_0}{dt} = \sqrt{c_1}. \tag{3}$$

Определенная таким образом функция ν_0 будет нашей новой независимой переменной. Она мало отличается от ν, поскольку удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\left(r^2 \dfrac{d\nu_0}{dt}\right)}{dt} = \frac{Q_0}{r^2},$$

в то время как ν удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\left(r^2 \dfrac{d\nu}{dt}\right)}{dt} = \frac{d\Omega}{d\nu}.$$

Эти уравнения отличаются лишь некоторыми членами, которые по предположению малы. Следовательно, можно положить

$$\nu = \nu_0 + \chi.$$

Из уравнений (2) и (3) получим

$$\sqrt{c_1}\, d\sqrt{c_1} = \frac{dc_1}{2} = Q_0 d\nu_0. \tag{4}$$

Но чтобы найти Q_0, мы производили в Q замену координат u, u' и ν' их приближенными значениями, записанными в виде функций от ν, после чего заменяли ν на ν_0.

Отсюда следует, что Q_0 зависит только от ν_0 и уравнение (4) легко интегрируется в квадратурах.

Второе уравнение (1) из п. 167 запишется в виде

$$\frac{d^2u}{d\nu_0^2} + \frac{1}{2}\frac{d\ln c_1}{d\nu_0}\frac{du}{d\nu_0} + u\left(\frac{d\nu}{d\nu_0}\right)^2 + \frac{\mu}{c_1} = \frac{r^2}{c_1}\frac{d\Omega}{dr}.$$

Ясно, что когда χ мало, производная $d\nu/d\nu_0$ мало отличается от единицы. Следовательно, в первом приближении коэффициент $(d\nu/d\nu_0)$ можно заменить единицей. Итак, если u_1 — приближенное значение u и

$$u = u_1 + \rho,$$

то для нахождения u_1 можно воспользоваться уравнением

$$\frac{d^2u_1}{d\nu_0^2} + \frac{1}{2}\frac{d\ln c_1}{d\nu_0}\frac{du_1}{d\nu_0} + u_1 + \frac{\mu}{c_1} = \frac{P_0}{c_1},$$

где P_0 означает функцию, в которую переходит P при замене ν на ν_0, u — на u_1, u' и ν' — на их приближенные значения, выраженные через ν_0.

Функция P_0 зависит лишь от u_1 и ν_0, а c_1 — функция от ν_0, получаемая из уравнения (4). В результате мы получаем дифференциальное уравнение второго порядка, связывающее u_1 и ν_0.

Преобразуя его с помощью методов п. 173, т. е. полагая

$$u_1 = \sigma\,(c_1)^{-\frac{1}{4}},$$

найдем

$$\frac{d^2\sigma}{d\nu_0^2} = F(\nu_0, \sigma).$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и уравнения (α) и (β) п. 169.

Определив таким образом координаты $1/u_1$ и ν_0 фиктивного тела, описывающего абсолютную орбиту, вычислим поправки ρ и χ с помощью аналогичных методов и получим координаты истинной планеты.

Глава XVII

СЛУЧАЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

177. Нам осталось еще следующее.

1. Проинтегрировать уравнения (6a), (6b), (6c), (5a), (α') и (β) п. **169.**

2. Посмотреть, каким образом в этих уравнениях можно отличать члены, которые надлежит перенести в левую часть, от тех, которые следует оставить в правой части.

Сначала я займусь интегрированием уравнений (6a) и (6b). Этой задаче посвящается настоящая глава.

Уравнение (6b), имеющее более общий вид, можно записать так

$$\frac{d^2\rho}{d\nu_0^2} + \rho\,[(1+\alpha) - C\,(1+\beta)\sin(\lambda\nu_0 + k)] = B''.$$

Здесь B'' считается известной функцией от ν_0. Это линейное неоднородное уравнение, интегрирование которого сводится к интегрированию однородного уравнения.

$$\frac{d^2\rho}{d\nu_0^2} + \rho\,[(1+\alpha) - C\,(1+\beta)\sin(\lambda\nu_0 + k)] = 0.$$

Если преобразовать это уравнение, изменяя обозначения и полагая

$$\rho = x, \qquad \lambda\nu_0 + k = 2t + \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{4}{\lambda^2}(1+\alpha) = q^2, \qquad \frac{4}{\lambda^2} C\,(1+\beta) = q_1,$$

то оно примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x\,(-q^2 + q_1 \cos 2t).$$

Исследование уравнения Гильдена

178. Итак, рассмотрим уравнение [47]

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x\,(-q^2 + q_1 \cos 2t). \tag{1}$$

Мы видели, что Гильдену в его исследованиях приходилось рассматривать следующее уравнение (ср. уравнения (α) и (β) п. 169):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, t), \tag{2}$$

где $f(x, t)$ — функция, допускающая разложение по степеням x и периодическая по t.

В тех приложениях, в которых Гильдену приходилось иметь дело с этим уравнением, главные члены $f(x, t)$ имели вид

$$\varphi(t) + x(-q^2 + q_1 \cos 2t),$$

где $\varphi(t)$ — периодическая функция, зависящая только от t. Остальными членами в первом приближении можно было пренебречь.

Уравнение (2) можно заменить уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(t) + x(-q^2 + q_1 \cos 2t). \tag{3}$$

Это линейное неоднородное уравнение. Его интегрирование, как известно, легко сводится к интегрированию соответствующего однородного уравнения, т. е. уравнения (1).

Итак, рассмотрим уравнение (1). Что можно сказать о нем, исходя из общих результатов о линейных уравнениях, полученных в первом томе (гл. II, п. 29 и различные пункты гл. IV)?

Прежде всего известно, что уравнение (1) имеет два частных решения вида

$$x = e^{ih't}\varphi_1(t), \qquad x = e^{-ih't}\varphi_2(t),$$

где φ_1 и φ_2 — периодические по t функции с периодом π, а два *характеристических показателя* $h\sqrt{-1}$ и $-h\sqrt{-1}$ равны по величине и имеют противоположные знаки.

Чтобы сделать следующий шаг, нам потребуется одна общая теорема, доказанная мною в мемуаре о системах линейных уравнений («Acta mathematica», т. IV, стр. 212) [48].

Пусть имеется линейное уравнение следующего вида:

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \varphi_{p-1}(x)\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} + \varphi_{p-2}(x)\frac{d^{p-2}y}{dx^{p-2}} + \ldots + \varphi_1(x)\frac{dy}{dx} + \varphi_0(x)\,y. \tag{4}$$

Коэффициенты $\varphi_i(x)$ являются функциями не только от x, но и от некоторого числа параметров, от которых они зависят линейно.

Предположим, например, что имеется три таких параметра, и обозначим их A, B и C. Функция $\varphi_i(x)$ будет иметь вид

$$\varphi_i(x) = A\varphi_i'(x) + B\varphi_i''(x) + C\varphi_i'''(x).$$

Функции $\varphi_i'(x)$, $\varphi_i''(x)$ и $\varphi_j'''(x)$ так же, как и все их производные, непрерывны внутри некоторой области x, за пределы которой мы не выходим.

Условившись об этом, зададим в точке $x = 0$ начальные значения функции y и p — 1 ее первых производных и будем изменять x от 0 до некоторого значения x_1 по определенному пути. Пусть y_1 то значение функции y, которое она принимает при $x = x_1$. Ясно, что y_1 зависит:

1) от начальных значений y и ее производных (причем зависит линейно);

2) от параметров A, B, C.

Теорема, о которой идет речь, заключается в том, что y_1 можно разложить в ряд по возрастающим степеням A, B и C; этот ряд будет сходиться при любых значениях A, B и C. Иначе говоря, y_1 есть *целая функция* от этих трех параметров.

Применим эту теорему к уравнению (1).

Пусть $F(t)$ — частное решение этого уравнения, такое, что

$$F(0) = 1, \quad F'(0) = 0$$

[для краткости я обозначил dF/dt через $F'(t)$].

Пусть $f(t)$ — второе частное решение, такое, что

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1.$$

Тогда, если x_0 и x_i' — начальные значения x и dx/dt при $t = 0$, то

$$x = x_0 F(t) + x_0' f(t).$$

Из нашей теоремы следует, что $F(t)$ и $f(t)$ являются *целыми функциями* от q^2 и q_1. То же относится и к $F'(t)$ и $f'(t)$.

В частности, предположим, что

$$x = e^{ih't}\varphi_1(t),$$

тогда

$$\varphi_1(0) = x_0, \quad \varphi_1'(0) + ih'\varphi_1(0) = x_0'$$

и

$$e^{ih'\pi}\varphi_1(\pi) = x_0 F(\pi) + x_0' f(\pi),$$

$$e^{ih'\pi}[\varphi_1'(\pi) + ih'\varphi_1(\pi)] = x_0 F'(\pi) + x_0' f'(\pi).$$

Но функция φ_1 периодическая, так что

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(\pi), \quad \varphi_1'(0) = \varphi_1'(\pi),$$

откуда

$$e^{ih'\pi}x_0 = x_0 F(\pi) + x_0' f(\pi),$$

$$e^{ih'\pi}x_0' = x_0 F'(\pi) + x_0' f'(\pi),$$

и мы получаем

$$[F(\pi) - e^{ih\pi}][f'(\pi) - e^{ih\pi}] - f(\pi)F'(\pi) = 0.$$

Таким образом, $e^{ih\pi}$ есть один из корней следующего уравнения относительно S:

$$[F(\pi) - S][f'(\pi) - e^{ih\pi}] - f(\pi)F'(\pi) = 0.$$

Аналогично находим, что другой корень равен $e^{-ih\pi}$. Следовательно, сумма корней равна $2\cos h\pi$, так что

$$2\cos h\pi = F(\pi) + f'(\pi)$$

Отсюда следует, что $\cos h\pi$ является *целой функцией* от q^2 и q_1, т. е. $\cos h\pi$ можно разложить по целым степеням q^2 и q_1 и разложение всегда будет сходиться.

Теперь я утверждаю, что это разложение содержит лишь четные степени q_1.

В самом деле, если произвести замену t на $t + \pi/2$, то решения

$$x = e^{iht}\varphi_1(t), \qquad x = e^{-iht}\varphi_2(t)$$

примут вид

$$x = e^{iht}\psi_1(t), \qquad x = e^{-iht}\psi_2(t),$$

где

$$\psi_1(t) = e^{\frac{ih\pi}{2}}\varphi_1\left(t + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\psi_2(t) = e^{-\frac{ih\pi}{2}}\varphi_2\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

— периодические функции от t. Следовательно, характеристические показатели не меняются.

Вместе с тем, так как

$$\cos 2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2t,$$

уравнение (1) записывается в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x(-q^2 + q_1\cos 2t),$$

откуда видно, что характеристические показатели и, следовательно, $\cos h$ не изменяются, если вместо q_1 подставить $-q_1$. Однако это возможно лишь при условии, если разложение $\cos h\pi$ содержит лишь четные степени q_1.

Заметим теперь, что уравнение (1) не изменится, если произвести замену t на $-t$. Отсюда следует, что $F(t)$ есть четная, а $f(t)$ — нечетная функ-

ция от t, т. е.

$$F(t) = F(-t),\ f(t) = -f(-t).$$

Но решения уравнения (1) разлагаются по синусам и косинусам аргумента $(h + 2m)\,t$, где m — целое (положительное или отрицательное) число.

Отсюда следует, что F содержит лишь косинусы, в то время как f содержит лишь синусы. Имеем

$$F(t) = \Sigma A_m \cos(h + 2m)\,t,$$
$$f(t) = \Sigma B_m \sin(h + 2m)\,t,$$

где m изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда

$$F(0) = \Sigma A_m = 1,$$
$$F(\pi) = \Sigma A_m \cos(h\pi + 2m\pi) = \Sigma A_m \cos h\pi = \cos h\pi,$$
$$f'(t) = \Sigma B_m (h + 2m) \cos(h + 2m)\,t,$$
$$f'(0) = \Sigma B_m (h + 2m) = 1,$$
$$f'(\pi) = \Sigma B_m (h + 2m) \cos h\pi = \cos h\pi.$$

Следовательно,

$$F(\pi) = f'(\pi) = \cos h\pi.$$

179. Посмотрим теперь, каким образом можно получить разложение $F(\pi)$ по возрастающим степеням q_1.

Предположим, что рассматривается более общая задача о разложении $F(t)$:

$$F(t) = F_0(t) + q_1 F_1(t) + q_1^2 F_2(t) + \ldots .$$

Для нахождения F_0, F_1, F_2, ... мы располагаем серией следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2F_0}{dt^2} + q^2 F_0 = 0,\\
&\frac{d^2F_1}{dt^2} + q^2 F_1 = F_0 \cos 2t,\\
&\frac{d^2F_2}{dt^2} + q^2 F_2 = F_1 \cos 2t,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{5}$$

Кроме того, функции F_i должны быть четными. При $t = 0$ функция F_0 должна обращаться в 1, а остальные функции F_i в 0.

Отсюда следует, что

$$F_0(t) = \cos qt,$$

$$\frac{d^2F_1}{dt^2} + q^2F_1 = \frac{\cos(q+2)t}{2} + \frac{\cos(q-2)t}{2}$$

и

$$F_1(t) = -\frac{\cos(q+2)t - \cos qt}{8(q+1)} + \frac{\cos(q-2)t - \cos qt}{8(q-1)}.$$

Далее

$$\frac{d^2F_2}{dt^2} + q^2F_2 = \alpha_0\cos(q+4)t + \alpha_1\cos(q+2)t + \\ + \alpha_2\cos qt + \alpha_3\cos(q-2)t + \alpha_4\cos(q-4)t,$$

где коэффициенты α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 найти нетрудно. Отсюда находим

$$F_2 = -\frac{\alpha_0\cos(q+4)t}{8(q+2)} - \frac{\alpha_1\cos(q+2)t}{4(q+1)} + \frac{\alpha_3\cos(q-2)t}{4(q-1)} + \frac{\alpha_4\cos(q-4)t}{8(q-2)} + \\ + \frac{\alpha_0\cos qt}{8(q+2)} + \frac{\alpha_4\cos qt}{4(q+1)} - \frac{\alpha_3\cos qt}{4(q-1)} - \frac{\alpha_4\cos qt}{8(q-2)} + \frac{\alpha_3 t\sin qt}{2q}.$$

Кроме того, очевидно, что $\alpha_2 = 1/8(q^2-1)$. Ясен общий закон написания F_i:

$$F_i(t) = \Sigma\beta^0_{i,n}[\cos(q+2n)t - \cos qt] + \\ + t\Sigma\beta^1_{i,n}\sin(q+2n)t + t^2\Sigma\beta^2_{i,n}\cos(q+2n)t + \ldots + t^k\Sigma\beta^k_{i,n}\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(q+2n)t.$$

Поскольку функция $F_i(t)$ должна быть четной, коэффициент при t^k, равный

$$\Sigma\beta^k_{i,k}\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(q+2n)t,$$

содержит лишь одни синусы, если k нечетно, и лишь одни косинусы, если k четно.

Какие значения может принимать целое число n? В первом члене, а именно в

$$\Sigma\beta^0_{i,n}[\cos(q+2n)t - \cos qt],$$

n изменяется от $-2i$ до $+2i$; в коэффициенте при t n может изменяться от $-2(i-2)$ до $+2(i-2)$; в коэффициенте при t^2 n может изменяться от $-2(i-4)$ до $+2(i-4)$ и т. д., так что k не может превзойти $i/2$.

С помощью уравнений (5) можно было бы найти рекуррентные соотношения между коэффициентами $\beta^k_{i,n}$, однако пока я не буду останавливаться на этом.

Если положить $t = \pi$, то

$$\cos(q + 2n)\pi - \cos q\pi = 0,$$

и первый член $F_i(t)$ обратится в нуль, так что

$$F_i(\pi) = \pi \Sigma \beta^1_{i,n} \sin q\pi + \pi^2 \Sigma \beta^2_{i,n} \cos q\pi + \ldots .$$

Кроме того, известно, что $F_i(\pi)$ равно нулю, если i нечетно, ибо мы заранее знаем, что разложение $F(\pi)$ не должно содержать четных степеней q_1.

Именно таким способом Тиссеран вычислил $F(\pi)$ и, следовательно, $\cos h\pi$. Он нашел

$$\cos h\pi = \cos q\pi\left[1 - \frac{\pi^2}{512\, q^2 (1-q^2)^2}\, q_1^4 + \ldots\right] + \sin q\pi\left[-\frac{\pi}{16\, q(1-q^2)}\, q_1^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(15\, q^4 - 35\, q^2 + 8)\,\pi}{1024\, q^3 (1-q^2)^3 (2^2 - q^2)}\, q_1^4 + \ldots\right].$$

Я запишу этот результат в виде

$$\cos h\pi = \varphi(q, q_1) \cos q\pi + \varphi_1(q, q_1) \sin q\pi,$$

где $\varphi(q, q_1)$ и $\varphi_1(q, q_1)$ — ряды по возрастающим степеням q_1^2, коэффициенты которых рациональны относительно q.

Первый вопрос, который следует решить, состоит в том, вещественно h или мнимо. Если

$$|\cos h\pi| = |F(\pi)| < 1,$$

то h вещественно и решение дифференциального уравнения устойчиво. Функция $F(t)$, так же, как и $f(t)$, остается все время заключенной в конечных пределах. Если же, наоборот,

$$|F(\pi)| > 1,$$

то h мнимо и функции $F(t)$ и $f(t)$ имеют вид

$$F(t) = e^{\alpha t}\psi(t) + e^{-\alpha t}\psi(-t),$$
$$f(t) = Ae^{\alpha t}\psi(t) - Ae^{-\alpha t}\psi(-t),$$

где A и α вещественные постоянные, а $\psi(t)$ — периодическая функция от t с периодом π. Отсюда следует, что $F(t)$ и $f(t)$ могут неограниченно возрастать и что решение нашего дифференциального уравнения неустойчиво.

Если временно рассматривать q и q_1 как координаты некоторой точки на плоскости, то эта плоскость окажется разделенной на две области: одна область отвечает случаю, когда $|F(\pi)|$ меньше 1 и h вещественно, а вторая — случаю, когда $|F(\pi)|$ больше 1, а h мнимо. Эти области отделены

друг от друга различными ветвями двух кривых

$$\cos h\pi = +1, \quad \cos h\pi = -1.$$

Поэтому представляет известный интерес построение обеих кривых по крайней мере в той части плоскости, которая соответствует малым значениям q_1.

При $q_1 = 0$ имеем

$$\cos h\pi = \cos q\pi.$$

Следовательно, кривая $\cos h\pi = +1$ (я буду называть ее кривой C) пересекает ось q в точках, абциссы которых являются целыми четными числами, а кривая $\cos h\pi = -1$ (я буду называть ее кривой C') пересекает ось q в точках, абсциссы которых являются нечетными целыми числами.

Все остальные точки оси q принадлежат первой области, в которой h вещественно.

Итак, рассмотрим уравнение

$$\cos h\pi - \cos q\pi - q_1^2 F_2(\pi) - q_1^4 F_4(\pi) - \ldots = 0,$$

связывающее h с q и q_1. Левая часть его обращается в нуль при $h = q$, $q_1 = 0$. Она разлагается в ряд по возрастающим степеням $h - q$ и q_1^2; наконец, ее производная по h равна $-\pi \sin q\pi$ при $h = q$, $q_1 = 0$ и, следовательно, не обращается в нуль, если только q не целое число. Таким образом, если предположить, что q не целое число, то теорема п. 30 позволяет утверждать, что h разлагается по возрастающим степеням q_1^2 и, если q_1 достаточно мало, этот ряд сходится.

Посмотрим теперь, что происходит, если число q целое. Тиссеран, применяя свою формулу, нашел

при $|q| \geqslant 3$

$$\cos h\pi = (-1)^q \left[1 - \frac{\pi^2}{512\, q^2 (1-q^2)^2}\, q_1^4 + \ldots\right],$$

при $|q| = 2$

$$\cos h\pi = 1 + \frac{5\pi^2 q_1^4}{73728} + \ldots,$$

при $|q| = 1$

$$\cos h\pi = -1 - \frac{\pi^2 q_1^2}{32} - \ldots$$

и, наконец, при $|q| = 0$.

$$\cos h\pi = 1 - \frac{\pi^2 q_1^2}{16} - \ldots.$$

В самом деле, если q целое, то $\cos q\pi$ равен ± 1, а $\sin q\pi$ обращается в нуль. Однако $\varphi_1(q, q_1)$ одновременно обращается в бесконечность, так что

произведение

$$\sin q\pi\varphi_1(q,\ q_1)$$

стремится к конечному значению, когда q стремится к целому числу.

Рассмотрим предел

$$L = \lim \sin q\pi\ \varphi_1(q,\ q_1),$$

когда q стремится к целому значению.

Этот предел будет разлагаться по степеням q_1^2, однако в разложении $\varphi_1\ (q, q_1)$ коэффициент при q_1^2 обращается в бесконечность при $|q| = 0$ или 1, коэффициент при q_1^4 обращается в бесконечность при $|q| = 0$, 1 или 2, коэффициент при q_1^6 обращается в бесконечность при $|q| = 0$, 1, 2 или 3. Отсюда следует, что если q стремится к некоторому целому n, то разложение L начнется с члена q_1^{2n}. Кроме того, разложение $\varphi\ (q, q_1) - 1$ начнется с члена q_1^4. Именно по этой причине в разложениях

$$\cos h\pi - (-1)^q,$$

найденных Тиссераном, первый член содержит q_1^2 при $|q| = 0$ или 1 и q_1^4 при $|q| > 1$.

Итак, рассмотрим уравнение кривой C, которое можно записать в виде

$$1 - \cos q\pi - q_1^2 F_2(\pi) - q_1^4 F_4(\pi) - \ldots = 0.$$

Так как кривая проходит через точку

$$q = 2n,\ q_1 = 0 \quad (n \text{ — целое}),$$

левая часть этого уравнения обращается в нуль при $q = 2n$, $q_1 = 0$ и, кроме того, она разлагается в ряд по возрастающим степеням $q - 2n$ и q_1. Нетрудно видеть, что это разложение не содержит членов нулевой и первой степени, а начинается с членов второго порядка

$$\frac{\pi^2}{16}(q - 2n)^2 + Aq_1^2,$$

где коэффициент A равен

$$\frac{\pi^2}{16} \quad \text{при} \quad n = 0$$

и нулю при $h \neq 0$.

Отсюда следует, что точка $q = 2n$, $q_1 = 0$ является двойной точкой для кривой C. Следует различать два случая.

1. Если $n = 0$, то члены второго порядка представляют собой сумму двух квадратов, обе ветви кривой, проходящие через двойную точку, становятся мнимыми, следовательно, начало координат для кривой является изолированной точкой.

2. Если $n \neq 0$, то A равно нулю; обе ветви кривой, проходящие через двойную точку, касаются друг друга и пересекают ось q под прямым углом; чтобы узнать, являются ли обе ветви вещественными или мнимыми, необходимо учесть члены с $(q - 2n)q_1^2$ и q_1^4.

Коэффициент при q_1^4, как мы видели, равен

$$\frac{+\pi^2}{512\,q^2(1-q^2)^2} \quad \text{или} \quad \frac{-5\pi^2}{73728}$$

в зависимости от того, $|n| > 1$ или $|n| = 1$.

Коэффициент при $(q - 2n)q_1^2$ получают, дифференцируя

$$\frac{\pi \sin q\pi}{16q(1-q^2)}$$

по q и полагая $q = 2n$. При этом находят

$$\frac{\pi^2}{16q(1-q^2)}.$$

Ветви кривой вещественны (в предположении, что $|n| > 1$) тогда и только тогда, когда квадратичная форма

$$\frac{x^2}{2} + \frac{xy}{16q(1-q^2)} + \frac{y^2}{512\,q^2(1-q^2)^2}$$

индефинитна. Сомнения возникают лишь в том случае, когда эта форма приводится к точному квадрату. Именно так и обстоит дело; мы увидим, что из-за этого две ветви нашей кривой имеют друг с другом касание не только первого, но и более высокого порядка. Чтобы узнать, вещественны ли они, нам необходимо было бы учесть члены более высокого порядка, если бы, к счастью, не существовало косвенного метода решения этого вопроса. Позднее я остановлюсь на этом методе подробнее.

В случае, когда $|n| = 1$, $|q| = 2$ квадратичная форма принимает вид

$$\frac{x^2}{2} - \frac{xy}{96} - \frac{5q^2}{73728}$$

и является индефинитной. Следовательно, в этом случае ветви кривой, безусловно, вещественны.

Построим теперь кривую C', уравнение которой имеет вид

$$-1 - \cos q\pi - q_1^2 F_2(\pi) - \ldots = 0.$$

Правая часть обращается в нуль при $q = n$, $q_1 = 0$ (n — целое нечетное число). Разложение ее по степеням $q - n$ и q_1 начинается с членов второго порядка

$$A(q-n)^2 + Bq_1^2.$$

Если $|n| = 1$, то A и B имеют различные знаки, и обе ветви кривой, проходящие через двойную точку, вещественны.

Если $|n| > 1$, $B = 0$, и обе ветви кривой имеют касание (и, может быть, порядка выше первого). Чтобы узнать вещественны ли они, необходимо воспользоваться тем косвенным методом, о котором упоминалось выше. Вот в чем он состоит.

Можно задать вопрос: что происходит, когда

$$F(\pi) = \cos h\pi = \pm 1?$$

В соответствии с тем, что изложено в п. 29, наиболее общее решение уравнения (1) п. 78 имеет вид

$$\psi(t) + t\psi_1(t),$$

где $\psi(t)$ и $\psi_1(t)$ — периодические функции от t с периодом π, если $F(\pi) = +1$, и с периодом 2π, если $F(\pi) = -1$ (при этом они меняют знак при замене t на $t + \pi$). Следовательно,

$$F(t) = \psi(t) + t\psi_1(t).$$

Пусть $\psi_1(t) \not\equiv 0$; эта функция — решение уравнения (1). Но $F(t)$ — функция четная, следовательно, функция $\psi(t)$ — четна, а $\psi_1(t)$ — нечетна. Поэтому $\psi_1(t)$ с точностью до постоянного множителя равна $f(t)$, в силу чего функция $f(t)$ периодическая [49].

Если $\psi_1(t)$ тождественно равна нулю, то функция $F(t)$ периодическая.

Итак, могут представиться три случая:

1) либо $F(t)$ периодическая, и тогда

$$F'(\pi) = 0;$$

2) либо $f(t)$ периодическая, и тогда

$$f(\pi) = 0;$$

3) либо обе эти функции периодические, и тогда

$$F'(\pi) = f(\pi) = 0.$$

Тот же результат можно получить и по-другому. Равенство

$$F(t)f'(t) - F'(t)f(t) = 1$$

выполняется тождественно.

Если

$$F(\pi) = f'(\pi) = \pm 1$$

то

$$F'(\pi)\, f(\pi) = 0.$$

Следовательно, по крайней мере одна из двух величин $F'(\pi)$ и $f(\pi)$ равна нулю.

Аналогично, если

$$F'(\pi) = 0 \text{ или } f(\pi) = 0,$$

то

$$F(\pi)f'(\pi) = 1,$$

и поскольку

$$F(\pi) = f'(\pi) = \cos h\pi,$$
$$\cos h\pi = \pm 1.$$

Следовательно, простые точки кривых C и C' принадлежат двум кривым

$$F'(\pi) = 0, \quad f(\pi) = 0,$$

и наоборот.

Заметим прежде всего, что $F'(\pi)$ и $f(\pi)$ являются целыми функциями от q и q_1. При $q_1 = 0$ эти функции имеют вид

$$F'(\pi) = -q \sin q\pi, \qquad f(\pi) = \frac{\sin q\pi}{q}.$$

Следовательно, если q проходит через какое-то целое, отличное от нуля значение, то $F'(\pi)$ и $f(\pi)$ обращаются в нуль, изменяя знак на противоположный. Целые значения q для обеих функций являются простыми нулями. Отсюда следует, что точки $q = n$, $q_1 = 0$ (n — целое число, отличное от нуля), являющиеся двойными точками либо для C, либо для C', служат простыми точками для каждой из двух кривых

$$F'(\pi) = 0, f(\pi) = 0.$$

Если q проходит через нуль, то $F'(\pi)$ обращается в нуль, не меняя знака (двойной нуль), а $f(\pi)$ в нуль не обращается. Следовательно, начало координат является двойной точкой для $F'(\pi) = 0$, но $f(\pi)$ в начале координат в нуль не обращается.

Имеются четыре аналитически различные кривые:

$$F(\pi) = 1, \quad F'(\pi) = 0; \quad F(t+\pi) = F(t); \qquad (\alpha)$$
$$F(\pi) = 1, \quad f(\pi) = 0; \quad f(t+\pi) = f(t); \qquad (\beta)$$
$$F(\pi) = -1, \quad F'(\pi) = 0; \quad F(t+\pi) = -F(t); \qquad (\gamma)$$
$$F(\pi) = -1, \quad f(\pi) = 0; \quad f(t+\pi) = -f(t). \qquad (\delta)$$

Таким образом, кривая C представляет собой совокупность двух кривых (α) и (β). При

$$q = 2n, \quad q_1 = 0$$

каждая из них имеет простую точку. Поэтому эта точка для кривой C является двойной, *но две ветви C, проходящие через эту точку, принадлежат, таким образом, двум аналитически различным кривым и могут быть лишь вещественными.*

Единственным исключением является начало координат

$$q = 0, \quad q_1 = 0,$$

которое служит двойной точкой для кривой α, но не принадлежит кривой β. В силу только что сказанного предыдущее рассуждение в этом случае неприменимо. Кроме того, мы видели, что обе ветви кривой α становятся мнимыми.

Аналогично кривая C' представляет собой совокупность двух кривых (γ) и (δ). Каждая из них при

$$q = 2n + 1, \quad q_1 = 0$$

имеет простую точку.

Две ветви C', проходящие через эту точку, принадлежат двум аналитически различным кривым и, следовательно, вещественны.

Выше мы видели, что замена q_1 на $-q_1$ приводит к тем же результатам, что и замена t на $t + \pi/2$.

Рассмотрим сначала кривую (α)

$$F(t + \pi) = F(t).$$

Имеем

$$F(t) = F(-t),$$

откуда

$$F\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = F\left(-t - \frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{\pi}{2} - t\right).$$

Следовательно, функция $F(t + \pi/2)$ *четная* и периодическая с периодом π. Поэтому, если произвести замену q_1 на $-q_1$, то $F(t)$ перейдет в функцию $F(t + \pi/2)$, которая также четна и периодична. Следовательно, если кривой (α) принадлежит точка (q, q_1), то ей также принадлежит и точка $(q, -q_1)$. Отсюда следует, что кривая (α) симметрична относительно оси q.

Кривая C в целом симметрична и состоит из ветвей (α) и (β). Отсюда мы заключаем (кроме того, что это нетрудно проверить), что кривая (β) также симметрична относительно оси q.

Из этого следует вывод, что кривые (α) и (β) могут иметь в точке

$$q = 2n, \; q_1 = 0$$

касание только нечетного порядка.

Рассмотрим теперь кривую (γ)

$$F(t + \pi) = -F(t).$$

Имеем

$$F\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=F\left(-\frac{\pi}{2}-t\right)=-F\left(\frac{\pi}{2}-t\right).$$

Следовательно, функция $F(t+\pi/2)$ *нечетная* и периодическая. Поэтому, если точка (q_1, q) принадлежит (γ), то точка $(q, -q_1)$ принадлежит (δ). Отсюда вытекает, что кривые (γ) и (δ) расположены симметрично относительно оси q.

Следовательно, в точке

$$q=2n+1, \quad q_1=0$$

эти кривые могут иметь касание только четного порядка. В соответствии с этим две ветви кривых имеют при $q=n$, $q_1=0$ касание нулевого порядка при $n=1$, касание первого порядка при $n=2$, касание второго порядка (по крайней мере) при $n=3$, касание третьего порядка (по крайней мере) при $n=4$. При $n>4$ порядок касания попеременно то четен, то нечетен и всегда не меньше двух.

Это наводит на мысль о том, что касание всегда имеет порядок $n-1$, однако я это утверждение не проверял.

Итог всех предшествующих рассуждений можно представить графически (рис. 6). В прямоугольнике

$$q=0, \quad q_1=0, \quad q_1=\varepsilon, \quad q=4+\varepsilon$$

заштрихованная область отвечает мнимым значениям h.

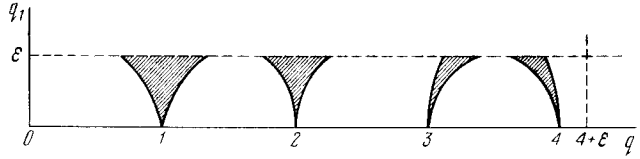


Рис. 6

С помощью уравнения, задающего $\cos h\pi$ в виде функции от q и q_1, можно найти различные более или менее быстро сходящиеся разложения, выражающие h в виде ряда по степеням q_1. Однако я считаю, что удобнее вычислить $\cos h\pi$ с помощью приведенных выше формул и находить h по тригонометрическим таблицам.

180. Коль скоро величина h найдена, можно найти коэффициенты A_n разложения

$$F(t)=\Sigma A_n\cos(h+2n)t.$$

По определению самой функции $F(t)$, должно выполняться равенство

$$\Sigma A_n = 1.$$

Кроме того,

$$F(t) = \sum A_n \frac{e^{i(h+2n)t}}{2} + \sum A_n \frac{e^{-i(h+2n)t}}{2}.$$

Но согласно тому, что изложено в п. 29, уравнение (1) п. 178 должно иметь два решения вида

$$\sum B_n \frac{e^{i(h-2n)t}}{2}, \quad \sum C_n \frac{e^{-i(h+2n)t}}{2}$$

и, следовательно, F должна быть некоторой их линейной комбинацией. Это имеет место лишь при

$$A_n = B_n = C_n.$$

Отсюда следует, что сумма

$$\sum A_n \sin(h+2n)t = \sum \frac{A_n}{2i} e^{i(h+2n)t} - \sum \frac{A_n}{2i} e^{-i(h+2n)}$$

также удовлетворяет уравнению (1) и что, следовательно, ему удовлетворяет

$$f(t) = \frac{\Sigma A_n \sin(h+2n)t}{\Sigma A_n (h+2n)}.$$

Ясно, что коэффициент A_n является функцией от q и q_1, однако эта функция не является уже целой, как это было в случае $\cos h\pi$. Точно так же эта функция не является однозначной. Очевидно, что особыми точками этой функции являются лишь те точки кривых

$$\cos h\pi = \pm 1,$$

в которых функции $F(t)$ и $f(t)$ нельзя записать в том виде, в котором их только что записали.

Как ведет себя функция A_n в окрестности одной из таких особых точек?

Предположим, что точка (q, q_1) неограниченно приближается к некоторой точке M кривой

$$F'(\pi) = 0,$$

а h стремится к некоторому целому значению p. В этом случае функция $F(t)$ в пределе все еще будет периодической. Положим для краткости

$$B = \Sigma A_n (h+2n),$$

тогда, объединяя в $F(t)$ и $f(t)$ члены с $(h+2n)t$ и $(h-2n-2p)t$, получим

$$F(t) = \Sigma [A_n \cos(h+2n)t + A_{-n-p} \cos(h-2n-2p)t],$$
$$Bf(t) = \Sigma [A_n \sin(h+2n)t + A_{-n-p} \sin(h-2n-2p)t].$$

Если затем ввести обозначения

$$A_n + A_{-n-p} = C, \qquad A_n - A_{-n-p} = D,$$

то

$$F(t) = \Sigma [C \cos(h-p)t \cos(2n+p)t - D \sin(h-p)t \sin(2n+p)t],$$
$$Bf(t) = \Sigma [C \sin(h-p)t \cos(2n+p)t + D \cos(h-p)t \sin(2n+p)t].$$

Если h стремится к p, $\cos(h-p)t$ стремится к единице, а $\sin(h-p)t$ стремится к нулю. Однако если D обращается в бесконечность, причем так, что $D(h-p)$ стремится к некоторому конечному пределу, то произведение $D \sin(h-p)t$ будет стремиться к $D_0 t$, где D_0 — постоянная.

Если точка M принадлежит кривой $F'(\pi) = 0$, то разложение $F(t)$ должно содержать только члены с

$$\cos(2n+p)t,$$

а разложение $f(t)$ — члены с $\sin(2n+p)t$ и $t\cos(2n+p)t$.

Итак, необходимо, чтобы C стремилось к конечному пределу, а D и B — к нулю. Следовательно, A_n и A_{-n-p} стремятся к конечным и равным между собой пределам. Если p четно, то A_p стремится к нулю. Нетрудно проверить, что если

$$\lim A_n = \lim A_{-n-p},$$

то, как и должно быть,

$$\lim B = \lim \Sigma A_n (h+2n) = 0.$$

Наоборот, если точка M принадлежит кривой $f(\pi) = 0$, то разложение $F(t)$ должно содержать члены с

$$\cos(2n+p)t \quad \text{и} \quad t\sin(2n+p)t,$$

а разложение $f(t)$ — члены с $\sin(2n+p)t$.

Необходимо, следовательно, чтобы C стремилось к конечному пределу, а D и B — к бесконечности.

Следовательно, A_n и A_{-n-p} стремятся к бесконечности, но их алгебраическая сумма остается конечной.

Если же точка M не принадлежит ни кривой $F'(\pi) = 0$, ни кривой $f(\pi) = 0$, то эта точка не будет особой для функции A_n. В самом деле, если точка (q, q_1) описывает замкнутую кривую вокруг M, то функции

A_n и A_{-n-p} переходят друг в друга, поскольку они являются двумя ветвями одной и той же алгебраической функции.

Отсюда следует, что если q не целое, то A_n можно разложить по возрастающим степеням q_1 и радиус сходимости этого разложения будет равен модулю ближайшей особой точки, а особыми точками будут те точки кривых C и C', которые отвечают рассматриваемому значению q.

Необходимо еще найти коэффициенты разложения. Предположим, что эта задача решена, и

$$F(t) = \Sigma A_n \cos(h + 2n)\, t = \Sigma A_n \cos(q + 2n + h - q)\, t.$$

Разлагая по степеням $h - q$, получаем

$$F(t) = \Sigma A_n \cos(q + 2n)\, t - t \Sigma A_n (h - q) \sin(q + 2n)\, t - \\ - \frac{t^2}{1 \cdot 2} \Sigma A_n (h - q)^2 \cos(q + 2n)\, t + \ldots .$$

Это разложение, содержащее тригонометрические функции от $(q + 2n)\, t$, умноженные на степени t, должно совпадать с найденным ранее разложением

$$F(t) = \Sigma q_1^i F_i(t),$$

$$F_i(t) = \Sigma \beta^0_{i,n} [\cos(q + 2n)\, t - \cos qt] + t \Sigma \beta^1_{i,n} \sin(q + 2n)\, t + \ldots .$$

В самом деле, заметим, что A_n, $A_n (h - q)$, $A_n (h - q)^2$ разлагаются по возрастающим степеням q_1.

Приравнивая оба разложения, получаем

$$A_n = \Sigma q_1^i \beta^0_{i,n}$$

и

$$A_0 = 1 - \sum_i q_1^i \Big(\sum_n \beta^0_{i,n} \Big).$$

Итак, мы получаем способ вычисления коэффициентов разложения. Скорость сходимости, вообще говоря, достаточна, если только q не слишком мало отличается от целого. Если же q мало отличается от некоторого целого p, то сходимость изменится следующим образом.

Поскольку A_n и A_{-n-p} переходят друг в друга при обходе вокруг ближайшей особой точки, обе функции

$$(A_n + A_{-n-p}) \quad \text{и} \quad (A_n - A_{-n-p})^2$$

остаются однозначными в окрестности этой особой точки, но первая из этих функций конечна, а вторая обращается в бесконечность первого порядка, если эта особая точка принадлежит $f(\pi) = 0$. Но в этом случае произведение

$$(A_n - A_{-n-p})^2 f(\pi)$$

остается конечным. Разложения

$$A_n + A_{-n-p} \quad \text{и} \quad (A_n - A_{-n-p})^2 f(\pi)$$

сходятся быстрее разложений A_n и A_{-n-p}. Следовательно, удобно воспользоваться ими и найти затем A_n и A_{-n-p}, решив квадратное уравнение.

Заметим, наконец, что рассмотрение вида кривых C и C' в окрестности точек

$$q = n, \quad q_1 = 0$$

особенно упростится, если вместо разложения $F(\pi)$ воспользоваться разложениями $F'(\pi)$ и $f(\pi)$.

Все сказанное составляет полную теорию уравнения (1). Тем не менее я должен еще рассказать о различных методах, предложенных для интегрирования этого уравнения, а именно, методе, основанном на теоремах Якоби, и методах Гильдена, Брунса, Хилла и Линдштедта.

Метод Якоби

181. К уравнению (1) можно применить метод, подробно изложенный в главе IX (единственное различие состоит в том, что на этот раз ряды, безусловно, будут сходиться). В самом деле, уравнение (1) является частным случаем уравнения (3) п. 2. Однако мы видели, что уравнение (3) п. 2 можно привести к каноническому виду уравнений Якоби.

Итак, положим

$$x = \sqrt{\frac{2x_1}{q}} \sin y_1, \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{2qx_1} \cos y_1, \quad y_2 = t, \quad q = \mu q_1$$

и

$$F = -qx_1 - x_2 + \mu x_1 \sin^2 y_1 \cos^2 2y_2.$$

Тогда уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q^2 x = q_1 x \cos 2t \tag{1}$$

можно будет заменить каноническими уравнениями

$$\frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2} = 1, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1} = \mu \sin 2y_1 \cos 2y_2,$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1} = q - \mu \sin^2 y_1 \cos 2y_2.$$

Таким образом, задача интегрирования сведется к интегрированию уравнения с частными производными

$$q \frac{dS}{dy_1} + \frac{dS}{dy_2} = \mu \frac{dS}{dy_1} \sin^2 y_1 \cos 2y_2, \tag{2}$$

к которому непосредственно применим метод последовательных приближений п. 125.

Однако использование этого метода не дает особых преимуществ, если только уравнение (1) не является приближенным уравнением поставленной задачи и если после интегрирования этого уравнения не требуется получать дальнейшие приближения с помощью метода вариации произвольных постоянных или этим методом не пользуются для проверки.

Заметим, между прочим, что интегрирование уравнения (2) сводится к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy_2}{dy_1} = q + \mu \sin^2 y_1 \cos 2y_2.$$

Как бы то ни было, попытаемся найти, какое соотношение может существовать между функцией S, определяемой уравнением (2), и функциями $F(t)$ и $f(t)$, определенными в предыдущих пунктах.

Общее решение канонических уравнений, соответствующих уравнению (1), мы найдем с помощью замены переменных, которая производится следующим образом. Напомню, что мы обозначили

$$F(t) = \Sigma A_n \cos(h + 2n)\, t.$$

Обозначая через x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0 постоянные интегрирования, получаем

$$\sqrt{\frac{2x_1}{q}} \sin y_1 = x_1^0 \sum A_n \cos(ht + hy_1^0 + 2nt + 2ny_2^0),$$

$$\sqrt{2qx_1} \cos y_1 = -x_1^0 \Sigma A_n (h + 2n) \sin(ht + hy_1^0 + 2nt + 2ny_2^0).$$

$$y_2 = t + y_2^0, \qquad x_2 = x_2^0 + \int \frac{dF}{dy_2}\, dt.$$

Если из этих уравнений исключить две постоянные y_1^0 и y_2^0, а сами уравнения разрешить относительно x_1 и x_2, то x_1 и x_2 запишутся в виде функций от y_1, y_2, x_1^0 и x_2^0. Кроме того, выражение

$$x_1 dy_1 + x_2 dy_2 = dS$$

будет полным дифференциалом (ср. конец п. 19).

Итак, положив для краткости

$$ht + hy_1^0 = \varphi,$$

получим

$$\sqrt{\frac{2x_1}{q}} \sin y_1 = x_1^0 \Sigma A_n \cos(\varphi + 2ny_2),$$

$$\sqrt{2qx_1} \cos y_1 = -x_1^0 \Sigma A_n (h + 2n) \sin(\varphi + 2ny_2).$$

Требуется исключить φ из этих двух уравнений.

Для этого заметим, что уравнения можно записать в виде

$$\sqrt{\frac{2x_1}{q}}\,\frac{\sin y_1}{x_1^0} = \theta_1(y_2)\cos\varphi + \theta_2(y_2)\sin\varphi,$$

$$\sqrt{2qx_1}\,\frac{\cos y_1}{x_1^0} = \theta_3(y_2)\cos\varphi + \theta_4(y_2)\sin\varphi,$$

где θ — функции, периодические по y_2, с периодом π. Эти функции нетрудно выразить через функции $F(t)$ и $f(t)$. Разрешая уравнения относительно $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, получаем

$$\frac{x_1^0}{\sqrt{x_1}}\cos\varphi = \eta_1(y_2)\cos y_1 + \eta_2(y_2)\sin y_1,$$

$$\frac{x_1^0}{\sqrt{x_1}}\sin\varphi = \eta_3(y_2)\cos y_1 + \eta_4(y_2)\sin y_1.$$

Четыре функции $\eta(y_2)$ — периодические с периодом π; они легко выражаются через θ и, следовательно, через $F(t)$ и $f(t)$. Возводя в квадрат, получаем, если заметить, что x должен быть четной функцией относительно y_1,

$$\frac{(x_1^0)^2}{x_1} = \zeta_0(y_2) + \zeta_1(y_2)\cos 2y_1 + \ldots,$$

где две функции ζ также периодические с периодом π и легко выражаются через $F(t)$ и $f(t)$.

Но

$$x_1 = \frac{dS}{dy_1}.$$

Отсюда вытекает следующее. Производная dS_1/dy_1 является периодической функцией с периодом π как относительно y_1, так и относительно y_2, и разложение ее так же, как и разложение, полученное с помощью метода п. 125, содержит члены с $\cos(2my_1 + 2ny_2)$, где m и n могут принимать всевозможные целые значения. Обратная функция

$$\frac{1}{\left(\frac{dS}{dy_1}\right)},$$

также периодическая и по y_1, и по y_2, может содержать лишь члены с

$$\cos 2ny_2 \quad \text{или} \quad \cos(2y_1 + 2ny_2).$$

Ясно, что dS/dy_1 — функция четная как относительно y_1, так и относительно y_2.

Если положить

$$u = \frac{1}{\left(\frac{dS}{dy_1}\right)},$$

то из уравнения (2) получим

$$q\frac{du}{dy_1} + \frac{du}{dy_2} = \mu\left(\frac{du}{dy_1}\sin^2 y_1 \cos 2y_2 - 2u \sin y_1 \cos y_1 \cos 2y_2\right).$$

Методы п. 125 применимы к этому уравнению, хотя оно содержит не только производные от u, но и саму функцию u.

Имеем

$$u = u_0 + \mu u_1 + \mu^2 u_2 + \ldots.$$

Коэффициент u_0 — постоянная. Нетрудно проверить, что u_1, u_2, ... имеют одинаковый вид, а именно:

$$u_i = \Sigma A_n^i \cos 2ny_2 + \Sigma B_n^i \cos(2y_1 + 2ny_2).$$

Легко выписать рекуррентные соотношения, пользуясь которыми можно определять постоянные

$$A_n^{i+1} \quad \text{и} \quad B_n^{i+1},$$

если постоянные A_n^i и B_n^i известны.

Метод Гильдена

182. Э. Пикар доказал следующую теорему.

Если коэффициентами линейного уравнения служат двоякопериодические функции, а его общее решение не имеет иных особых точек, кроме полюсов, то это решение выражается через «двоякопериодические функции второго рода», т. е. функции, которые умножаются на некоторый постоянный множитель, если переменная получает приращение, равное периоду.

Важность этой теоремы обусловлена двумя следующими обстоятельствами:

1) по самому виду уравнения всегда нетрудно узнать, имеет ли его общее решение другие особенности, кроме полюсов;

2) все двоякопериодические функции второго рода просто выражаются через функции θ Якоби или функции σ Вейерштрасса.

Гильдену принадлежит остроумная идея применения этой теоремы к уравнению (1). Однако было бы несправедливым не упомянуть в этой связи имя Эрмита. То, чем на самом деле воспользовался Гильден, представляет собой теорему Эрмита об уравнении Ляме, которая хотя и является всего лишь частным случаем теоремы Пикара, была доказана значительно раньше.

Уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (a + b\cos^2 t)\,x, \tag{2}$$

если ввести обозначения

$$a = -q^2 + \frac{q_1}{2}, \qquad b = \frac{q_1}{2}.$$

Рассмотрим функцию

$$\cos \operatorname{am} t = \operatorname{cn} t \qquad (\operatorname{mod} k).$$

По самому определению функции cn t ясно, что cn t стремится к cos t, если k стремится к нулю. Следовательно, если k мало, уравнение (2) можно заменить следующим уравнением:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x\,(a + b\operatorname{cn}^2 t), \tag{3}$$

причем приближение будет тем точнее, чем меньше k.

Установив это, посмотрим, каковы условия, при которых общее решение уравнения (3) не имеет иных особых точек, кроме полюсов. Единственной особой точкой уравнения (3) является точка

$$\frac{\omega' i}{2},$$

если через ω и $\omega' i$ обозначить периоды $\operatorname{cn}^2 t$. В самом деле, при

$$t = \frac{\omega' i}{2}$$

функция cn t обращается в бесконечность. Известно, что вычет cn t равен $-\sqrt{-1}/k$, так что, разлагая $\operatorname{cn}^2 t$ по степеням

$$t - \frac{\omega' i}{2} = u,$$

получаем ряд следующего вида:

$$-\frac{1}{k^2u^2} + \alpha_0 + \alpha_1 u^2 + \ldots,$$

содержащий лишь четные степени u.

Нетрудно найти условие, при котором разложение x по возрастающим степеням u начинается с u^{-n}: для этого достаточно в обеих частях уравнения (3) приравнять члены с u^{-n-2}, которые будут в этом случае членами наименьшей степени. Получим

$$n(n+1) = +\frac{b}{k^2},$$

откуда

$$k^2 = + \frac{q_1}{2n(n+1)}. \tag{4}$$

Если это условие выполняется и если число n целое, то уравнение (3) имеет частное решение, обладающее полюсом при $t = \omega' i/2$.

Как ведет себя другое решение? Теория линейных уравнений утверждает, что это решение при $t = \omega' i/2$ может иметь только либо полюс, либо логарифмическую особенность. Рассматривая разложение x по степеням u, нетрудно показать, что из четности функции $a + b\,\mathrm{cn}^2\,t$ относительно u следует, что разложение решений не содержит логарифм. Подробности можно найти в известных работах Фукса по линейным уравнениям в т. 66 «Journal de Crelle» и в диссертации Таннери (Paris, Gauthier-Villars, 1873), где приводятся основные результаты этих работ. Итак, если условие (4) выполнено, то уравнение (3) имеет два частных решения вида

$$x = \frac{\theta(t-a_1)\,\theta(t-a_2)\ldots\theta(t-a_n)}{\theta^n(t)},$$

где через θ обозначена та из четырех функций θ, которая обращается в нуль при $t = \omega' i/2$.

Нетрудно найти n величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$, так как исследования Эрмита по теории уравнения Ляме содержат полное решение вопроса.

Целое число n можно теперь выбрать достаточно большим для того, чтобы значение k, удовлетворяющее условию (4), было сколь угодно мало и, следовательно, чтобы уравнения (2) сколь угодно мало отличались от уравнений (3).

Однако поскольку q_1, вообще говоря, очень мало, Гильден считает, что в приложениях можно ограничиваться первым приближением, и полагает $n = 1$.

Метод Брунса

183. Обратимся снова к уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q^2 x = q_1 x \cos 2t \tag{1}$$

и положим

$$x = e^{\int z\,dt}.$$

Уравнение запишется в виде

$$\frac{dz}{dt} + z^2 + q^2 = q_1 \cos 2t. \tag{2}$$

Предположим теперь, что z разложено по возрастающим степеням

$$z = z_0 + q_1 z_1 + q_1^2 z_2 + \dots .$$

Коэффициенты

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \dots$$

мы найдем последовательно из уравнений

$$\begin{aligned}
z_0 &= \pm iq, \\
\frac{dz_1}{dt} + 2z_0 z_1 &= \cos 2t, \\
\frac{dz_2}{dt} + 2z_0 z_2 &= -z_1^2, \\
\frac{dz_3}{dt} + 2z_0 z_3 &= -2z_1 z_2, \\
\frac{dz_4}{dt} + 2z_0 z_4 &= -2z_1 z_3 - z_2^2, \\
\frac{dz_5}{dt} + 2z_0 z_5 &= -2z_1 z_4 - 2z_2 z_3, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{3}$$

Уравнения (3) позволяют последовательно вычислить z_k. В самом деле, если k первых из этих уравнений проинтегрированы и, следовательно если известны

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_{k-1},$$

то $(k+1)$-е уравнение запишется в виде (беря, например, $z_0 = +iq$)

$$\frac{dz_k}{dt} + 2iqz_k = U_k,$$

где U_k — известная функция от t.

Если $z_0,\ z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_{k-1}$ — периодические функции от t с периодом π, то и U_k также периодическая, и можно записать

$$U_k = \Sigma a_n e^{2nit},$$

откуда

$$z_k = \sum \frac{a_n e^{2nit}}{2i(n+q)}.$$

Следовательно, при условии, что q не есть целое число, z_k можно считать некоторой периодической функцией от t.

Тогда z — периодическая функция от t, которую можно записать в виде

$$z = ih + \frac{du}{dt},$$

где ih — среднее значение z, а u — другая периодическая функция. Отсюда получаем частное решение уравнения (1)

$$x = e^{iht+u}.$$

Функция, которую в п. 178 обозначали $F(t)$, является вещественной частью от

$$e^{iht}e^{u}.$$

Этот метод особенно прост, если требуется найти разложение h по степеням q_1.

Метод Линдштедта

184. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q^2x - q_1x\cos 2t = 0 \tag{1}$$

и его частное решение

$$x = F(t) = \Sigma A_n \cos(h + 2n)t.$$

Ясно, что

$$A_n[q^2 - (h + 2n)^2] = \frac{q_1}{2}(A_{n-1} + A_{n+1}). \tag{2}$$

Требуется так подобрать h и A_n, чтобы выполнялись уравнения (2), а ряд $F(t)$ сходился. Точно так же можно рассматривать неоднородное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q^2x - q_1x\cos 2t = \beta\cos\lambda t. \tag{3}$$

Это уравнение имеет частное решение вида

$$x = \Sigma B_n \cos(\lambda + 2n)t.$$

Коэффициенты B_n было бы нетрудно вычислить (с помощью обычного метода интегрирования линейных уравнений с правой частью), коль скоро h и A_n известны. Однако если требуется произвести прямые вычисления, то необходимо рассмотреть уравнения

$$B_n[q^2 - (\lambda + 2n)^2] = \frac{q_1}{2}(B_{n-1} + B_{n+1}), \tag{4}$$

аналогичные уравнениям (2). При $n = 0$ это уравнение следует заменить уравнением

$$B_0(q^2 - \lambda^2) = \frac{q_1}{2}(B_{-1} + B_1) + \beta, \tag{4 bis}$$

которое совпадает с одним из уравнений (2), если положить $\lambda=h$, $\beta=0$. Пусть

$$\frac{q_1}{2[q^2-(\lambda+2n)^2]}=M_n,$$

M_n зависит от λ. Положим при $n>0$

$$\alpha_n=\frac{B_n}{B_{n-1}},$$

а при $n<0$, наоборот,

$$\alpha_n=\frac{B_n}{B_{n+1}},$$

так что

$$\alpha_1=\frac{B_1}{B_0},\ \alpha_2=\frac{B_2}{B_1},\ \ldots,\ \alpha_{-1}=\frac{B_{-1}}{B_0},\ \alpha_{-2}=\frac{B_{-2}}{B_{-1}},\ \ldots.$$

В предположении, что $n>0$, уравнения (4) запишутся в виде

$$\frac{1}{M_n}=\alpha_{n+1}+\frac{1}{\alpha_n},$$

откуда

$$\alpha_n=\frac{M_n}{1-M_n\alpha_{n+1}}=\frac{M_n}{1-\dfrac{M_nM_{n+1}}{1-M_{n+1}\alpha_{n+2}}}=\ldots.$$

Следовательно, мы нашли α_1 в виде непрерывной дроби

$$\cfrac{M_1}{1-\cfrac{M_1M_2}{1-\cfrac{M_2M_3}{1-\cfrac{M_3M_4}{1-\ldots}}}}$$

Сходится ли эта непрерывная дробь? Пусть P_n/Q_n — ее n-я подходящая дробь, тогда

$$P_n=P_{n-1}-P_{n-2}M_nM_{n-1},\qquad Q_n=Q_{n-1}-Q_{n-2}M_nM_{n-1} \tag{5}$$

и, кроме того,

$$P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n=M_1^2M_2^2M_3^2\ldots M_{n-1}^2M_n.$$

Замечу прежде всего, что если n неограниченно возрастает, то M_n стремится к нулю, и ряд

$$M_1+M_1M_2+M_2M_3+M_3M_4+\ldots \tag{6}$$

сходится абсолютно (за исключением того случая, когда одна из величин M_n обращается в бесконечность, т. е. того случая, когда λ равно $\pm q$ с точностью до целого числа. В последующих рассмотрениях этот случай следует исключить). Кроме того, начиная с некоторого места все члены этого ряда будут положительными.

Теперь я утверждаю, что P_n стремится к некоторому конечному пределу. Аналогично обстоит дело и с Q_n.

Действительно, P_n и Q_n определяются из рекуррентных уравнений (5) Найдем из этих же уравнений две величины R_n и R_n', такие, что

$$R_n = R_{n-1} - R_{n-2}M_nM_{n-1},$$
$$R_n' = R_{n-1}' - R_{n-2}'M_nM_{n-1}.$$

Любые две из величин R_n, а также любые две из величин R_n' можно задать произвольно.

Рассмотрим p первых членов ряда (6), следующих за n-м членом:

$$M_nM_{n+1} + M_{n+1}M_{n+2} + \ldots + M_{n+p-1}M_{n+p}.$$

Пусть $S_{n,p}$ — сумма этих p членов. Число n всегда можно выбрать достаточно большим, чтобы $S_{n,p}$ была положительна и меньше 1.

Запишем рекуррентное уравнение

$$R_{n+p} = R_{n+p-1} - R_{n+p-2}M_{n+p-1}M_{n+p}.$$

Из этого уравнения видно, что если

$$1 > R_{n+p-1} > (1 - S_{n,\,p-1}),$$
$$1 > R_{n+p-2} > (1 - S_{n,\,p-2}) > 0,$$

то

$$1 > R_{n+p} > (1 - S_{n,\,p}). \tag{7}$$

Следовательно, достаточно выбрать R_{n+1} и R_{n+2} так, чтобы удовлетворялось неравенство (7), как этому неравенству будут удовлетворять все R_{n+p}. Таким образом, R_{n+p} всегда больше $1 - S_{n,p}$ и, следовательно, положительны. Кроме того, рекуррентное соотношение показывает, что R_{n+p} монотонно убывает при возрастании индекса $n + p$. Отсюда следует, что R_{n+p} стремится к некоторому конечному пределу. Выберем R_{n+1}, R_{n+2}, R_{n+1}' и R_{n+2}' так, чтобы выполнялось неравенство (7) и чтобы определитель

$$R_{n+1}R_{n+2}' - R_{n+2}R_{n+1}'$$

был отличен от нуля.

Тогда R_{n+p} и R_{n+p}' будут стремиться к двум конечным вполне определенным и отличным от нуля пределам R и R'. Поскольку P_n и Q_n удовлетворяют таким же рекуррентным соотношениям, как и R_n и R_n', и эти соот-

ношения линейны, имеем

$$P_n = \mu R_n + \mu' R_n',$$
$$Q_n = \mu_1 R_n + \mu_1' R_n',$$

где μ, μ', μ_1, μ_1' — постоянные коэффициенты. Предел нашей непрерывной дроби будет иметь вид

$$\frac{\mu R + \mu' R'}{\mu_1 R + \mu_1' R'}.$$

Может случиться, что при некоторых значениях q_1, q и λ и, следовательно, при некоторых значения коэффициентов μ эта дробь обратится в нуль или в бесконечность. Однако она никогда не будет неопределенностью типа $0/0$.

Почти ничего не изменяется по сравнению с предыдущим и в том случае, когда $q = \pm(\lambda + 2n)$ и, следовательно, $M_n = \infty$. Например, если бы $M_2 = \infty$, то наша непрерывная дробь имела бы вид

$$\cfrac{M_1}{1 + \cfrac{M_1}{M_3}}$$
$$\cfrac{}{1 - \cfrac{M_3 M_4}{1 - \ldots}}$$

Пределом этой непрерывной дроби является некоторая функция от λ, которую можно обозначить через $\psi(\lambda)$ и записать

$$\alpha_1 = \psi(\lambda).$$

Аналогично находим

$$\alpha_{-1} = \psi(-\lambda), \quad \alpha_2 = \psi(\lambda + 2), \quad \alpha_3 = \psi(\lambda + 4), \quad \alpha_n = \psi(\lambda + 2n - 2),$$
$$\alpha_{-2} = \psi(2 - \lambda), \quad \alpha_{-n} = \psi(2n - 2 - \lambda),$$

из чего следует характеристическое свойство функции $\psi(\lambda)$, а именно,

$$\psi(\lambda) + \frac{1}{\psi(\lambda - 2)} = \frac{2(q^2 - \lambda^2)}{q_1}.$$

Если $\psi(\lambda)$ и $\psi(-\lambda)$ вычислены, то все отношения α_n и α_{-n} вычисляются легко. Следовательно, если коэффициент B_0 вычислен, то коэффициенты B_n находятся сразу же. Но B_0, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$B_0(q^2 - \lambda^2) = \frac{B_0 q_1}{2}[\psi(\lambda) + \psi(-\lambda)] + \beta,$$

которое и определяет B_0.

При $\lambda = h$ коэффициент B_n должен быть равен A_n, а β должно быть равно 0. Отсюда получаем следующее уравнение, позволяющее определить h:

$$q^2 - h^2 = \frac{q_1}{2}[\psi(h) - \psi(-h)].$$

Коль скоро h найдено (в общем случае найти h легче с помощью изложенных выше методов), коэффициенты α_n и $A_n = B_n$ вычисляют так, как мы только что объяснили.

Метод Хилла

185. Вернемся к уравнениям (1), (2), (3), (4) и (4bis) предыдущего пункта. Эти уравнения линейны, и, хотя число их бесконечно, Хилл отважился применить к ним обычные методы решения конечного числа линейных уравнений, а именно, метод определителей.

Насколько обоснован такой подход? Именно этот вопрос был подробно рассмотрен в мемуаре, опубликованном мной в т. XIV «Bulletin de la Société Mathématique de France» [50]. Я приведу здесь основные результаты этого мемуара.

Рассмотрим бесконечную таблицу с двойным входом

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & a_{21} & a_{31} & a_{41} & \dots & a_{n1} & \dots, \\
a_{12} & 1 & a_{32} & a_{42} & \dots & a_{n2} & \dots, \\
a_{13} & a_{23} & 1 & a_{43} & \dots & a_{n3} & \dots, \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{1n} & a_{2n} & \dots & \dots & a_{n-1,n} & 1 & a_{n+1,n}, \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array} \qquad (5)$$

Элементы, стоящие на главной диагонали этой таблицы, равны 1.

Пусть Δ_n — определитель, составленный из n первых строк и n первых столбцов таблицы (5). Я буду говорить, что таблица (5) есть определитель бесконечного порядка и что этот определитель сходится, если Δ_n стремится к конечному вполне определенному пределу Δ при неограниченно возрастающем n.

Чтобы выяснить условия сходимости определителя, воспользуемся следующим методом вычисления определителя, известным под названием *алгебраического подбора*.

Пусть требуется вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разложим произведение

$$\prod_p \left(\sum_n a_{pn}\right),$$

затем каждому слагаемому в разложении будем приписывать коэффициенты $+1$, -1 или 0 в зависимости от того, что требуется. В результате получим определитель D.

Отсюда нетрудно вывести следующее неравенство. Запишем произведение

$$\Pi = \prod_p \left(\sum_n |a_{pn}|\right),$$

тогда

$$|D| \leqslant \Pi. \tag{6}$$

Предположим теперь, что некоторые элементы в определителе D заменены нулями, при этом определитель D перейдет в D', а произведение Π в произведение Π'. В разложении Π некоторые члены обратятся в нуль, обратятся в нуль и соответствующие члены в разложении определителя D. Имеем

$$|D - D'| \leqslant \Pi - \Pi'. \tag{7}$$

Таковы два весьма простых неравенства, которые послужат для нас отправным пунктом.

Для сходимости определителя Δ бесконечного порядка достаточно, чтобы сходилось соответствующее произведение Π, которое имеет вид

$$(1 + |a_{21}| + |a_{31}| + \ldots + |a_{n1}| + \ldots)(1 + |a_{12}| + |a_{32}| + \ldots + |a_{n2}| + \ldots)$$
$$(1 + |a_{13}| + |a_{23}| + \ldots)\ldots \tag{8}$$

или в силу известной теоремы, чтобы сходился ряд

$$|a_{21}| + |a_{31}| + |a_{41}| + \ldots + |a_{n1}| + \ldots + |a_{12}| + |a_{32}| + \ldots + |a_{13}| + \ldots.$$

Действительно, пусть Δ_n и Δ_{n+p} — определители, составленные из n и $n + p$ первых строк и столбцов таблицы (5). Пусть Π_n и Π_{n+p} — значения соответствующих произведений Π, определенных выше.

Поскольку в таблице (5) члены, стоящие на главной диагонали, равны 1, переход от Δ_{n+p} к Δ_n происходит за счет обращения в нуль некоторых элементов определителя Δ_{n+p}. Следовательно,

$$|\Delta_{n+p} - \Delta_n| < \Pi_{n+p} - \Pi_n.$$

Но если произведение (8) сходится, то правая часть этого неравенства стремится к нулю, когда n и p неограниченно возрастают. Следовательно, стремится к нулю и левая часть этого неравенства, что и доказывает тот

факт, что Δ_n стремится к некоторому конечному вполне определенному пределу.

Итак, для сходимости определителя Δ достаточно, чтобы ряд, составленный из всех элементов этого определителя, не стоящих на главной диагонали, сходился абсолютно.

Теперь я хочу убедиться в том, что определитель сходится абсолютно, т. е. что его строки и столбцы можно переставлять, не изменяя предельного значения этого определителя.

Действительно, пусть имеются две таблицы, аналогичные таблице (5) и различающиеся только порядком строк и столбцов. Кроме того, я все же предполагаю, что как в одной, так и в другой таблице на главной диагонали стоят элементы, равные 1. Пусть Δ_n — определитель, составленный из первых n строк и столбцов первой таблицы, а Δ'_p — определитель, составленный из p первых строк и столбцов второй таблицы. Число p выбрано достаточно большим, чтобы все элементы Δ_n входили в Δ'_p. Пусть Π_n и $\Pi_{p'}$ — произведения Π, соответствующие определителям Δ_n и Δ'_p. От определителя $\Delta_{p'}$ к Δ_n можно перейти, обратив некоторые элементы $\Delta_{p'}$ в нуль. Следовательно, можно записать

$$|\Delta'_p - \Delta_n| < \Pi'_p - \Pi_n.$$

Однако в силу того, что произведение (8) сходится абсолютно,

$$\lim \Pi'_p = \lim \Pi_n \quad (n,\ p \to \infty).$$

Следовательно,

$$\lim \Delta'_p = \lim \Delta_n,$$

что и требовалось доказать.

Представим себе теперь, что таблица (5) не ограничена в двух направлениях, так что номера ее строк и столбцов изменяются от $-\infty$ до $+\infty$.

Элемент, принадлежащий одновременно строке с номером n и столбцу с номером p, обозначим a_{np}. Числа n и p могут принимать любые целые, положительные или отрицательные значения, а также быть равными нулю.

Обозначим через Δ_n определитель, составленный из $2n + 1$ строк с номерами $-n$, $-n + 1$, $-n + 2$, ..., -1, 0, 1, 2, ..., $n - 1$, n и $2n + 1$ столбцов с теми же номерами. Определитель бесконечного порядка сходится, если Δ_n стремится к конечному вполне определенному пределу.

Предполагается, что элементы, стоящие на главной диагонали, всегда равны 1, т. е. $a_{nn} = 1$.

Рассуждая так же, как и выше, находим, что определитель сходится абсолютно, если сходится ряд

$$\Sigma |a_{np}| \qquad (n \neq p;\ n,\ p \text{ изменяются от } -\infty \text{ до } +\infty).$$

Предположим теперь, что в нашей таблице с двойным входом, т. е. в определителе бесконечного порядка (таково было его определение), все

элементы некоторой строки заменены величинами

$$\ldots x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

каждая из которых по абсолютной величине меньше некоторого положительного числа k. Я утверждаю, что определитель будет по-прежнему сходиться, если сходится ряд

$$\Sigma |a_{np}| \qquad (n \neq p).$$

Действительно, выберем, как и раньше, в таблице с двойным входом $2n + 1$ строк и $2n + 1$ столбцов и образуем определитель Δ_n. Предположим, что мы уже просуммировали абсолютные значения элементов каждой строки, за исключением той, элементы которой заменены величинами x. Образуем произведение Π_n полученных таким образом $2n$ сумм. Любой член разложения определителя Δ_n будет каким-то членом произведения Π_n, умноженным на одну из величин x с точностью до знака. Следовательно, в силу предположения

$$|x_i| < k$$

должно выполняться неравенство

$$|\Delta_n| < k\Pi_n.$$

Если какие-то элементы Δ_n заменить нулями, Δ_n перейдет в Δ'_n, а произведение Π_n перейдет в Π'_n. Какие-то члены произведения Π_n обратятся в нуль, обратятся в нуль и некоторые члены Δ_n. Итак,

$$|\Delta'_n - \Delta_n| < k(\Pi_n - \Pi'_n).$$

Заметим теперь, что для перехода от Δ_{n+p} к определителю Δ_n достаточно в первом определителе некоторые элементы положить равными нулю. Мы обнаружим, что

$$|\Delta_{n+p} - \Delta_n| < k(\Pi_{n+p} - \Pi_n).$$

Так же, как и ранее, найдем, что Δ_n стремится к вполне определенному конечному пределу, если к конечному пределу стремится Π_n. В свою очередь сходимость Π_n обусловлена сходимостью ряда

$$\Sigma |a_{np}| \qquad (n \neq p).$$

186. Применим эти принципы к одному частному случаю, рассмотренному Хиллом в его мемуаре о движении перигея Луны («Acta mathematica», t. VIII) [51].

Обратимся вновь к уравнениям (2) п. 184

$$A_n [q^2 - (h + 2n)^2] = \frac{q_1}{2} (A_{n-1} + A_{n+1}). \qquad (2)$$

постоянные

$$x_1^0,\ x_2^0 \text{ и } 0.$$

Ясно, таким образом, что x_1, y_1, и x_2 зависят от x_1', x_2', y_1', y'_2 и μ, допускают разложение по степеням μ и периодичны относительно y_2'. При $\mu = 0$ они будут

$$x_1 = x_1' + x_1^0,\ x_2 = x_2' + x_2^0,\ y_1 = y_1'.$$

Итак, функция F не изменит своего вида, если ее выразить через новые переменные. Под этим я подразумеваю, что F можно разлагать по степеням μ и что она периодична относительно y_2', однако относительно y_1' функция F не периодична.

Очевидно, что новые канонические уравнения

$$\frac{dx_i'}{dt} = \frac{dF}{dy_i'}, \qquad \frac{dy_i'}{dt} = -\frac{dF}{dx_i'}$$

допускают в качестве решения

$$x_1' = 0, \qquad x_2' = 0, \qquad y_1' = 0,$$

ибо старые уравнения допускали в качестве решения

$$x_1 = \theta_1, \qquad x_2 = \theta_2, \qquad y_1 = \theta_3.$$

Отсюда мы выводим заключение о том, что три производные

$$\frac{dF}{dy_1'},\ \frac{dF}{dy_2'},\ \frac{dF}{dy_3'}$$

одновременно обращаются в нуль, если

$$x_1' = x_2' = y_1' = 0.$$

С другой стороны, если $x_1' = x_2' = y_1' = 0$, то F вырождается в некую постоянную, которую я буду обозначать A. Эта постоянная допускает разложение по степеням μ.

Положим

$$F' = F - A;$$

функцию F' можно разлагать по степеням x_1', x_2' и y_1' при малых значениях этих переменных; ее разложение не будет содержать члена нулевого порядка и члена первого порядка, отличного от члена, содержащего x_2'. Коэффициенты этого разложения будут зависеть от μ и y_2'.

Очевидно, что величину A_p можно получить, положив x_p равным 1, а остальные неизвестные x равными 0.

Я утверждаю, что определенные таким образом величины A_n удовлетворяют уравнениям (2). Действительно, если положить x_p равным a_{np}, т. е. равным

$$0, \quad \frac{q_1}{2[q^2-(h+2n)^2]} \quad \text{или} \quad 1,$$

в зависимости от того, будет ли

$$|n-p|>1, \quad |n-p|=1 \text{ или } n=p,$$

то определитель будет равен

$$A_n - \frac{q_1}{2[q^2-(h+2n)^2]}(A_{n-1}+A_{n+1}).$$

Это выражение должно быть равно нулю, ибо две строки нашего определителя совпадают. Следовательно, уравнение (2bis) удовлетворяется.

При $n=0$ имеется исключение, ибо в этом случае определитель не содержит двух одинаковых строк. Однако он по-прежнему равен нулю, ибо в этом случае он равен $\square(h)$. Это выражение равно нулю в силу уравнения (3).

Наконец, ряд

$$\Sigma A_p e^{(2p+h)it}$$

сходится. Этот ряд получится, если в Δ положить

$$x_p = e^{(2p+h)it}.$$

Абсолютная величина x_p в этом случае ограничена, что, как мы видели выше, достаточно для сходимости Δ.

Применение теоремы Адамара

187. Нам осталось изучить уравнение

$$\square(h)=0. \tag{3}$$

Для этого введем прежде всего детерминант, который Хилл обозначал символом $\nabla(h)$. Возьмем определитель $\square(h)$ и умножим его нулевую строку на

$$q^2-h^2,$$

а строку с номером n ($n \neq 0$) на

$$\frac{q^2-(h+2n)^2}{4n^2}.$$

Я утверждаю, что полученный при этом определитель $\nabla(h)$ также будет сходиться. В самом деле, если обратиться к данному выше определению предела бесконечного (в обе стороны) определителя, то видно, что

$$\nabla(h) = \square(h)\,(q^2-h^2)\,\Pi,$$

где Π — предел, к которому стремится произведение $2m$ сомножителей

$$\frac{q^2-(h+2n)^2}{4n^2} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m),$$

когда m неограниченно возрастает. Следовательно, Π есть предел бесконечного произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{h^2-q^2}{2n^2}-\frac{h^2}{n^2}+\frac{(h^2-q^2)^2}{16\,n^4}\right],$$

которое, очевидно, сходится. Следовательно, сходится и $\nabla(h)$.

Обозначим через $b_{n,p}$ тот элемент определителя $\nabla(h)$, который принадлежит строке с номером n и столбцу с номером p. Тогда

$$b_{0,0} = q^2-h^2,\quad b_{n,n} = \frac{q^2-(h+2n)^2}{4n^2} \qquad (n\neq 0),$$

$$b_{0,1} = b_{0,-1} = -\frac{q_1}{2},\quad b_{n,n+1} = b_{n,n-1} = -\frac{q_1}{8n^2} \qquad (n\neq 0),$$

$$b_{n,p} = 0 \qquad (|n-p|>1).$$

Заменим в $\nabla(h)$ величину h на x и изучим свойства полученной таким образом функции $\nabla(x)$.

Прежде всего, я утверждаю, что эта функция целая.

Действительно, заменив h на x, мы, очевидно, получим

$$|b_{0,0}| < q^2+x^2,\quad |b_{n,n}| < \frac{q^2+(x+2n)^2}{4n^2}.$$

В силу неравенства (6) п. 185 отсюда следует, что

$$\nabla(x) < (q^2+x^2+|q_1|)\prod\left[\frac{q^2+|q_1|+(x+2n)^2}{4n^2}\right]. \tag{4}$$

Введя для краткости обозначение $q^2+|q_1| = \lambda$ и объединяя те множители в произведении, которые соответствуют равным по величине, но противоположным по знаку значениям n, мы сможем записать бесконечное

произведение в виде

$$\prod\left[1+\frac{x^2-\lambda^2}{2n^2}-\frac{x^2}{n^2}+\frac{(x^2-\lambda^2)^2}{16n^4}\right].$$

Ясно, что оно сходится и всегда конечно. Следовательно, определитель $\nabla(x)$ также сходится.

В процессе доказательства предполагалось, что переменные x вещественны. Однако если переменные x мнимые, то это не влечет за собой никаких существенных изменений. Чтобы усмотреть это, достаточно вместо

$$| q^2 | + | q_1 | + (x+2n)^2$$

записать

$$|q^2| + |q_1| + (x+2n)^2.$$

Итак, определитель $\nabla(x)$ конечен и при любом мнимом x. Следовательно, $\nabla(x)$ есть целая функция.

Если бы потребовалось подробно доказать, что определитель $\nabla(x)$ обладает и остальными свойствами целой функции, а именно, непрерывен и имеет производную, то для доказательства достаточно было бы заметить, что определитель, пределом которого является $\nabla(x)$, сходится *равномерно*.

В самом деле, обозначим через $\nabla_n(x)$ определитель, образованный из $2n+1$ строк и $2n+1$ столбцов определителя ∇ с номерами от $-n$ до $+n$. Имеем

$$\nabla(x) = \lim \nabla_n(x).$$

Пусть C — некоторый замкнутый контур в плоскости x, z — некоторая точка этого контура и x — какая-то точка внутри него. Поскольку $\nabla_n(x)$ — полином, то, очевидно,

$$2i\pi \nabla_n(x) = \int \frac{\nabla_n(z)\,dz}{z-x},$$

где интеграл, разумеется, берется по контуру C. Ясно, что функция

$$2i\pi \varphi(x) = \int \frac{\nabla(z)\,dz}{z-x}$$

является голоморфной функцией от x. Я утверждаю, что $\varphi(x)$ равна $\nabla(x)$.

Действительно, как следует из приведенного выше доказательства, сходимость $\nabla(x)$ равномерна. Поэтому n можно выбрать достаточно большим для того, чтобы в точке x и на всем контуре C

$$|\nabla(x) - \nabla_n(x)| < \varepsilon, \quad |\nabla(z) - \nabla_n(z)| < \varepsilon$$

и, следовательно,

$$2i\pi\,|\varphi(x) - \nabla_n(x)| < \varepsilon l,$$

где l — длина контура C, деленная на минимум $|z-x|$.

Итак, разности $|\varphi(x) - \nabla_n(x)|$ и $|\nabla(x) - \nabla_n(x)|$ можно сделать сколь угодно малыми. Это и означает, что $\nabla(x) = \varphi(x)$. Следовательно, функция $\nabla(x)$ голоморфна, что и требовалось доказать.

Я утверждаю, теперь, что $\nabla(x)$ — периодическая функция.

В самом деле, обозначим через $E_n(x)$ конечный определитель, составленный из $2n+1$ строк и $2n+1$ столбцов определителя $\nabla(x)$ с номерами от $-n+1$ до $n+1$, а через $E'_n(x)$ — определитель, составленный из соответствующих строк и столбцов $\square(x)$.

Доказательство сходимости бесконечного в обе стороны определителя дано в п. 185 для случая, когда все элементы, стоящие на главной диагонали, равны 1. При этом отнюдь не предполагается, что строк с отрицательными номерами столько же, столько и с положительными. Следовательно,

$$\lim E'_n(x) = \square(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Кроме того, ясно, что

$$E_n(x) = E'_n(x)(q^2 - x^2)\,\Pi',$$

где Π' означает произведение сомножителей

$$q^2 - \frac{(x+2m)^2}{4m^2} \tag{5}$$

(m принимает значения ± 1, ± 2, $\pm(n-1)$, n и $n+1$).

Из сравнения определителей сразу же видно, что

$$\nabla_n(x+2) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 E_n(x).$$

Устремим n к бесконечности. Тогда левая часть устремится к $\nabla(x+2)$, а правая к

$$\square(x)(q^2 - x^2)\lim \Pi'.$$

Ранее мы нашли

$$\nabla(x) = \square(x)(q^2 - x^2)\lim \Pi,$$

где Π означает произведение сомножителей (5), а m пробегает значения $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$.

Следовательно,

$$\frac{\Pi'}{\Pi} = \frac{q^2 - \dfrac{(x+2n+2)^2}{4(n+1)^2}}{q^2 - \dfrac{(x-2n)^2}{4n^2}},$$

откуда

$$\lim \frac{\Pi'}{\Pi} = 1.$$

Это в свою очередь влечет за собой равенство

$$\nabla(x+2) = \nabla(x),$$

что и требовалось доказать.
Кроме того,

$$\nabla_n(-x) = \nabla_n(x)$$

и, следовательно,

$$\nabla(x) = \nabla(-x).$$

Продолжая исследование целой функции $\nabla(x)$, я хочу доказать, что это функция рода нуль, *если рассматривать ее как функцию от x*. Известно, что целую функцию называют функцией *рода нуль*, если ее можно разложить в бесконечное произведение вида

$$A\left(1-\frac{x}{b_1}\right)\left(1-\frac{x}{b_2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{b_n}\right)\ldots.$$

Более общим образом целую функцию называют функцией рода p, если ее можно разложить в произведение бесконечного числа первичных множителей вида

$$A\left(1-\frac{x}{b}\right)e^{P},$$

где P — некоторый полином степени p относительно x.

Для доказательства этого существенного момента воспользуемся некоторыми установленными выше неравенствами.

Найдем верхний предел выражения

$$|\nabla(y+ix)|.$$

Поскольку функция ∇ периодическая с периодом 2, я всегда могу предположить, что y заключено между -1 и $+1$. Тогда

$$|q^2+q_1+(y+ix-2n)^2| < q^2+|q_1|+x^2+(y-2n)^2$$

и, следовательно, если ввести, как это делалось выше, обозначение

$$\lambda = q^2+|q_1|$$

и воспользоваться нашим основным неравенством, получим

$$|\nabla(y+ix)| < (\lambda+y^2+x^2)\prod\left[\frac{\lambda+x^2+(y-2n)^2}{4n^2}\right]. \qquad (\alpha)$$

Правая часть этого неравенства является функцией от x^2, которую я обозначу через $F(x^2)$.

Положим временно $x^2 = t^3$ и рассмотрим функцию $F(t^3)$. Нетрудно видеть, что $F(t^3)$ — функция рода 1.

В самом деле, функция $F(x)$ есть функция рода 0 и ее можно представить в виде

$$F(x) = A\prod\left(1 - \frac{x}{b_n^3}\right).$$

Символом b_n^3 я обозначил корни уравнения $F(x) = 0$. Тогда

$$F(t^3) = A\prod\left(1 - \frac{t}{b_n}\right)\left(1 - \frac{\alpha t}{b_n}\right)\left(1 - \frac{\alpha^2 t}{b_n}\right)$$

или

$$F(t^3) = A\prod\left(1 - \frac{t}{b_n}\right)e^{\frac{t}{b_n}}\prod\left(1 - \frac{\alpha t}{b_n}\right)e^{\frac{\alpha t}{b_n}}\prod\left(1 - \frac{\alpha^2 t}{b_n}\right)e^{\frac{\alpha^2 t}{b_n}}.$$

Нетрудно проверить, что три произведения, фигурирующие в правой части, сходятся абсолютно.

В «Bulletin de la Société Mathématique de France» [52] я доказал, что если $\varphi(x)$ — функция рода 1, то

$$\lim \varphi(x)\, e^{-\alpha x^2} = 0,$$

если x стремится к бесконечности вдоль некоторого луча причем так, что $e^{-\alpha x^2}$ стремится вдоль этого луча к нулю.

Следовательно, если α и t вещественны и положительны, то

$$\lim F(t^3)\, e^{-\alpha t^3} = 0.$$

Если y изменять от -1 до $+1$, то левая часть будет стремиться к своему пределу равномерно, откуда следует, что можно найти два положительных числа α и K, таких, что

$$|\nabla(y + ix)| < Ke^{\alpha\left|x^{\frac{4}{3}}\right|}.$$

Вводя обозначение $y + ix = z$ и замечая, что

$$|x| < |z|,$$

получаем

$$|\nabla(z)| < Ke^{\alpha\left|z^{\frac{4}{3}}\right|}.$$

Рассмотрим теперь разложение $\nabla(z)$:

$$\nabla(z) = \Sigma C_n z^n.$$

Имеем

$$2\pi i\, C_n = \int \frac{\nabla(z)\, dz}{z^{n+1}},$$

интеграл берется по окружности некоторого радиуса с центром в начале координат.

Отсюда заключаем, что

$$|C_n| < \frac{Ke^{\alpha \left| z^{\frac{4}{3}} \right|}}{|z^n|},$$

причем это неравенство выполняется при любом $|z|$. Но минимум

$$e^{\alpha z^{\frac{4}{3}}} z^{-n}$$

равен

$$e^{\frac{3n}{4}} \left(\frac{3n}{4\alpha}\right)^{-\frac{3n}{4}},$$

откуда

$$|C_n| < \frac{Ke^{\frac{3n}{4}}}{\left(\frac{3n}{4\alpha}\right)^{\frac{3n}{4}}}.$$

Заметим, что функция $\nabla(z)$ четная, следовательно, коэффициенты C_{2n+1} равны нулю.

Я намереваюсь доказать, что функция ∇, если рассматривать ее как функцию от z^2, является функцией рода нуль. В силу теоремы Адамара (см. «Comptes rendus», t. CXV, p. 1121) [53] для этого достаточно показать, что

$$|C_{2n}| < K'\Gamma(n+1)^{-\mu},$$

где μ больше 1.

Тогда

$$|C_{2n}|\,\Gamma(n+1)^{+\mu} < Ke^{\frac{3n}{2}} \left(\frac{3n}{2\alpha}\right)^{-\frac{3n}{2}} \Gamma(n+1)^{+\mu}.$$

Если $\Gamma(n+1)$ заменить приближенным значением, то правая часть неравенства будет иметь вид

$$Ke^{\frac{3n}{2} - n\mu} \left(\frac{3}{2\alpha}\right)^{\frac{3n}{2}} n^{n\mu - \frac{3n}{2}} (2\pi n)^{\frac{\mu}{2}}.$$

Требуется доказать, что при $\mu > 1$ это выражение остается ограниченным. Но если

$$\mu < \frac{3}{2},$$

то это выражение при n, стремящемся к бесконечности, стремится к нулю.

Следовательно, достаточно выбирать μ удовлетворяющим неравенству

$$1 < \mu < \frac{3}{2}.$$

Отсюда следует, что функцию $\nabla(z)$ можно разложить в произведение вида

$$\nabla(z) = A \prod \left(1 - \frac{z^2}{b_n}\right). \tag{5}$$

Итак, необходимо еще знать нули функции $\nabla(x)$. В силу определения $\nabla(x)$ эти нули имеют вид

$$x = \pm (h + 2n),$$

где n — целое число. Действительно, при этих и только этих значениях можно удовлетворить уравнениям (2) и (2bis) п. 186 и, следовательно, уравнению (3) п. 186.

Таким образом, нули $\nabla(x)$ те же, что и нули функции

$$\cos \pi x - \cos \pi h.$$

Поскольку обе эти функции допускают разложение в бесконечные произведения вида (5′), причем сомножители, входящие в эти произведения, совпадают с точностью до постоянной A, эти две функции могут отличаться лишь постоянным множителем

$$\nabla(x) = A (\cos \pi x - \cos \pi h). \tag{6}$$

Но $\nabla(x)$ зависит не только от x, $\nabla(x)$ является целой функцией от q^2 и q_1. Точно так же доказывается, что $\nabla(x)$ есть функция рода 0 как относительно q^2, так и относительно q_1.

Пусть, например,

$$\nabla'(x) = \Sigma D_n q_1^n,$$
$$A = \Sigma D'_n q_1^n,$$
$$A \cos \pi h = \Sigma D''_n q_1^n.$$

Тогда

$$D_n = D'_n \cos \pi x - D''_n.$$

Так же, как и ранее, можно доказать, что при μ, заключенном между 1 и $^3/_2$, выполняется неравенство

$$|D_n| < K' \Gamma(n)^{-\mu}.$$

Поскольку это неравенство должно выполняться при любом x, D'_n должно удовлетворять неравенству того же вида, так что A будет функцией рода 0 относительно q_1. Аналогичным образом можно было бы проверить, что A есть функция рода 0 относительно q^2.

Но A не может обращаться в нуль, ибо $\nabla(x)$ не обращается в нуль тождественно по x. Функция рода 0, не имеющая нулей, равна некоторой постоянной.

Следовательно, A не зависит ни от q^2, ни от q_1.

Чтобы сделать более наглядной зависимость от q_1, запишем равенство (6) в виде

$$\nabla(x, q_1) = A(\cos \pi x - \cos \pi h).$$

При $q_1 = 0$

$$h = q.$$

Следовательно,

$$\nabla(x, 0) = A(\cos \pi x - \cos \pi q).$$

Поделив первое равенство на второе и положив $x = 0$, получим

$$\frac{1 - \cos \pi h}{1 - \cos \pi q} = \frac{\nabla(0, q_1)}{\nabla(0, 0)} = \frac{\square(0, q_1)}{\square(0, 0)},$$

откуда следует, наконец, что

$$1 - \cos \pi h = \square(0, q_1)(1 - \cos \pi q), \tag{7}$$

так как

$$\square(0, 0) = 1.$$

Значение h Хилл находил именно из равенства (7).

В силу приведенных выше соображений законность его метода впредь следует считать строго установленной.

Различные замечания

188. Некоторые результаты в рассматриваемом нами частном случае можно было бы получить, не обращаясь к теореме Адамара.

Действительно, прежде всего заметим, что основное неравенство (α) выполняется даже в том случае, если $q^2 + q_1$ мнимые, если только

$$\lambda = |q^2| + |q_1|.$$

Если воспользоваться известным разложением

$$\sin \pi x = \pi x \prod \left(1 - \frac{x}{n}\right),$$

то

$$\cos \pi x - \cos \pi y = \frac{\pi^2}{2}(y^2 - x^2) \prod \left[\frac{(y - 2n)^2 - x^2}{4n^2}\right],$$

откуда

$$F(x^2) = \frac{2}{\pi^2}[\cos \pi \sqrt{-x^2 - \lambda} - \cos \pi y].$$

Неравенство (α) выполняется при любых q^2 и q_1, если x и y вещественны.

Мы знаем, что отношение

$$\frac{\cos ix}{e^{|x|}}$$

стремится к $^1/_2$, если x, оставаясь вещественным, неограниченно возрастает. Из этого следует, что можно найти такое постоянное число B, что

$$F(x^2) < Be^{\pi\sqrt{x^2+\lambda}}.$$

Из этого неравенства вытекает

$$|\nabla(y+ix)| < Be^{\pi\sqrt{x^2+\lambda}},$$

откуда

$$|\nabla(z)| < Be^{\pi\sqrt{|z^2|+\lambda}} < Be^{\pi\sqrt{\lambda}}e^{\pi|z|}.$$

Рассмотрим теперь отношение

$$\frac{\nabla(z)}{\cos\pi z - \cos\pi h}.$$

Числитель обращается в нуль всякий раз, когда в нуль обращается знаменатель. Отсюда следует, что это отношение является целой функцией как относительно z, так и относительно q^2 и q_1.

Поскольку это отношение есть периодическая функция от z, всегда можно предположить, что вещественная часть z заключена между -1 и $+1$. Устремим мнимую часть к бесконечности и посмотрим, как ведет себя наше отношение

$$\frac{\nabla(z)}{\cos\pi z - \cos\pi h} = \frac{\nabla(z)}{e^{\pi|z|}} : \frac{\cos\pi z - \cos\pi h}{e^{\pi|z|}}.$$

Первый сомножитель в правой части ограничен сверху абсолютным значением $Be^{\pi\sqrt{\lambda}}$, второй сомножитель стремится к $^1/_2$. Следовательно, отношение остается конечным. Итак, мы имеем целую функцию от z, ограниченную некоторой константой. В силу известной теоремы эта функция должна быть постоянной, не зависящей от z.

Чтобы доказать, что эта функция, кроме того, не зависит от q^2 и q_1, необходимо обратиться к теореме Адамара.

Обобщение предыдущих результатов

189. Все рассмотренные методы, за исключением метода Гильдена, применимы ко всякому уравнению вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x\varphi(t) = 0, \qquad (1)$$

где $\varphi(t)$ — периодическая функция от t и, следовательно, допускающая разложение в тригонометрический ряд.

Чтобы применить эти методы к уравнению (1), потребовалось бы изменить лишь кое-какие детали, что не составило бы никакого труда для читателя. Большая часть результатов осталась бы по-прежнему верной. Некоторые из них будут верными, если функция φ четная.

Гильден, желая распространить свой метод на уравнение (1), предложил остроумный метод проб, на котором я не буду останавливаться, ибо пользоваться им пришлось бы лишь в редких случаях.

Предположим теперь, что функция $\varphi(t)$ не периодическая, а имеет вид

$$\varphi(t) = 1 + \mu\psi(t),$$

где μ — малый численный коэффициент, а $\psi(t)$ — сумма n членов вида

$$A_i \sin(\alpha_i t + \beta_i),$$

т. е.

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin(\alpha_i t + \beta_i).$$

Величины A_i, α_i и β_i постоянные, но величины α_i *несоизмеримы между собой*, ибо в противном случае функция φ была бы периодической.

В этом случае изложенные методы также будут применимы, но возникающие при этом ряды, которые можно расположить по степеням μ, *не будут более сходиться*. Поэтому методы имеют лишь тот смысл, который в силу главы VIII имеет всякий метод формального анализа.

Итак, положив

$$x = \sum B_m \cos(h + \gamma_m)\, t + \sum C_m \sin(h + \gamma_m)\, t, \qquad (2)$$

мы можем формально удовлетворить уравнению (1), Величины h, B_m и C_m означают ряды, расположенные по степеням μ, коэффициенты которых постоянны. Величины γ_m представляют собой линейные комбинации величин α_i с целыми коэффициентами, так что

$$\gamma_m = N_1\alpha_1 + N_2\alpha_2 + \ldots + N_n\alpha_n,$$

а суммирование в (2) следует произвести по всем наборам целых чисел $N_1, N_2, \ldots, N_n$.

Расходимость ряда (2) может вызвать некоторое удивление. В самом деле, предположим, что α_i имеет вид

$$\alpha_i = m_i\lambda + m_i',$$

где m_i и m_i' — целые числа, а постоянная λ — одна и та же для всех α_i.

Будем изменять λ, оставляя без изменений μ, A_i, B_i, β_i, m_i и m_i'.

При рациональных λ величины α_i будут соизмеримыми, и функция φ будет периодической. Из п. 29 известно, что уравнение (1) имеет решение вида (2). Более того, это решение не является чисто формальным и ряды сходятся.

Поскольку во всяком интервале имеется бесконечно много рациональных чисел, вызывает удивление то обстоятельство, что среди рядов, получающихся, когда λ пробегает сколь угодно малый интервал, имеется бесконечно много сходящихся и бесконечно много расходящихся.

Этот парадоксальный факт становится более понятным, если рассмотреть следующий простой пример.

Пусть имеется уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = x\varphi \tag{3}$$

Я буду предполагать, что φ представляет собой ряд вида

$$\varphi = \sum A_{m,n}\mu^{|m|+|n|}\cos(m\lambda - n)\,t.$$

Здесь m и n принимают все возможные целые значения, λ — некоторая постоянная, $A_{m,n}$ — постоянные коэффициенты, а μ — малый параметр, по степеням которого производится разложение.

Интегрируя, получаем

$$\ln x = A_{0,0}t + \sum \frac{A_{m,n}\mu^{|m|+|n|}}{m\lambda - n}\sin(m\lambda - n)\,t. \tag{4}$$

Если λ — рациональное число, то это решение следует несколько видоизменить. В самом деле, пусть $\lambda = p/q$, где p и q — взаимно простые числа. Тогда $m\lambda - n$ будет равно нулю, если

$$m = hq, \quad n = hp,$$

где h — целое число.

В результате

$$\ln x = Bt + \sum \frac{A_{m,n}\mu^{|m|+|n|}}{m\lambda - n}\sin(m\lambda - n)\,t, \tag{5}$$

где суммирование не распространяется на те m и n, при которых разность $m\lambda - n$ обращается в нуль, и где

$$B = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} A_{hq,\,hp}\mu^{|hq|+|hp|}.$$

Если в формулах (4) и (5) от логарифмов перейти к числам, то получим и в том и в другом случае

$$x = e^{Ct}\psi(t),$$

где $\psi(t)$ — ряд, расположенный по степеням μ, коэффициенты которого состоят из конечного числа членов с

$$\sin(m\lambda - n)t$$

или

$$\cos(m\lambda - n)t.$$

Между указанными двумя случаями имеется двоякое различие.

1. Если число λ рациональное, то ряд $\psi(t)$ сходится. Наоборот, если λ иррационально, то ряд $\psi(t)$ может расходиться и решение может стать чисто формальным.

2. Значение показателя C не одинаково в рассматриваемых двух случаях. Если λ иррационально, то C равно $A_{0,0}$. Если же λ рационально, то C равно B. Следовательно, *C не является непрерывной функцией от λ.*

Аналогично обстоит дело и с h в случае уравнения (1). Это объясняет, почему в вопросах такого рода нельзя проводить рассуждения по непрерывности.

Глава XVIII

СЛУЧАЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Уравнения с правой частью

190. В п. 177 мы видели, что уравнение (6b) п. 169 можно было с помощью надлежащей замены переменных привести к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x(q^2 - q_1 \cos 2t) = \varphi(t). \tag{1}$$

Функция $\varphi(t)$ в этом выражении известна. Она представляет собой сумму членов вида

$$\beta \cos \lambda t \quad \text{или} \quad \beta \sin \lambda t.$$

В предыдущей главе мы сумели проинтегрировать соответствующее однородное уравнение, т. е. уравнение (1), в котором $\varphi(t) = 0$. Кроме того, известно, что интегрирование линейного уравнения с правой частью всегда можно свести к интегрированию однородного уравнения.

Итак, интересующий нас вопрос решен. В п. 184 мы рассматривали уравнение (1), у которого правая часть

$$\varphi(t) = \beta \cos \lambda t.$$

Мы видели, что такому уравнению можно удовлетворить, полагая

$$x = \sum B_n \cos(\lambda + 2n)\, t, \tag{2}$$

где коэффициенты B_n определены соотношениями (4) и (4bis) п. 184.

Аналогично, если

$$\varphi(t) = \beta \sin \lambda t,$$

то уравнению (1) можно удовлетворить, полагая

$$x = \sum B_n \sin(\lambda + 2n)\, t, \tag{2bis}$$

где B_n определены теми же соотношениями (4) и (4bis) п. 184.

Отсюда ясно, что если $\varphi(t)$ представляет собой сумму членов вида $\beta \cos \lambda t$ и $\beta \sin \lambda t$, то существует частное решение уравнения (1), которое

можно записать в виде суммы членов

$$B_n \cos(\lambda + 2n)\, t \quad \text{или} \quad B_n \sin(\lambda + 2n)\, t.$$

Общее решение получим, если к найденному частному решению прибавим общее решение однородного уравнения.

Особый случай возникает, если один из коэффициентов B_n, определяемых соотношениями (4) и (4bis) п. 184, обращается в бесконечность. Нетрудно видеть, что так происходит, если λ равно $h + 2n$, где n — некоторое целое число.

В этом случае уравнение (1) всегда можно проинтегрировать, но время t не будет входить в решение под знаком синуса или косинуса, вследствие чего решение не будет иметь чисто тригонометрический вид.

Например, если предположить, что

$$\varphi(t) = \beta \cos ht,$$

то общее решение будет иметь вид

$$x = t \sum A_n \sin(h + 2n)\, t + \sum (B_n + C_1 A_n) \cos(h + 2n)\, t + \\ + C_2 \sum A_n \sin(h + 2n)\, t.$$

Итак, решение будет иметь тригонометрический вид в том и только в том случае, если ни одно из чисел λ, входящих в $\varphi(t)$, не равно $h + 2n$.

Если λ не равно $h + 2n$ точно, но мало отличается от $h + 2n$, то коэффициенты B_n не обращаются в бесконечность, но становятся очень большими.

Это обстоятельство не приводило бы ни к каким трудностям, если бы уравнение (1), т. е. уравнение (6b) п. 169, было точным. Но это не так. В главе XVI мы видели, что это уравнение приближенное. Чтобы точность, даваемая таким приближением, была достаточно высокой, величина ρ, которую в этой главе мы обозначили через x, должна оставаться очень малой.

Если же один из коэффициентов B_n становится большим, то x перестает быть малым. Члены, которыми пренебрегают, становятся достаточно большими, и приближенный метод теряет силу.

Поэтому надлежит следить за тем, чтобы в процессе последовательных приближений в правой части уравнения (1) не появлялись члены, аргумент $\lambda\, t$ которых мало отличается от $(h + 2n)t$.

Обобщим сказанное. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + xf(t) = \varphi(t), \tag{5}$$

где $f(t)$ и $\varphi(t)$ разлагаются в тригонометрические ряды.

Пусть $\beta \cos \lambda t$ или $\beta \sin \lambda t$ — члены разложения $\varphi(t)$, $\alpha \cos \mu t$ или $\alpha \sin \mu t$ — члены разложения $f(t)$.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + xf(t) = 0.$$

Пусть x_1 и x_2 — два независимых решения этого уравнения, x_1' и x_2' — их производные по t. Тогда

$$x_1x_2' - x_2x_1' = C,$$

где C — некоторая постоянная, которую всегда можно считать равной 1.

Общее решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$x = -x_1\int x_2\varphi(t)\,dt + x_2\int x_1\varphi(t)\,dt. \qquad (6)$$

Из п. 188 следует, что x_1 и x_2 представляют собой сумму членов вида

$$A\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(h+\gamma)t,$$

где постоянная h одна и та же для всех членов, а γ — линейная комбинация величин μ с целыми коэффициентами.

Каково же теперь условие, при котором выражение (6) будет иметь тригонометрический вид? Для этого достаточно, чтобы $x_1\varphi(t)$ и $x_2\varphi(t)$ разлагались в тригонометрические ряды без свободного члена или же чтобы при разложении x_1 или x_2 в тригонометрические ряды не встречались члены с теми же аргументами, что и члены разложения $\varphi(t)$; или же, наконец (если λt — один из аргументов членов разложения $\varphi(t)$), чтобы $\lambda - h$ не было линейной комбинацией μ с целыми коэффициентами.

В частности, если функция $f(t)$ периодическая, так что

$$\mu = n\alpha,$$

где n — целое число, то отношение $(\lambda - h)/\alpha$ не должно принимать целые значения.

Если $f(t)$ — периодическая функция двух аргументов αt и βt, так что

$$\mu = m\alpha + n\beta,$$

где m и n — целые числа, то не должно существовать соотношения вида

$$\lambda - h = m\alpha + n\beta.$$

Эти условия достаточны, но не необходимы. В самом деле, если какой-то член x_1 и какой-то член $\varphi(t)$ имеют одинаковые аргументы, то их произведение приведет к появлению в разложении $x_1\varphi(t)$ свободного члена. Таким образом, мы получим столько свободных членов в произведении

$x_1\varphi(t)$, сколько в двух его сомножителях имеется пар членов с одинаковым аргументом. *Может, однако, представиться случай, когда эти члены взаимно уничтожатся.*

Следовательно, необходимое и достаточное условие состоит в том, чтобы свободные члены произведений $x_1\varphi(t)$ и $x_2\varphi(t)$ были равны нулю.

Уравнение эвекции

191. Применим изложенные выше соображения к интегрированию уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x(q^2 - q_1\cos 2t) = \alpha\varphi(x, t) \tag{1}$$

методом последовательных приближений. Коэффициент α очень мал, $\varphi(x, t)$ — известная функция от x и t, все члены которой имеют вид

$$Ax^p\cos\lambda t + \mu,$$

где p — целое число, A, λ и μ — некоторые постоянные.

Уравнение (1) можно записать так:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x[q^2 + \beta + (-q_1 + \gamma)\cos 2t] = \beta x + \gamma x\cos 2t + \alpha\varphi. \tag{2}$$

Постоянные β и γ очень малы. Их значение, изменяющееся в зависимости от рассматриваемого приближения, будет найдено ниже.

В качестве первого приближения я возьму

$$\beta = \gamma = 0, \quad \varphi = \varphi(0, t)$$

и получу при этом уравнение того же вида, что и уравнение (1) предыдущего пункта, с помощью которого найду первое приближенное значение x. Я буду обозначать его через ξ_1, соответствующее значение h я буду обозначать через h_1.

Функция ξ_1 сохраняет тригонометрический вид и не содержит векового члена, поскольку, вообще говоря, разности $(\lambda - h_1)/2$ не будут целыми числами.

В качестве второго приближения следует взять

$$\varphi = \varphi(\xi_1, t).$$

Если бы β и γ были по-прежнему равны нулю, то разложения $x_1\varphi$ и $x_2\varphi$ содержали бы свободные члены, и время, как мы видели выше, входило не только под знаком тригонометрических функций.

Следовательно, β и γ должны иметь какие-то другие значения β_2 и γ_2, которые мы выберем так, чтобы общее решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x[q^2 + (-q_1 + \gamma)\cos 2t] = \beta_2\xi_1 + \gamma_2\xi_1\cos 2t + \alpha\varphi(\xi_1, t) = \psi_1$$

не содержало вековых членов. Необходимые и достаточные условия этого нам известны. Пусть $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$ — два независимых решения уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x(q^2 - q_1 \cos 2t) = 0.$$

Необходимо, чтобы разложения $x_1^{(1)}\psi_1$ и $x_2^{(1)}\psi_2$ не содержали свободных членов. Ясно, что β_2 и γ_2 всегда можно подобрать так, чтобы это условие выполнялось.

Рассмотрим далее уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x[q^2 + \beta_2 + (-q_1 + \gamma_2)\cos 2t] = 0.$$

Пусть $x_1^{(2)}$ и $x_2^{(2)}$ — два решения этого уравнения, h_2 — соответствующее значение числа h. Решения $x_1^{(2)}$ и $x_2^{(2)}$ будут разлагаться по косинусам и синусам аргумента $(h_2 + 2n)t$, где n — целое число.

Заметим теперь, что ξ_1 содержит члены двух родов. Члены первого рода зависят от синуса и косинуса аргумента

$$(h_1 + 2n)t;$$

члены второго рода зависят от синуса и косинуса аргумента

$$(\lambda + 2n)t$$

(λt — один из аргументов, от которых зависит φ).

Пусть ξ_1' означает функцию, в которую переходит ξ_1, если h_1 заменить на h_2 в членах первого рода; ψ_1' означает функцию, в которую переходит ψ_1, если ξ_1 заменить на ξ_1'.

Может показаться, что естественно рассматривать уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x[q^2 + \beta_2 + (-q_1 + \gamma_2)\cos 2t] = \psi_1,$$

которое получается, если в уравнении (2) положить $\beta = \beta_2$, $\gamma = \gamma_2$, а в правой его части, кроме того, положить

$$x = \xi_1.$$

Вместо этого мы рассмотрим следующее уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x[q^2 + \beta_2 + (-q_1 + \gamma_2)\cos 2t] = \psi_1'. \qquad (3)$$

Действительно, h_2 очень мало отличается от h_1, так что разность $\psi_1 - \psi_1'$ по порядку малости совпадает с отбрасываемыми членами. Рассмотрим какое-нибудь решение уравнения (3). Поскольку $x_1^{(2)}$ и $x_2^{(2)}$ мало отличаются

от $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$, а ψ_1' мало отличается от ψ_1, свободные члены произведений

$$x_1^{(2)}\psi_1' \quad \text{и} \quad x_2^{(2)}\psi_1'$$

мало отличаются от свободных членов произведений

$$x_1^{(1)}\psi_1 \quad \text{и} \quad x_2^{(1)}\psi_1,$$

которые равны нулю, следовательно, свободные члены первых двух произведений очень малы. Поэтому в рассматриваемом решении уравнения (3) вековые члены малы и ими можно пренебречь. В силу сказанного я обозначу через ξ_2 не само решение уравнения (3), а это решение с вычеркнутыми вековыми членами. Тогда

$$\psi_2 = \beta_3\xi_2 + \gamma_3\xi_2 \cos 2t + \alpha\varphi\,(\xi_2,\ t).$$

Величины β_3 и γ_3 зададим так, чтобы свободные члены произведений

$$x_1^{(2)}\psi_2 \quad \text{и} \quad x_2^{(2)}\psi_2$$

были равны нулю.

После этого запишем уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x\,[q^2 + \beta_3 + (-q_1 + \gamma_3)\cos 2t] = 0.$$

Пусть $x_1^{(3)}$ и $x_2^{(3)}$ — два решения этого уравнения, а h_3 — соответствующее значение h.

Пусть ξ_2' означает ξ_2, в котором h_2 заменено на h_3, иначе говоря, ξ_2' получается из ξ_2 так же, как ξ_1' из ξ_1. Пусть ψ_2' означает функцию, в которую перейдет ψ_2, если ξ_2 заменить на ξ_2'.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x\,[q^2 + \beta_3 + (-q_1 + \gamma_3)\cos 2t] = \psi_2'. \tag{4}$$

Пусть ξ_3 означает решение этого уравнения с вычеркнутыми вековыми членами (иными словами, ξ_3 получается из решения уравнения (4) так же, как ξ_2 — из решения уравнения (3)).

Действительно, нетрудно видеть, что вековые члены имеют тот же порядок малости, что и члены, отбрасываемые в третьем приближении.

Определив таким образом ξ_3, дальнейшие приближения строят по тем же правилам.

Необходимо сделать еще несколько замечаний.

Чтобы написать уравнение (3), мы произвели в ξ_1 и ψ_1 замену h_1 на h_2, т. е. ξ_1 и ψ_1 заменили на ξ_1' и ψ_1'. Аналогичным образом мы будем поступать и в последующих приближениях.

Если не производить указанных замен, это привело бы к излишне большому числу аргументов и, следовательно, к значительным трудностям.

На первый взгляд кажется, что мы могли бы полностью избавиться от вековых членов и не производя этой замены. Действительно, функция ψ_1 содержала бы члены с аргументом $(h_1 + 2n)t$, функции $x_1^{(2)}$ и $x_2^{(2)}$ — члены с аргументом $(h_2 + 2n)\,t$, так что произведения $x_1^{(2)}\psi_1$, $x_2^{(2)}\psi_2$ вообще не содержали бы свободных членов, а только члены

$$\cos(h_1 - h_2)\,t,\ \sin(h_1 - h_2)\,t.$$

Такое мнение ошибочно, ибо когда разность $h_1 - h_2$ становится очень малой, период таких членов становится очень большим. При интегрировании появляются малые делители, и сходимость приближений становится сомнительной.

Кроме того, может показаться, что успех метода связан со следующим обстоятельством. В каждом приближении должны выполняться два условия, поскольку мы должны обратить в нуль свободные члены

$$x_1^{(i+1)}\psi_i',\quad x_2^{(i+1)}\psi_i'$$

и в нашем распоряжении имеется ровно две произвольные постоянные β_{i+1} и γ_{i+1}.

Можно было бы подумать, что Гильден именно для того и ввел в левую часть уравнения член

$$q_1 x\cos 2t,$$

несмотря на малость коэффициента q_1, что ему просто хотелось получить в левой части два члена и иметь два произвольных коэффициента.

Такое мнение ошибочно.

В самом деле, принципы, изложенные в главе IX, показывают, что если бы q_1 и γ были равны нулю, то последовательные приближения можно было вычислять так, чтобы не появлялись никакие вековые члены. Правда, мы должны были удовлетворить двум условиям. Но если бы единственный произвольный коэффициент мы выбрали так, чтобы удовлетворить первому условию, второе условие, как мы видели в п. 127, выполнялось бы автоматически.

Сказанное станет понятней, если изложенному здесь методу последовательных приближений придать следующий вид.

192. Пусть ξ_i — значение x, полученное в i-м приближении с помощью метода п. 191, ξ_i представляет собой сумму членов, зависящих от синуса или косинуса углов

$$\varphi = (m_1 h_i + 2m_2 + m_3\lambda_3 + m_4\lambda_4 + \ldots + m_n\lambda_n)t,$$

где m_1, m_2, ..., m_n — целые числа; h_i — i-е приближенное значение h; $\lambda_3 t$, $\lambda_4 t$, ..., $\lambda_n t$ — аргументы различных членов $\varphi\,(x,\ t)$.

Если не производить указанных замен, это привело бы к излишне большому числу аргументов и, следовательно, к значительным трудностям.

На первый взгляд кажется, что мы могли бы полностью избавиться от вековых членов и не производя этой замены. Действительно, функция ψ_1 содержала бы члены с аргументом $(h_1 + 2n)t$, функции $x_1^{(2)}$ и $x_2^{(2)}$ — члены с аргументом $(h_2 + 2n)\,t$, так что произведения $x_1^{(2)}\psi_1$, $x_2^{(2)}\psi_2$ вообще не содержали бы свободных членов, а только члены

$$\cos(h_1 - h_2)\,t, \quad \sin(h_1 - h_2)\,t.$$

Такое мнение ошибочно, ибо когда разность $h_1 - h_2$ становится очень малой, период таких членов становится очень большим. При интегрировании появляются малые делители, и сходимость приближений становится сомнительной.

Кроме того, может показаться, что успех метода связан со следующим обстоятельством. В каждом приближении должны выполняться два условия, поскольку мы должны обратить в нуль свободные члены

$$x_1^{(i+1)}\psi_i', \qquad x_2^{(i+1)}\psi_i'$$

и в нашем распоряжении имеется ровно две произвольные постоянные β_{i+1} и γ_{i+1}.

Можно было бы подумать, что Гильден именно для того и ввел в левую часть уравнения член

$$q_1 x \cos 2t,$$

несмотря на малость коэффициента q_1, что ему просто хотелось получить в левой части два члена и иметь два произвольных коэффициента.

Такое мнение ошибочно.

В самом деле, принципы, изложенные в главе IX, показывают, что если бы q_1 и γ были равны нулю, то последовательные приближения можно было вычислять так, чтобы не появлялись никакие вековые члены. Правда, мы должны были удовлетворить двум условиям. Но если бы единственный произвольный коэффициент мы выбрали так, чтобы удовлетворить первому условию, второе условие, как мы видели в п. 127, выполнялось бы автоматически.

Сказанное станет понятней, если изложенному здесь методу последовательных приближений придать следующий вид.

192. Пусть ξ_i — значение x, полученное в i-м приближении с помощью метода п. 191, ξ_i представляет собой сумму членов, зависящих от синуса или косинуса углов

$$\varphi = (m_1 h_i + 2m_2 + m_3\lambda_3 + m_4\lambda_4 + \ldots + m_n\lambda_n)t,$$

где m_1, m_2, ..., m_n — целые числа; h_i — i-е приближенное значение h; $\lambda_3 t$, $\lambda_4 t$, ..., $\lambda_n t$ — аргументы различных членов $\varphi\,(x,\ t)$.

Точно так же уравнение E_1 запишется в виде

$$2h_0h_1\frac{d^2x_0}{dw^2}+2h_1\frac{d^2x_0}{dw\,dt}+h_0^2\frac{d^2x_1}{dw^2}+2h_0\frac{d^2x_1}{dw\,dt}+\frac{d^2x_1}{dt^2}+x_1(q^2-q_1\cos 2t)=\Phi$$

(напомним, что h_0 и x_0 были найдены ранее с помощью уравнения E_0).

Вообще уравнение E_i запишется в виде

$$2h_0h_i\frac{d^2x_0}{dw^2}+2h_i\frac{d^2x_0}{dw\,dt}+h_0^2\frac{d^2x_i}{dw^2}+2h_0\frac{d^2x_i}{dw\,dt}+\frac{d^2x_i}{dt^2}+x_i(q^2-q_1\cos 2t)=\Phi.$$

Уравнение E_0 легко интегрируется. В самом деле, его можно свести к уравнению (1) п. 190, подробно рассмотренному в предыдущей главе.

Одно решение можно взять в виде

$$x_0=\Sigma A_n\cos(w+2nt),$$

коэффициенты A_n те же, что и в п. 178, h_0 — величина, которую в главе XVII мы обозначали через h.

Другое решение получим, положив

$$x_0=\sum A_n\sin(w+2nt).$$

Следовательно, если положить

$$\xi=\sum A_n\cos(w+2nt),\quad \eta=\sum A_n\sin(w+2nt)$$

и если β и γ — произвольные постоянные, то общее решение получим в виде

$$x_0=\beta\xi+\gamma\eta.$$

Только это решение и будет периодическим по w и t.

Перейдем к уравнению E_1. Если h_1 известно, то

$$h_0^2\frac{d^2x_1}{dw^2}+2h_0\frac{d^2x_1}{dw\,dt}+\frac{d^2x_1}{dt^2}+x_1(q^2-q_1\cos 2t)=\Phi. \tag{8}$$

Как интегрировать уравнение (8)? Положим

$$\xi'=h_0\frac{d\xi}{dw}+\frac{d\xi}{dt}=-\sum A_n(h_0+2n)\sin(w+2nt),$$

$$\eta'=h_0\frac{d\eta}{dw}+\frac{d\eta}{dt}=+\sum A_n(h_0+2n)\cos(w+2nt).$$

Определитель $\xi\eta'-\xi'\eta$ будет равен некоторой постоянной, которую всегда можно считать равной 1, поскольку определены лишь отношения коэффициентов A_n, а коэффициент A_0 можно выбирать произвольно.

Применим теперь метод вариации постоянных, Если через β и γ обозначить не две постоянные, а две функции от w и t, то эти функции можно

найти из уравнений

$$x_1 = \beta\xi + \gamma\eta,$$
$$h_0 \frac{dx_1}{dw} + \frac{dx_1}{dt} = \beta\xi' + \gamma\eta'.$$

Если для краткости обозначить

$$\beta' = h_0 \frac{d\beta}{dw} + \frac{d\beta}{dt},$$
$$\gamma' = h_0 \frac{d\gamma}{dw} + \frac{d\gamma}{dt},$$

то уравнение $(\mathcal{E})$ можно заменить двумя следующими:

$$\beta'\xi + \gamma'\eta = 0,$$
$$\beta'\xi' + \gamma'\eta' = \Phi,$$

откуда

$$\begin{aligned} \beta' &= -\Phi\eta, \\ \gamma' &= \Phi\xi. \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнения (9) легко интегрируются.

Возьмем, например, второе из этих уравнений. $\Phi\xi$ можно разложить в ряд вида

$$\Phi\xi = B_0 + \sum B\cos(mw + \mu t + k), \tag{10}$$

здесь B и k — постоянные, m — целое число, μ — линейная комбинация с целыми коэффициентами величин 2 и λ_i. Свободный член B_0 для наглядности выписан отдельно.

Из уравнения

$$h_0 \frac{d\gamma}{dw} + \frac{d\gamma}{dt} = \Phi\xi$$

найдем

$$\gamma = B_0 t + \sum \frac{B\sin(mw + \mu t + k)}{mh_0 + \mu} + \psi(w - h_0 t).$$

где ψ — произвольная функция от $w - h_0 t$.

Если мы хотим, чтобы величина γ разлагалась в тригонометрический ряд вида (10), то необходимо:

1) чтобы функция ψ была равна нулю (так как я не предполагал, что существует соотношение вида $mh_0 + \mu = 0$). Итак, мы считаем, что $\psi = 0$;

2) чтобы B_0 было равно нулю.

Следовательно, чтобы решить нашу задачу, необходимо удовлетворить двум условиям: свободный член $\Phi\xi$, так же как и свободный член $\Phi\eta$, должен быть равен нулю.

Выберем h_1 так, чтобы удовлетворить одному из этих условий, тогда второе условие выполняется автоматически, если только задача имеет решение.

Чтобы найти h_i и x_i, воспользуемся уравнением E_i. Чтобы x_i имел тригонометрический вид, необходимы два условия. Первое удовлетворяется с помощью специального выбора h_i, а о втором можно специально не заботиться.

Итак, либо задача не имеет решения, либо наши условия должны выполняться автоматически.

193. Чтобы доказать, что эти условия на самом деле выполняются автоматически, мне следует показать, что решение задачи всегда возможно. Мы уже встречались с подобной ситуацией: метод п. **127** нельзя было бы считать обоснованным, если бы в п. **125** заранее не была доказана возможность соответствующего разложения.

Рассмотрим систему канонических уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{1}$$

Я предполагаю, что F разлагается по степеням параметра μ:

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots,$$

но я не предполагаю более, как в п. **125**, что F_0 не зависит от y_i.

Функция F по предположению периодическая (период равен 2π) по y_i.

Наконец, я предполагаю, что способ интегрирования уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF_0}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_i} \tag{2}$$

известен, а решения удовлетворяют следующим условиям.

1. Переменные x_i и y_i зависят от n постоянных интегрирования

$$x_1', x_2', \ldots, x_n'$$

и n аргументов

$$y_1', y_2', \ldots, y_n'.$$

2. В свою очередь эти n аргументов зависят от времени, так что

$$y_i' = \lambda_i t + \varpi_i;$$

λ_i — постоянные, зависящие от n первых постоянных интегрирования x_i'; ϖ_i означают n новых постоянных интегрирования.

3. Величины x_i и $y_i - y_i'$ являются периодическими функциями от y_i' с периодом 2π.

4. Выражение

$$\sum x_i\,dy_i - \sum x_i'\,dy_i'$$

представляет собой полный дифференциал.

Очевидно, что

$$F_0(x_i,\ y_i) = \text{const}, \tag{3}$$

т. е. функция F_0 зависит только от постоянных интегрирования x_i'. Напомним теорему п. 4, которую можно было бы сформулировать так.

Произведем замену переменных и перейдем от одной системы сопряженных переменных $(x_i,\ y_i)$ к другой системе сопряженных переменных $(x_i',\ y_i')$. Чтобы система уравнений сохраняла канонический вид, необходимо и достаточно, чтобы выражение

$$\sum x_i\,dy_i - \sum x_i'\,dy_i' \tag{4}$$

было полным дифференциалом.

Отсюда следует, что если в рассматриваемом случае в качестве новых переменных принять x_i' и y_i', то уравнения (1) сохранят канонический вид и перейдут в уравнения

$$\frac{dx_i'}{dt} = \frac{dF}{dy_i'}, \qquad \frac{dy_i'}{dt} = -\frac{dF}{dx_i'}. \tag{5}$$

Очевидно, что:

1) функция F периодична по y_i';

2) в силу соотношения (3) функция F_0 зависит только от x_i'. Следовательно, для уравнений (5) выполняются условия пунктов **125** и **127**. Отсюда следует, что этим уравнениям формально можно удовлетворить следующим образом.

Величины x_i' и y_i' разлагаются по степеням μ:

$$x_i' = x_i'^0 + \mu x_i'^1 + \mu^2 x_i'^2 + \ldots,$$
$$y_i' = y_i'^0 + \mu y_i'^1 + \mu^2 y_i'^2 + \ldots.$$

Коэффициенты $x_i'^k$ и $y_i'^k$ зависят от n постоянных интегрирования и n аргументов

$$w_i = n_i t + \omega_i',$$

где n_i — постоянные, разлагающиеся по степеням μ, а ω_i' — произвольные постоянные.

Коэффициенты $x_i'^k$ и $y_i'^k$ периодические по w_i, за исключением коэффициента $y_i'^0$, равного w_i. Кроме того, коэффициент $x_i'^0$ равен постоянной.

Эти разложения x_i и y_i подставим в уравнения, с помощью которых старые переменные можно выразить в виде функций от новых переменных

x_i' и y_i'. Мы видим, что уравнениям (5) формально можно удовлетворить следующим образом.

Переменные x_i и y_i можно разложить по степеням μ, а именно:

$$x_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \dots,$$
$$y_i = y_i^0 + \mu y_i^1 + \dots.$$

Здесь коэффициенты x_i^k и y_i^k периодичны по w_i, за исключением y_i^0, но разность $y_i^0 - w_i$ будет периодической, x_i^0 при этом не сводится к постоянной, а $y_i^0 \not\equiv w_i$.

194. Применим эти принципы к уравнению (1) п. 191, которое запишем под новым номером

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x(q^2 - q_1 \cos 2t) = \alpha\varphi(x, t). \tag{6}$$

Попытаемся привести это уравнение к каноническому виду.

Пусть ψ — функция от x и t, такая, что

$$\varphi(x, t) = \frac{d\psi}{dx};$$

так же, как и ψ, функция φ будет разлагаться по степеням x и синусам и косинусам линейных комбинаций

$$2t,\ \lambda_3 t,\ \lambda_4 t,\ \dots,\ \lambda_n t$$

с целыми коэффициентами.

Для симметрии обозначений положим

$$2 = \lambda_2.$$

Кроме того, пусть

$$y = \frac{dx}{dt}, \qquad y_i = \lambda_i t \qquad (i = 2, 3, \dots, n)$$

(мы предполагаем, что в $q_1 \cos 2t$, φ и ψ выражения $\lambda_i t$ заменены на y_i, в результате чего обе части уравнения (6) будут функциями от x, d^2x/dt^2 и y_i, периодическими по y_i с периодом 2π).

Введем $n - 1$ вспомогательных переменных

$$x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_n$$

и положим

$$F = \frac{y^2}{2} - \alpha\psi + \frac{x^2}{2}(q^2 - q_1 \cos y_2) - \sum \lambda_i x_i.$$

Уравнение (6) можно заменить системой канонических уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dy}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{dF}{dx}, \\ &\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 2,3, \ldots, n). \end{aligned} \tag{7}$$

Далее, если положить (ср. п. 181)

$$x = \frac{1}{q}\sqrt{2x_1}\cos y_1, \qquad y = q\sqrt{2x_1}\sin y_1,$$

то выражение

$$x dy - x_1 dy_1$$

будет полным дифференциалом. Следовательно, если в качестве переменных выбрать x_i, y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), то канонический вид уравнений не изменится.

Кроме того, функция F будет периодической по $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и

$$q^2x^2 + y^2 = 2qx_1.$$

Малый параметр α играет здесь роль параметра μ. Очевидно, что F разлагается по степеням α.

Если положить $\alpha = 0$, то

$$F_0 = qx_1 - \frac{q_1}{q^2} x_1 \cos^2 y_1 \cos y_2 - \sum \lambda_i x_i.$$

Можно найти функцию S, зависящую от n произвольных постоянных x_1', x_2', ..., x_n', которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{dS}{dy_1}\left(q - \frac{q_1}{q^2}\cos^2 y_1 \cos y_2\right) - \sum \lambda_i \frac{dS}{dy_i} = \text{const}. \tag{8}$$

С точностью до некоторых различий в обозначениях это уравнение совпадает с уравнением п. 181. В п. 181 мы видели, что если q_1 считать малым коэффициентом, аналогичным параметру μ п. 125, то к этому уравнению можно будет применить методы п. 125. Функция $S = x_1'y_1 - x_2'y_2 - \ldots - x_n'y_n$ зависит от x_1', y_1 и y_2, но периодична только по y_1 и y_2 (ср. с п. 181). В этом можно убедиться, применив к уравнению (8) метод п. 125 (роль параметра μ играет q_1).

Отсюда следует, что уравнениям

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF_0}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_i} \tag{9}$$

можно удовлетворить, полагая так же, как в п. 3,

$$x_i = \frac{dS}{dy_i}, \qquad y_i' = \frac{dS}{dx_i'}$$

и, кроме того,

$$y_i' = \lambda_i t + \varpi_i,$$

где λ_i и ϖ_i — две постоянные, причем вторая из них произвольна.

При $i > 2$ получим

$$x_i = x_i' \quad \text{и} \quad y_i = y_i'.$$

Аналогично

$$y_2 = y_2'.$$

Что же касается переменной y_1', то

$$y_1' = -ht + \varpi_1,$$

так что коэффициент λ представляет собой не что иное, как взятое с обратным знаком число h.

Функцию S, а также зависимость x_i и y_i от x_i', y_i' найти нетрудно. Мы легко найдем их, если число h и коэффициенты A_n, определенные в предыдущей главе, известны.

Замечу только, что в силу самого определения новых переменных x_i' и y_i' выражение

$$dS = \sum x_i\, dy_i + \sum y_i'\, dx_i'$$

и, следовательно, выражение

$$\sum (x_i\, dy_i - x_i'\, dy_i')$$

будут полными дифференциалами.

Кроме того, x_i' и $y_i - y_i'$ будут периодическими функциями от y_i'.

Наконец,

$$F_0 = +hx_1' - \lambda^2 x_2' - \lambda_2 x_2' - \ldots - \lambda_n x_n'.$$

Следовательно, если в качестве новых переменных принять x_i' и y_i', то канонический вид уравнений (7) не изменится и их можно будет записать в виде

$$\frac{dx_i'}{dt} = \frac{dF}{dy_i'}, \qquad \frac{dy_i'}{dt} = -\frac{dF}{dx_i'}. \tag{10}$$

Кроме того, функция F будет периодической по y_i'. При $\alpha = 0$

$$F = F_0$$

зависит лишь от x_i'.

Итак, мы находимся в условиях пунктов 125 и 127 и можем заключить, что x_i' и y_i' и, следовательно, x_i и y_i можно формально представить в виде функций от α, n произвольных постоянных и n переменных w_k, так что функции x_i', y_i' — w_i, x_i, y_i — w_i будут допускать разложение по степеням α и будут периодическими по w_k. Переменные w_k будут иметь вид

$$w_k = n_k t + \varpi_k,$$

где ϖ_k — новые постоянные интегрирования, а постоянные n_k разлагаются по степеням α.

Кроме того, нетрудно видеть, что в рассматриваемом нами частном случае при $k > 1$

$$y_k = y_k' = w_k, \qquad n_k = \lambda_k.$$

Чтобы удовлетворить не только уравнениям (7), но и уравнениям (6), из которых они получены, необходимо положить

$$\varpi_k = 0, \quad w_k = \lambda_k t.$$

Из всего сказанного следует, что задача, сформулированная в предыдущем пункте, всегда имеет решение и, следовательно, те условия, о которых там говорилось в самом конце, выполняются автоматически.

195. Наши выводы остаются в силе при любых значениях q_1, в частности при $q_1 = 0$. Этот факт не мог не заметить Гильден. Причина, по которой он ввел член $q_1 x \cos 2t$ в левую часть уравнения, несмотря на то, что коэффициент q_1 очень мал, состояла отнюдь не в том, чтобы избежать вековых членов. Причина введения им этого члена совсем иная. На ней я и хочу остановиться подробней.

Если обратиться к предыдущей главе, то видно, что коэффициенты A_n обращаются в бесконечность, если h — целое число. Следовательно, эти коэффициенты очень велики, если h мало отличается от какого-нибудь целого числа или от q, которое в свою очередь мало отличается от какого-нибудь целого числа.

Итак, записав уравнение предыдущей главы в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q^2 x = + q_1 x \cos 2t,$$

мы могли бы применить к нему методы п. 127, считая, что роль параметра μ играет q_1. Сходимость при этом была бы чрезвычайно медленной, если бы q мало отличалось от целого числа.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q^2x = \alpha\varphi(x, t). \tag{1}$$

Пусть произвольный член разложения $\varphi(x, t)$ имеет вид

$$Ax^m \cos\lambda t \quad \text{или} \quad Ax^m \sin\lambda t,$$

где m — положительное целое число или нуль. Если $m = 0$, то эти члены не зависят от x и их можно оставить в правой части. Если же $m > 1$, то выписанные члены содержат множитель x^2, который в общем случае очень мал и не может оказывать сильного влияния.

Остается случай $m = 1$.

В силу только что сказанного к уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q^2x = \alpha A\cos\lambda t \tag{2}$$

можно применить методы п. 127. Если роль параметра μ играет α, то сходимость будет медленной или быстрой в зависимости от того, будет или не будет $2q/\lambda$ достаточно близко к целому числу. Сходимость будет особенно медленной, если $2q/\lambda$ мало отличается от 1. В самом деле, из п. 179 следует, что выражение $F_1(t)$ содержит в знаменателе $q^2 - 1$.

Из этого вытекает, что, разложив $F(t)$ так же, как в п. 179, по степеням q_1, получим члены

$$\frac{q_1}{q^2 - 1}.$$

Следовательно, функция $F(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q^2x = q_1x\cos 2t, \tag{3}$$

будет принимать очень большие значения, если q мало отличается от 1. Но уравнение (2) перейдет в уравнение (3), если произвести замену t на $2t/\lambda$, q на $\lambda q/2$, αA на $\lambda^2 q_1/4$.

Поэтому, как только что указывалось, решение уравнения (2) будет большим, а сходимость его медленной, если $2q/\lambda$ мало отличается от 1.

Следовательно, если в правой части уравнения (1) имеется член, содержащий x в первой степени, и если его аргумент λt таков, что $2q/\lambda$ мало отличается от 1, то сходимость можно значительно ускорить, перенеся этот член в левую часть.

Посмотрим, встречается ли этот случай в приложении метода Гильдена к задаче трех тел.

Рассмотрим снова уравнение (6bis) п. 168

$$\frac{d^2\rho}{d\nu_0^2} + \rho = B.$$

Члены функции B имеют тот же порядок величины, что и возмущающие силы. Они зависят от $\nu_0 + \chi, \nu_0' + \chi', \rho$ и ρ'. Мы имеем право допустить, что переменные χ, χ' и ρ' можно исключить с помощью методов пунктов 170—172 или аналогичных им, а ν_0' — представить в виде функции от ν_0.

Тогда функция B будет зависеть лишь от ρ и ν_0, и члены ее будут иметь вид

$$A\rho^m \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \lambda\nu_0.$$

Что же касается λ, то эта величина будет равна

$$m + \mu n,$$

где m и n — целые числа, а μ — отношение средних движений двух планет.

Выделим в B два следующих члена:

$$\alpha\rho \quad \text{и} \quad \beta\rho\cos 2\nu_0$$

и положим

$$B = \alpha\rho + \beta\rho\cos 2\nu_0 + B'.$$

Член $\alpha\rho$ можно перенести в левую часть и записать

$$\frac{d^2\rho}{d\nu_0^2} + \rho(1 - \alpha) = B' + \beta\rho\cos 2\nu_0.$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и уравнение (1). Чтобы понять, следует ли переносить в левую часть член $\beta\rho\cos 2\nu_0$, необходимо выяснить, будет ли величина, соответствующая $2q/\lambda$, мало отличаться от 1. Но эта величина равна

$$\sqrt{1-\alpha},$$

а параметр α имеет тот же порядок, что и возмущающая функция. Следовательно, перенеся $\beta\rho\cos 2\nu_0$ в левую часть, мы значительно ускорим сходимость. Переносить же для этого другие члены B' не следует.

Рассмотрим теперь наш вопрос несколько подробнее. Трудность состоит в том, что коэффициент при ρ мало отличается от 1 или, если возмущающие массы равны нулю, равен 1.

Действительно, если возмущающие массы равны нулю, то движение становится кеплеровским, и уравнения принимают вид

$$\nu = \nu_0, \quad \frac{d^2u}{d\nu_0^2} + u = 0.$$

Если бы возмущающие массы были все время равны нулю, а обе планеты притягивались бы центральным телом, по *закону притяжения*

отличному от закона Ньютона, то выписанные выше уравнения приняли бы вид

$$\nu = \nu_0, \quad \frac{d^2u}{d\nu_0^2} + \varphi(u) = 0,$$

где $\varphi(u)$ — некоторая функция от u, вид которой зависит от закона притяжения.

Далее так же, как в п. 169, положим

$$u = u_1 + \rho,$$

где u_1 — известная функция от ν_0, мало отличающаяся от u, и пренебрежем более высокими степенями ρ. Получим

$$\frac{d^2\rho}{d\nu_0^2} + \varphi'(u_1)\rho = A.$$

Здесь φ' — производная функции φ, A — известная функция от ν_0 (так же, как и $\varphi'(u_1)$).

Например, если бы u_1 было некоторой постоянной, а $\varphi(u)$ — линейной функцией, то $\varphi'(u_1)$ была постоянной, вообще говоря, отличной от 1, и той трудности, с которой мы только что столкнулись, не возникло.

Итак, если закон притяжения отличен от закона Ньютона, то трудность, из-за которой член с q_1 нужно было перенести в левую часть, не возникает.

Это связано со следующим обстоятельством. Если закон притяжения ньютоновский и предполагается, что возмущающие массы всегда равны нулю, то перигелии будут неподвижны, что неверно, если закон притяжения отличается от закона Ньютона.

Именно на это я уже указывал в начале главы XI.

Итак, трудность, побудившая Гильдена перенести член, содержащий q_1, в левую часть уравнения, в точности та же, что и трудность, преодоленная нами выше с помощью методов главы XI.

Уравнение вариации

196. Уравнение (5а) п. 169, т. е. уравнение вариации, записывается в виде

$$\frac{d^2\chi}{d\nu_0^2} - C\sin(m\nu_0 + n\mu\nu_0 + m\chi + k) = A, \tag{1}$$

где C — постоянная, A — совокупность малых членов, зависящих по предположению только от χ.

Пусть

$$m\nu_0 + n\mu\nu_0 + m\chi + k = V,$$

тогда

$$\frac{d^2V}{dv_0^2} - \frac{C}{m}\sin V = \frac{A}{m},$$

где функция A зависит от V и v_0, причем значения ее малы. В силу малости значений A, ее можно представить в виде

$$A = \alpha m\varphi(V, v_0),$$

где α — малый коэффициент, и попытаться разложить по возрастающим степеням α.

Итак,

$$\frac{d^2V}{dv_0^2} - \frac{C}{m}\sin V = \alpha\varphi(V, v_0).$$

Отсюда видно, что уравнение (1) является частным случаем уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = \alpha\varphi(x, t), \tag{2}$$

где f и φ — некоторые функции, а α — малый коэффициент.

То же относится и к уравнению (6c) п. 169, которое можно записать в виде

$$\frac{d^2\rho}{dv_0^2} + \rho(1+\alpha) - C\rho^3 = B,$$

где B означает сумму малых членов. Можно считать, что B с помощью методов пунктов 170—172 преобразовано так, что содержит лишь ρ и v_0.

Следовательно, это уравнение также имеет вид уравнения (2), к изучению которого мы только что приступили.

Прежде чем идти дальше, следует сделать одно замечание.

Рассмотрим уравнение (1) п. 191.

Решение этого уравнения мы пытались разложить по степеням α. В главе XVI мы ставили задачу совершенно иначе. Тогда мы говорили, что в правую часть этого уравнения вместо x следует сначала подставить 0, затем первое приближенное значение и т. д.

Но нетрудно видеть, что оба эти метода последовательных приближений сводятся к одному и тому же. Действительно, если в этом уравнении положить $\alpha = 0$, то

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x(q^2 - q_1\cos 2t) = 0.$$

Новое уравнение допускает в качестве решения $x = 0$, т. е. именно то значение x, которое было выбрано в качестве первого приближения. Также

обстоит дело и с уравнением (6c) п. 169, которое можно записать в виде

$$\frac{d^2\rho}{dv_0^2} + A\rho - C\rho^3 = \alpha f(\rho, v_0).$$

Если $\alpha = 0$, то частным решением этого уравнения может быть $\rho = 0$. Именно это значение $\rho = 0$ и было взято в качестве первого приближения в главе XVI.

Итак, оба метода последовательных приближений эквивалентны.

Совершенно иначе обстоит дело с уравнением (1), которое мы привели к виду

$$\frac{d^2V}{dv_0^2} - \frac{C}{m}\sin V = \alpha\varphi(V, v_0).$$

При $\alpha = 0$ это уравнение переходит в уравнение

$$\frac{d^2V}{dv_0^2} - \frac{C}{m}\sin V = 0. \tag{3}$$

Очевидно, что уравнение (3) имеет частное решение $V = 0$.

Но в главе XVI в качестве первого приближения мы приняли не

$$V = 0,$$

а

$$\chi = 0,$$

откуда

$$V = mv_0 + n\mu v_0 + k,$$

что, очевидно, не является решением уравнения (3).

Описанные выше методы последовательных приближений не являются абсолютно эквивалентными. В виду малости коэффициента C в качестве первого приближения можно взять вместо $\chi = 0$ какое-нибудь решение уравнения (3), причем это не приведет к значительному замедлению скорости сходимости. Именно так и поступал Гильден.

Итак, рассмотрим уравнение (2)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = \alpha\varphi(x, t).$$

Так же, как и в п. 191, я буду предполагать, что $\varphi(x, t)$ — периодическая функция относительно

$$\lambda_2 t, \lambda_3 t, \ldots, \lambda_n t$$

с периодом 2π, и введу обозначения

$$y = \frac{dx}{dt}, \qquad y_i = \lambda_i t, \qquad \varphi = \frac{d\psi}{dx}.$$

Аналогично

$$f = \frac{d\theta}{dx}.$$

Если положить

$$F = \frac{y^2}{2} - \theta + \alpha\psi - \sum \lambda_i x_i,$$

то уравнение (2) можно заменить каноническими уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dF}{dy}, & \frac{dy}{dt} &= -\frac{dF}{dx}, \\ \frac{dx_i}{dt} &= \frac{dF}{dy_i}, & \frac{dy_i}{dt} &= -\frac{dF}{dx_i}. \end{aligned} \tag{4}$$

Эти уравнения формально можно проинтегрировать следующим образом. Наши переменные допускают разложение по степеням α, причем коэффициенты разложения оказываются периодическими функциями с периодом 2π от n параметров

$$w,\ w_2,\ w_3,\ \ldots,\ w_n,$$

где

$$w = ht + \varpi_1, \qquad w_i = h_i t + \varpi_i.$$

Ясно, что так же, как в п. **194**, необходимо положить

$$h_i = \lambda_i, \qquad \varpi_i = 0, \qquad y_i = w_i.$$

Что же касается величины h, то ее можно разложить по степеням α.

Результаты п. **193** можно сформулировать следующим образом. Если аналогичная задача имеет решение при $\alpha = 0$, то она также имеет решение и при $\alpha \neq 0$.

Если $\alpha = 0$, то наше уравнение записывается в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0. \tag{5}$$

Оно очень легко интегрируется в квадратурах

$$x = \omega(w), \qquad y = h\omega'(w), \quad w = ht + \varpi_1,$$
$$y_i = w_i = \lambda_i t.$$

Величины ω и ω' являются функциями от w и постоянной интегрирования β, они периодические с периодом 2π по w, h зависит от β, а ϖ_1 — новая постоянная интегрирования.

Если сформулированная нами задача имеет решение при $\alpha = 0$, то она также будет иметь решение при $\alpha \neq 0$.

Остается найти его эффективно.

Для этого я перепишу уравнение (2) с учетом того, что x зависит от t, во-первых, непосредственно и, во-вторых, через w. Таким образом, я буду следовать методу, аналогичному методу п. **192**.

Я найду

$$h^2 \frac{dx^2}{dw^2} + 2h \frac{d^2x}{dw\,dt} + \frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = \alpha\varphi(x, t). \tag{6}$$

Вместо x и h подставлю их разложения по степеням α

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \cdots,$$
$$h = h_0 + \alpha h_1 + \alpha^2 h_2 + \cdots$$

и приравняю коэффициенты при одинаковых степенях α. При этом получатся следующие уравнения:

$$h_0^2 \frac{d^2x_0}{dw^2} + 2h_0 \frac{d^2x_0}{dw\,dt} + \frac{d^2x_0}{dt^2} + f(x_0) = 0, \tag{7}$$

$$2h_0h_1 \frac{d^2x_0}{dw^2} + 2h_1 \frac{d^2x_0}{dw\,dt} + h_0^2 \frac{d^2x_1}{dw^2} + 2h_0 \frac{d^2x_1}{dw\,dt} + \frac{d^2x_1}{dt^2} + f'(x_0)\,x_1 = \Phi; \tag{8}$$

$$2h_0h_2 \frac{d^2x_0}{dw^2} + 2h_2 \frac{d^2x_0}{dw\,dt} + h_0^2 \frac{d^2x_2}{dw^2} + 2h_0 \frac{d^2x_2}{dw\,dt} + \frac{d^2x_2}{dt^2} + f'(x_0)\,x_2 = \Phi, \tag{9}$$

. . . . . .

Через Φ я обозначил известную функцию от t и w. Правая часть уравнения (8) известна, поскольку h_0 и x_0 найдены из уравнения (7); правая часть уравнения (9) известна, поскольку h_0, h_1, x_0, x_1 определены с помощью уравнений (7) и (8), и т. д.

Уравнение (7) приводится к уравнению (5), следовательно,

$$x_0 = \omega(w, \beta),$$

где ω — функция от w и постоянной β, периодическая по w.

Рассмотрим теперь уравнение (8). Если h_1 известно, то его можно записать в виде

$$h_0^2 \frac{d^2x_1}{dw^2} + 2h_0 \frac{d^2x_1}{dw\,dt} + \frac{d^2x_1}{dt^2} + f'(x_0)\,x_1 = \Phi. \tag{8bis}$$

Это линейное неоднородное уравнение. Следовательно, необходимо рассмотреть соответствующее ему однородное уравнение

$$h_0^2 \frac{d^2z}{dw^2} + 2h_0 \frac{d^2z}{dw\,dt} + \frac{d^2z}{dt^2} + f'(x_0)\,z = 0.$$

Это уравнение имеет частное решение

$$z = z_1 = \frac{d\omega}{d\beta}, \qquad z = z_2 = \frac{d\omega}{dw}.$$

Так же, как в п. 192, положим

$$z_1' = h_0 \frac{dz_1}{dw} + \frac{dz_1}{dt}, \qquad z_2' = h_0 \frac{dz_2}{dw} + \frac{dz_2}{dt}.$$

Определитель $z_1z_2' - z_2z_1'$ будет равен некоторой постоянной, которую я обозначу k. Заметим, между прочим, что эти уравнения записаны так, как если бы x_0, z_1, z_2, z_1', z_2' зависели одновременно и от w, и от t, тогда как в действительности они зависят лишь от w. Следовательно, многие члены в этих уравнениях равны нулю.

Пусть γ и δ — две величины, определяемые уравнениями

$$x_1 = \gamma z_1 + \delta z_2,$$

$$h_0 \frac{dx_1}{dw} + \frac{dx_1}{dt} = \gamma z_1' + \delta z_2'.$$

Положим для краткости

$$\gamma' = h_0 \frac{d\gamma}{dw} + \frac{d\gamma}{dt},$$

$$\delta' = h_0 \frac{d\delta}{dw} + \frac{d\delta}{dt}.$$

Уравнение (8bis) можно заменить двумя уравнениями:

$$\gamma' z_1 + \delta' z_2 = 0,$$

$$\gamma' z_1' + \delta' z_2' = \Phi,$$

откуда

$$\gamma' = -\Phi z_2,$$

$$\delta' = \Phi z_1.$$

Эти уравнения можно интегрировать с помощью того же метода, что и аналогичные уравнения п. 192, причем никаких трудностей не возникает, если только средние значения Φz_1 и Φz_2 равны нулю.

Таким образом, h_1 и h_2 выбирают так, чтобы одно из этих средних значений обратилось в нуль, а второе обращается в нуль *автоматически*, поскольку заранее известно, что задача разрешима.

Уравнение (9) и последующие уравнения решаются аналогично.

В некоторых частных случаях интегрирование уравнения (5) приводит к эллиптическим функциям. Так происходит, например, если $f(x)$ — полином третьей степени относительно x или если $f(x)$ — некоторая постоянная, умноженная на $\sin x$, т. е. в случае уравнений (6c) и (5a) п. 169.

Выводы

197. В предыдущих пунктах я больше стремился разъяснить сущность методов Гильдена, чем скрупулезно воспроизводить его изложение. Мне остается изложить собственную точку зрения на то, как следует оценивать эти методы.

Всякий раз, когда отношение средних движений не слишком близко к рациональному, методы Ньюкома, изложенные в главах IX—XV, становятся более простыми и по существу более удовлетворительными (в особенности, если иметь в виду внесенные мной в эти методы усовершенствования), чем методы Гильдена.

Поэтому дальнейшее изучение методов Гильдена становится излишним. В самом деле, даже в тех случаях, когда отношение средних движений мало отличается от рационального, методы, изложенные в главах IX—XV, остаются в силе. Для рассмотрения этих случаев Гильден разработал методы, аналогичные тем, которые позволяют получить результаты в более простых условиях, и достиг успеха.

Необходимо тем не менее постичь основную идею методов Гильдена как для того, чтобы иметь возможность их непосредственного использования, так и для того, чтобы использовать их как удобное средство открытия новых теорий, по той или иной причине более удовлетворительных, чем ныне существующие.

Эту идею можно выразить одним словом. Если какой-нибудь член становится очень большим и замедляет сходимость, то его следует учесть в первом приближении.

Обобщение периодических решений

198. К теории уравнений, изучением которых мы занимались в настоящей главе, имеет отношение одно утверждение, которым Гильден, не формулируя его в явном виде, неоднократно пользовался. Я не могу не упомянуть это утверждение.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \alpha x = \mu f(x, t, \mu), \tag{1}$$

где α — некоторая постоянная, μ — малый параметр, f — функция от x, t и μ, допускающая разложение по степеням x и μ и синусам и косинусам линейных комбинаций n величин

$$\lambda_1 t,\ \lambda_2 t,\ \ldots,\ \lambda_n t$$

с целыми коэффициентами.

Если имеется лишь один аргумент $\lambda_1 t$, то функция f будет периодической по t с периодом $2\pi/\lambda_1$. В этом случае уравнение (1) имеет периодическое решение, обладающее таким же периодом. В самом деле, очевидно, что каково бы ни было α, это уравнение имеет периодическое решение

$$x = 0.$$

Отсюда в силу принципов, изложенных в главе III, следует, что это уравнение имеет периодическое решение и при малых значениях μ.

Можно ли обобщить этот результат на случай, когда f содержит n различных аргументов

$$\lambda_1 t,\ \lambda_2 t,\ \ldots,\ \lambda_n t?$$

Имеет ли в этом случае уравнение (1) решение вида

$$x = x_1\mu + x_2\mu^2 + x_3\mu^3 + \ldots, \tag{2}$$

где x_1, x_2, x_3, ... разлагаются в ряд по синусам и косинусам линейных комбинаций $\lambda_i t$?

Чтобы разобраться в этом, воспользуемся методом, напоминающим метод п. 45.

Этот метод хотя и носит более общий характер, оказывается более простым, ибо в п. 45 я намеренно ввел одну трудность (при $\alpha = 0$), которая не возникает в общем случае.

Предположим, что задача решена, и подставим в f вместо x разложение (2). После такой подстановки функция f будет допускать разложение по степеням μ, во-первых, потому, что эта функция еще до подстановки разлагалась по степеням этой переменной, и во-вторых, потому, что выражение для x, задаваемое формулой (2), само разлагается по степеням μ. Итак,

$$f = \varphi_0 + \mu\varphi_1 + \mu^2\varphi_2 + \ldots,$$

где φ_0 зависит лишь от t; φ_1 зависит от t и x_1; φ_2 — от t, x_1 и x_2 и т. д.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x_1}{dt^2} - \alpha x_1 = \varphi_0,\\
&\frac{d^2x_2}{dt^2} - \alpha x_2 = \varphi_1,\\
&\frac{d^2x_3}{dt^2} - \alpha x_3 = \varphi_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{3}$$

Эти уравнения позволяют последовательно найти x_1, x_2, x_3, ...

Уравнения (3) имеют вид

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} - \alpha x_i = \varphi_{i-1}.$$

Если φ_{i-1} разложить по синусам и косинусам линейных комбинаций $\lambda_i t$ и записать

$$\varphi_{i-1} = \Sigma A \cos\left[(m_1\lambda_1 + m_2\lambda_1 + \cdots + m_n\lambda_n)\, t + k\right],$$

где m_i — целые числа, а k и A — некоторые постоянные, то

$$x_i = -\sum \frac{A\cos[(m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \cdots + m_n\lambda_n)t + k]}{\alpha + (m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \cdots + m_n\lambda_n)^2}, \tag{4}$$

и x_i будет иметь желаемый вид.

Остается лишь убедиться в том, что разложение (2) сходится. Это действительно так, *если параметр* α *положителен.*

В самом деле, пусть α — положительный параметр. Тогда

$$\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\alpha + (m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \cdots + m_n\lambda_n)^2}.$$

Воспользуемся вновь обозначениями главы II и введем новую функцию от t того же вида, что и φ_{i-1}. Эту функцию обозначим φ'_{i-1}. Предположим, что новая функция такова, что

$$\varphi_{i-1} \ll \varphi'_{i-1} \quad (\arg e^{\pm i\lambda_1 t},\ e^{\pm i\lambda_2 t},\ \ldots,\ e^{\pm i\lambda_n t}).$$

Далее определим x_i' с помощью уравнения

$$\alpha x'_i = \varphi'_{i-1}$$

и x_i с помощью уравнения (4). Очевидно, что

$$x_i \ll x'_i.$$

Пусть $f'(x, t, \mu)$ — функция того же вида, что и $f(x, t, \mu)$, и такая, что

$$f \ll f' \quad (\arg x,\ \mu,\ e^{\pm i\lambda_1 t},\ e^{\pm i\lambda_2 t},\ \ldots,\ e^{\pm i\lambda_n t}).$$

Рассмотрим уравнение, задающее новую функцию x',

$$\alpha x' = \mu f'(x',\ t,\ \mu). \tag{5}$$

Из этого уравнения можно найти x' в виде сходящегося ряда, расположенного по степеням μ:

$$x' = x'_1\mu + x'_2\mu^2 + x'_3\mu^3 + \cdots,$$

коэффициенты которого разлагаются в ряд по синусам и косинусам линейных комбинаций $\lambda_i t$.

Если в f' вместо x' подставить это разложение, то

$$f' = \varphi'_0 + \mu\varphi'_1 + \mu^2\varphi'_2 + \cdots,$$

где φ_0' зависит только от t, φ_1' зависит от t и x_1', φ_2' от t, x_1' и x_2'.

Кроме того,

$$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_k, t) \ll \varphi'_k(x_1, x_2, \ldots, x_k, t) \quad (\arg x_1, x_2, \ldots, x_k, e^{\pm i\lambda t}).$$

Здесь для краткости вместо $e^{\pm i\lambda_1 t}$, $e^{\pm i\lambda_2 t}$, ..., записано $e^{\pm i\lambda t}$.

Из уравнения (5) находим

$$\alpha x_1' = \varphi_0', \qquad \alpha x_2' = \varphi_1', \ldots$$

Отсюда последовательно получим

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &\ll \varphi_0' && (\arg e^{\pm i\lambda t}),\\
x_1 &\ll x_1' && (\arg e^{\pm i\lambda t}),\\
\varphi_1(x_1, t) &\ll \varphi_1'(x_1, t) && (\arg x_1, e^{\pm i\lambda t}),\\
\varphi_1(x_1, t) &\ll \varphi_1'(x_1', t) && (\arg e^{\pm i\lambda t}),\\
x_2 &\ll x_2' && (\arg e^{\pm i\lambda t}),\\
\varphi_2(x_1, x_2, t) &\ll \varphi_1'(x_1, x_2, t) && (\arg x_1, x_2, e^{\pm i\lambda t}),\\
\varphi_2(x_1, x_2, t) &\ll \varphi_2'(x_1', x_2', t) && (\arg e^{\pm i\lambda t}),\\
x_3 &\ll x_3' && (\arg e^{\pm i\lambda t}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

и, наконец,

$$x \ll x' \qquad (\arg \mu, e^{\pm i\lambda t}),$$

что и доказывает сходимость разложения (2).

Итак, разложение (2) сходится в двух случаях:

1) при любом α, если имеется только один аргумент $\lambda_1 t$;

2) при любом числе аргументов, если $\alpha > 0$.

Глава XIX

МЕТОДЫ БОЛИНА

Метод Делоне [54]

199. Обратимся еще раз к предположениям и обозначениям п. 125. Мы уже видели, что применение метода п. 125 приводит к появлению делителей вида

$$n_1^0 m_1 + n_2^0 m_2 + \cdots + n_n^0 m_n,$$

где m_i — целые числа.

Это вызывает сомнения в пригодности метода, когда указанные делители становятся малыми.

Среди методов, предложенных для преодоления этой трудности, метод Делоне является первым по времени, и его изложение облегчает понимание всех остальных методов.

Прежде всего рассмотрим систему канонических уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \tag{1}$$

и предположим, что функция F зависит только от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n$$

и является периодической с периодом 2π по последней переменной. Я предполагаю, что m_i — целые числа.

Тогда интегрирование системы (1) сводится к интегрированию уравнения с частными производными

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, \ldots, \frac{dS}{dy_n}, m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n\right) = C,$$

где C — произвольная постоянная. Но это интегрирование выполняется без труда.

В самом деле, положим

$$S = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 + \cdots + x_n^0 y_n + \varphi(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n).$$

Наше уравнение запишется в виде

$$F(x_1^0 + m_1\varphi',\ x_2^0 + m_1\varphi',\ \ldots,\ x_n^0 + m_n\varphi',\ m_1 y_1 + \cdots + m_n y_n) = C.$$

Разрешим это уравнение относительно φ', тогда

$$\varphi' = \text{функция от } \Sigma m_i y_i,\ x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0 \text{ и } C.$$

Это выражение проинтегрируем по $\Sigma m_i y_i$, считая C и x_k^0 константами. Мы получим φ, а следовательно, и S в виде функции от $\Sigma m_i y_i$, $x_k{}^0$ и C.

На некоторых тонкостях этого метода необходимо остановиться более подробно. Для этого я хочу разобрать один особенно простой частный случай, взяв

$$m_1 = 1,\ m_2 = m_3 = \cdots = m_n = 0,$$
$$F = x_1^2 + \mu\cos y_1,$$

где параметр μ очень мал.

Наше уравнение запишется в виде

$$\left(\frac{dS}{dy_1}\right)^2 + \mu\cos y_1 = C,$$

откуда

$$\frac{dS}{dy_1} = \sqrt{C - \mu\cos y_1}.$$

Могут представиться несколько возможностей.

1. Случай

$$C > |\mu|.$$

В этом случае радикал $\sqrt{C - \mu\cos y_1}$ всегда вещественный и никогда не обращается в нуль. Он принимает два значения: одно положительное при всех значениях y_1, другое отрицательное при всех значениях y_1. Будем считать, что взято, например, первое значение. Оно допускает разложение по косинусам аргументов, кратных y_1, так что

$$\frac{dS}{dy_1} = x_1^0 + \sum B_n \cos n y_1.$$

Для наглядности я выделил свободный член в правой части, обозначенный x_1^0. Ясно, что x_1^0 зависит от C и, следовательно, C зависит от x_1^0. С другой стороны, коэффициенты B_n зависят от C, а следовательно, и от $x_1{}^0$.

Итак, выражение

$$S = x_1^0 y_1 + \sum \frac{B_n}{n} \sin n y_1$$

задает S как функцию y_1 и произвольной постоянной $x_1{}^0$.

2. Случай

$$-|\mu| < C < |\mu|.$$

В этом случае величина, стоящая под радикалом,

$$C - \mu \cos y_1$$

не будет все время положительной и, следовательно, y_1 можно придавать не всевозможные значения, но только такие, при которых радикал будет вещественным.

Можно ввести вспомогательную переменную ε, положив, например,

$$\mu \cos y_1 = C \cos \varepsilon,$$

откуда

$$\frac{dS}{dy_1} = \sqrt{C} \sin \varepsilon$$

или

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu^2 - C^2 \cos^2 \varepsilon}{C}}.$$

Поскольку C^2 меньше μ^2, радикал в правой части всегда вещественный и допускает разложение в тригонометрический ряд вида

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = B_0 + \sum B_n \cos n\varepsilon,$$

откуда

$$S = B_0 \varepsilon + \sum \frac{B_n}{n} \sin n\varepsilon.$$

Мы получаем S в виде функции от вспомогательной переменной ε и постоянной C.

3. Случай

$$C = |\mu|.$$

Пусть, например,

$$\mu > 0, \quad C = \mu.$$

Тогда

$$\frac{dS}{dy_1} = \sqrt{\mu}\sqrt{1 - \cos y_1} = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \sin \frac{y_1}{2},$$

или

$$S = -\sqrt{2\mu}\cos\frac{y_1}{2}.$$

S выражена как функция от y_1 и является функцией, периодической по y_1, однако на этот раз период равен не 2π, а 4π.

Добавлю еще, что если $C < -|\mu|$, то радикал будет мнимым при всех значениях y_1; если же $C = -|\mu|$, то он не будет мнимым лишь при $y_1 = 0$.

То, что при этом происходит, можно пояснить двумя способами.

1. Во-первых, путем рассмотрения эллиптических функций.

В самом деле, мы видим, что

$$S = \int \sqrt{C - \mu\cos y_1}\, dy_1$$

представляет собой эллиптический интеграл, и если положить

$$u = \int \frac{dy_1}{\sqrt{C - \mu\cos y_1}},$$

то выражения

$$\sin y_1, \quad \cos y_1, \quad \sqrt{C - \mu\cos y_1}$$

будут двоякопериодическими функциями от u.

Таким образом, изученные нами ранее различные случаи отвечают различным предположениям, которые можно сделать по поводу дискриминанта эллиптических функций.

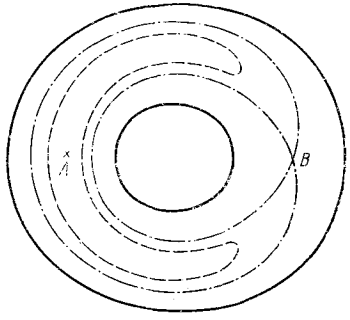


Рис. 7

2. Во-вторых, с помощью наглядных геометрических представлений.

В самом деле, мы можем построить кривые, перейдя к полярным координатам и выбрав в качестве радиуса-вектора $A + dS/dy_1$ (A — некоторая константа), а в качестве полярного угла y_1. При этом мы получим фигуру, изображенную на рис. 7.

Кривые, начерченные сплошной линией, соответствуют предположению о том, что $C > |\mu|$. Кривая, проведенная пунктиром, отвечает предположению о том, что

$$-|\mu| < C < |\mu|.$$

Штрих-пунктирная кривая, имеющая двойную точку B, относится к случаю $C = |\mu|$. Наконец, кривая, отвечающая случаю $C = -|\mu|$, вырождается в одну-единственную точку A.

Если к рассматриваемой нами сейчас задаче требуется применить методы п. 125, то S необходимо разложить по степеням μ. В самом деле,

$$\sqrt{C - \mu \cos y_1}$$

допускает разложение по степеням μ и, следовательно, то же справедливо и для S. Единственное отличие состоит в том, что последнее разложение сходится лишь при

$$C > |\mu|.$$

Если это условие не выполняется, то методы п. 125 теряют свою силу и необходимо обращаться к методу Делоне, т. е. к тому методу, изложением которого мы сейчас и заняты. Обращение к этому методу имеет особое преимущество, если C будет того же порядка, что и μ, ибо в этом случае разложения п. 125 сходятся весьма медленно.

Заметим, что разложение радикала имеет вид

$$\sum \sqrt{C} \left(\frac{\mu}{C}\right)^n \varphi_n(y_1),$$

и если C мало, то сходиться это разложение будет очень медленно, а может и вообще не сходиться.

Если положить $C = C_1\mu$, то разложение примет вид

$$\sum \sqrt{C_1}\, \sqrt{\mu} \varphi_n(y_1) \frac{1}{C_1^n}$$

и все его члены относительно μ будут одного и того же порядка. Кроме того, очевидно,

$$\sqrt{C - \mu \cos y_1} = \sqrt{\mu}\, \sqrt{C_1 - \cos y_1}.$$

200. Перейдем теперь к несколько более общему случаю и предположим, что функция F зависит лишь от $x_1 = dS/dy_1$ и y_1, причем по y_1 она периодическая.

Наше уравнение с частными производными примет вид

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, y_1\right) = C; \tag{1}$$

из него мы должны найти S.

Предположим, что

$$F = F_0 + F_1\mu + F_2\mu^2 + \ldots$$

и что F_0 зависит лишь от $dS/dy_1 = x_1$.

Могут представиться несколько случаев.

Предположим, что функция F, уже разложенная по степеням μ, оказывается еще и голоморфной по x_1. Именно так обстоит дело во всех приложениях.

Тогда, пользуясь методами п. 30 и последующих, уравнение

$$F(x_1, y_1) = C \tag{2}$$

можно разрешить относительно x_1. При $\mu = 0$ это уравнение запишется в виде

$$F_0(x_1) = C. \tag{3}$$

Пусть x_1^0 — некоторая величина, удовлетворяющая уравнению (3). Тогда x_1 можно найти из уравнения (2) в виде ряда, расположенного по степеням μ с коэффициентами, зависящими от y_1, если только

$$F_0'(x_1^0) \neq 0,$$

где F_0' означает производную от F_0.

Наоборот, если

$$F_0'(x_1^0) = 0, \quad F_0''(x_1^0) \neq 0,$$

то мы по-прежнему получим x_1 в виде некоторого ряда, но на этот раз расположенного не по степеням μ, а по степеням $\sqrt{\mu}$.

Рассмотрим оба эти случая в отдельности.

Пусть вначале $F_0'(x_1^0) \neq 0$. Поскольку x_1, а следовательно, и S допускают разложение по степеням μ, положим

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \ldots.$$

Предположим, кроме того, что производная dS_0/dy_1 равна постоянной x_1^0. Затем последовательно вычислим остальные функции S_1, S_2, ..., причем вычисления будем производить в точности так же, как в п. 125.

Переходим ко второму предположению, согласно которому $F_1'(x_1^0) = 0$.

В этом случае S допускает разложение по степеням μ, и я могу записать

$$S = S_0 + \sqrt{\mu} S_1 + \mu S_2 + \cdots.$$

Предполагая, по-прежнему, что

$$\frac{dS_0}{dy_1} = x_1^0, \qquad S_0 = x_1^0 y_1,$$

я получу

$$F_0\left(\frac{dS}{dy_1}\right)=F_0+\frac{F_0''}{2}\left(\sqrt{\mu}\,\frac{dS_1}{dy_1}+\mu\frac{dS_2}{dy_1}+\cdots\right)^2+\frac{F_0'''}{6}\left(\sqrt{\mu}\,\frac{dS_1}{dy_1}+\cdots\right)^3+\cdots.$$

Я предполагаю, что в правой части в функциях F_0, F_0'', F_0''', ... переменная x_1 заменена константой x_1^0.

Аналогично положим

$$C=C_0+C_1\sqrt{\mu}+C_2\mu+\cdots,$$

чтобы наглядно показать, что постоянная в правой части уравнения может зависеть от μ.

Тогда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в правой и левой частях уравнения

$$F=C,$$

получим

$$\begin{aligned}
F_0&=C_0,\\
0&=C_1,\\
\frac{1}{2}F_0''\left(\frac{dS_1}{dy_1}\right)^2&=-F_1(x_1^0,y_1)+C_2,\\
F_0''\frac{dS_1}{dy_1}\frac{dS_2}{dy_1}&=\Phi+C_3,\\
F_0''\frac{dS_1}{dy_1}\frac{dS_3}{dy_3}&=\Phi+C_4,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\qquad(4)$$

В третьем уравнении системы (4) я предполагаю, что функция S_0 известна, в четвертом я считаю, что известна S_1, в пятом я предполагаю известными S_0, S_1, S_2 ... и т. д. Φ, как и ранее, означает известную функцию.

Третье уравнение системы (4) позволяет нам вычислить dS_1/dy_1, поскольку функция F_0'' — константа. Имеем

$$\frac{dS_1}{dy_1}=\sqrt{\frac{2}{F_0''}\left[C_2-F_1(x_1^0,y_1)\right]}.$$

Здесь может представиться ряд возможностей, отвечающих различным случаям, разобранным выше при рассмотрении более простого примера.

Может случиться так, что C_2 остается больше F_1, каковы бы ни были значения, придаваемые переменной y_1. В этом случае dS_1/dy_1 будет периодической функцией от y_1 с периодом 2π.

Но может случиться и так, что условие

$$C_2 > F_1$$

будет выполняться, лишь при некоторых значениях переменной y_1. В этом случае S_1 будет вещественной лишь при тех значениях y_1, при которых это неравенство выполнено.

Коль скоро функция S_1 определена, четвертое уравнение системы (4) позволяет найти S_2, пятое уравнение — функцию S_3 и т. д.

Полученное решение является вполне удовлетворительным в первом случае, когда функция S_1 имеет вещественные значения при всех y_1. Однако в противном случае необходимо обратить внимание на одно обстоятельство.

Значения y_1, при которых различные функции S_1, S_2, S_3, ... перестают быть вещественными и становятся мнимыми, задаются уравнением

$$C_2 = F_1(x_1^0, y_1).$$

Можно считать, что и S при тех же значениях y_1 перестает быть вещественной и становится мнимой. Однако это не совсем точно: значения y_1, при которых функция S превращается из вещественной в мнимую, задаются уравнениями

$$F = C_0 + C_2\mu + C_3\mu\sqrt{\mu} + \cdots, \quad \frac{dF}{dx_1} = 0.$$

Эти значения и в самом деле мало отличаются от первых, если параметр μ очень мал, но все же не совпадают с ними.

Существует много способов обойти эту трудность. Можно, например, пользуясь произвольностью величин C_2, C_3, ..., положить $C_3 = 0$ (и то же проделать со всеми другими C с нечетным индексом).

Далее мы последовательно вычислим

$$S_1, \ S_2, \ S_3, \ \ldots$$

и получим

$$\frac{dS}{dy_1} = \frac{dS_0}{dy_1} + \frac{dS_1}{dy_1}\sqrt{\mu} + \frac{dS_2}{dy_1}\mu + \frac{dS_3}{dy_1}\mu\sqrt{\mu} + \cdots$$

Поскольку ничто не отличает $\sqrt{\mu}$ от $-\sqrt{\mu}$, получим еще одно решение, поменяв знаки у радикалов

$$\frac{dS}{dy_1} = \frac{dS_0}{dy_1} - \frac{dS_1}{dy_1}\sqrt{\mu} + \frac{dS_2}{dy_1}\mu - \frac{dS_3}{dy_1}\mu\sqrt{\mu} + \cdots$$

Эти два решения либо оба вещественные, либо комплексно-сопряженные.

Отсюда следует, что величины

$$S_0,\ S_2,\ S_4,\ \ldots$$

всегда вещественны.
Кроме того, выражение

$$\frac{dS_1}{dy_1} + \mu \frac{dS_3}{dy_1} + \mu^2 \frac{dS_5}{dy_1} + \ldots \tag{5}$$

всегда вещественное или чисто мнимое. И поэтому для того чтобы получить уравнение, задающее те значения y_1, при которых S перестает быть вещественной и становится мнимой, достаточно приравнять нулю выражение (5).

Как же перейти от случая, когда функция S принимает только вещественные значения, к случаю, когда S то вещественна, то мнима?

Этот переход станет более понятным, если построить следующую фигуру, аналогичную изображенной на рис. 7 (рис. 8). Выберем в качестве

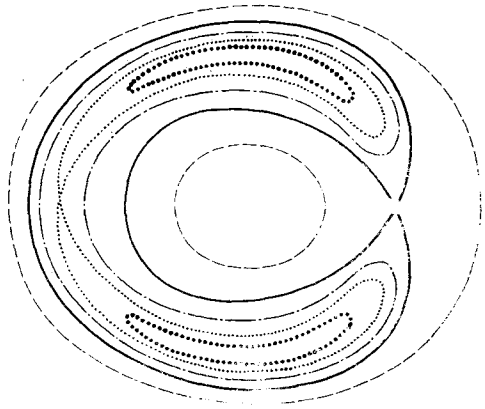


Рис. 8

радиуса-вектора dS_1/dy_1, а в качестве полярного угла переменную y_1 и построим кривые

$$F\left(\frac{dS}{dy_1},\ y_1\right) = C$$

или по крайней мере те из них, у которых производная dS/dy_1 мало отличается от x_1^0.

Последние мало отличаются от кривых, у которых радиус-вектор равен

$$x_1^0 + \sqrt{\mu}\,\frac{dS_1}{dy_1}\,.$$

а производная dS_1/dy_1 задается формулой

$$\sqrt{\frac{2}{F_0''}(C_2 - F_1)}.$$

Для построения кривых необходимо сделать предположение о том, как меняется функция F_1 при изменении y_1 от 0 до 2π. Предположим, например, что F_1 проходит через максимум, затем через минимум, затем снова через максимум, больший, чем первый, затем снова через минимум, меньший, чем первый. Мы получим при этом фигуру, изображенную на рис. 8.

Ясно, что при убывании C_2 мы получим последовательно:

Если C_2 больше наибольшего из максимумов,— две концентрические кривые, изображенные на рисунке линией, состоящей из штрихов.

Если C_2 равна наибольшему максимуму,— кривую с двойной точкой, изображенную сплошной линией.

Если C_2 заключена между двумя максимумами,— кривую, аналогичную изображенной штрих-пунктиром.

Если C_2 равна меньшему максимуму,— кривую с двойной точкой, изображенную пунктиром.

Если C_2 становится меньше, чем меньший из максимумов, эта кривая распадается на две другие, изображенные жирным пунктиром. Одна из этих кривых вырождается в точку, а затем исчезает, когда C_2 становится равной большему из минимумов, другая вырождается в точку и в свою очередь исчезает, когда C_2 становится равной меньшему из минимумов.

Очевидно, что переход от одного случая к другому осуществляется через кривую с двойной точкой. Именно это обстоятельство и делает необходимым изучение этих кривых, в особенности первой, изображенной сплошной линией.

Представим себе некоторое тело, описывающее данную кривую в непрерывном движении. Исходной его точкой служит, например, какая-то двойная точка. Тело совершает оборот по одному витку кривой, возвращается в двойную точку, описывает второй виток и, наконец, возвращается в исходную точку. Ясно, что такое движение периодично, но период его вдвое больше, чем период, отсчитываемый по y_1. Таким образом dS_1/dy_1 представляет собой периодическую функцию от y_1, но с периодом не 2π, а 4π.

Вернемся к уравнениям (4). Итак, мы нашли, что если придать C_2 значение, соответствующее максимуму F_1, то радикал

$$\sqrt{\frac{2}{F_0''}(C_2 - F_1)},$$

равный dS_1/dy_1, будет периодической функцией от y_1 с периодом 4π и, следовательно, его можно будет разложить по синусам и косинусам аргументов, кратных $y_1/2$.

Если y_1 возрастает на 2π, то радикал меняет знак, в силу чего разложение должно содержать лишь нечетные кратные $y_1/2$. Радикал дважды обращается в нуль.

В самом деле, если y_1^0 — значение переменной y_1, которое соответствует максимуму функции F_1, то функция dS_1/dy_1 обратится в нуль при $y_1 = y_1^0$ и при $y_1 = y_1^0 + 2\pi$.

Тогда из уравнений (4) следует, что при любых постоянных C_3, C_4, ... производные

$$\frac{dS_2}{dy_1}, \quad \frac{dS_3}{dy_1}, \ldots$$

будут периодическими функциями от y_1 с периодом 2π. Лишь при

$$y_1 = y_1^0 \quad \text{или} \quad y_1 = y_1^0 + 2\pi$$

эти функции могут обращаться в бесконечность.

Однако мы знаем, что постоянные C_3, ... можно подобрать так, чтобы это обстоятельство не имело места. Сказанное в достаточной мере подтверждается существованием кривой, изображенной сплошной линией на рис. 8. Посмотрим теперь, как следует выбирать постоянные C_3, ...

Если предположить, что постоянные с нечетным индексом

$$C_3, \quad C_5, \quad \ldots$$

равны нулю, то уравнения (4) не изменятся при замене $\sqrt{\mu}$ на $-\sqrt{\mu}$. Отсюда следует, что если функция

$$\frac{dS_0}{dy_1} + \sqrt{\mu}\,\frac{dS_1}{dy_1} + \mu\,\frac{dS_2}{dy_1} + \mu\sqrt{\mu}\,\frac{dS_3}{dy_1} + \cdots$$

удовлетворяет нашему уравнению, то тоже будет справедливо и для функции

$$\frac{dS_0}{dy_1} - \sqrt{\mu}\,\frac{dS_1}{dy_1} + \mu\,\frac{dS_2}{dy_1} - \mu\sqrt{\mu}\,\frac{dS_3}{dy_1} + \cdots.$$

Эти функции являются двумя решениями уравнения (4) и ясно, что перейти от одного решения к другому можно с помощью замены $\sqrt{\mu}$ на $-\sqrt{\mu}$. Однако уравнения (4) не изменяются и при замене y_1 на $y_1 + 2\pi$. Следовательно, мы перейдем от одного решения к другому, заменив y_1 на $y_1 + 2\pi$.

Отсюда вытекает следствие.

Если y_1 заменить на $y_1 + 2\pi$, то функции dS_{2n}/dy_1 с четным индексом не изменятся, а функции с нечетным индексом dS_{2n+1}/dy_1 изменят знак.

Однако поскольку производная dS_1/dy_1 обращается в нуль при $y_1 = y_1^0$ и при $y_1 = y_1^0 + 2\pi$ и входит в левую часть уравнений (4) в виде множи-

теля, производные

$$\frac{dS_2}{dy_1}, \quad \frac{dS_3}{dy_1}, \ldots$$

могут обращаться в бесконечность.

В самом деле это и происходит, если только постоянные C_4, ... не выбраны подходящим образом.

Однако указанный выбор постоянных можно произвести и так, что функции dS_p/dy_1 будут конечными при всех y_1.

Чтобы доказать это, рассмотрим уравнение

$$F\left(\frac{dS_1}{dy_1}, y_1\right) = C,$$

которое я перепишу в виде

$$F(x_1, y_1) = C.$$

Это уравнение, если x_1 и y_1 рассматривать как координаты некоторой точки, задает какую-то кривую. Необходимым условием существования у этой кривой двойной точки является одновременное обращение в нуль производных:

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dy_1} = 0.$$

Это условие можно также записать и в виде

$$\begin{aligned} &\frac{dF_0}{dx_1} + \mu \frac{dF_1}{dx_1} + \mu^2 \frac{dF_2}{dx_1} + \cdots = 0, \\ &\frac{dF_1}{dy_1} + \mu \frac{dF_2}{dy_1} + \mu^2 \frac{dF_3}{dy_1} + \cdots = 0, \end{aligned} \tag{5'}$$

ибо F_0 не зависит от y_1.

Разрешим уравнения (5′) относительно x_1 и y_1. При $\mu = 0$ находим

$$x_1 = x_1^0, \quad y_1 = y_1^0.$$

Функциональный определитель уравнений (5′) при $\mu = 0$, $x_1 = x_1^0$, $y_1 = y_1^0$ записывается в виде

$$\frac{d^2F_0}{dx_1^2} \cdot \frac{d^2F_1}{dy_1^2}$$

и, вообще говоря, отличен от нуля. Следовательно, уравнения (5′) можно разрешить относительно x_1 и y_1, причем x_1 и y_1 будут рядами, расположенными по степеням μ. Пусть

$$x_1 = \alpha, \quad y_1 = \beta$$

— полученные разложения. Очевидно, что функцию

$$F(\alpha, \beta)$$

можно разлагать по степеням μ. Пусть

$$F(\alpha,\ \beta) = C_0 + C_2\mu + C_4\mu^2 + \ldots \tag{6}$$

— такое разложение. Я утверждаю, что если в уравнениях (4) постоянным C_{2p} придать значения, получающиеся из разложения (6), то функции dS_p/dy_1 останутся конечными.

Чтобы убедиться в этом, положим

$$x_1 = \alpha + x', \quad y_1 = \beta + y',$$
$$F(x_1,y_1) = F(\alpha,\ \beta) + F'$$

и рассмотрим уравнение

$$F'(x',y') = 0.$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и уравнение (2). Следовательно, его можно рассматривать таким же образом, т. е. положить

$$x' = \frac{dS_0'}{dy'} + \sqrt{\mu}\,\frac{dS_1'}{dy'} + \cdots$$

и найти функции dS_p'/dy' из уравнений (4bis), аналогичных уравнениям (4) и отличающихся от последних лишь штрихованными символами *. Единственное отличие состоит в том, что на этот раз все константы C_p будут равны нулю и при $x' = y' = 0$ будем иметь

$$F' = \frac{dF'}{dx'} = \frac{dF'}{dy'} = 0.$$

Итак, если считать, что функция F' разложена по степеням x' и y', то это разложение начинается с членов второго порядка относительно x' и y', причем при любом μ. Разложения функций F_0', F_1',... также начинаются с членов второго порядка. Следовательно, если считать, что функции Ф, фигурирующие в правых частях уравнений (4bis), разложены в окрестности $y' = 0$ по степеням y' и dS_p'/dy', то разложения всегда начинаются с членов второго порядка.

Прежде всего видно, что dS_1'/dy' обращается в нуль при $y' = 0$. Следовательно, можно не опасаться, что dS_p'/dy' обращается в бесконечность при $y' = 0$. Более того, я утверждаю, что при этом значении y' производная dS_p'/dy' равна нулю.

В самом деле, предположим, что это верно для

$$\frac{dS_1'}{dy'},\quad \frac{dS_2'}{dy'},\quad \ldots,\quad \frac{dS_{p-1}'}{dy'}.$$

---

* Уравнения (4bis) явно не выписаны. (*Прим. ред.*).

Я утверждаю, что это в равной степени верно и для dS_p'/dy'.

Рассмотрим уравнение

$$F_0'' \frac{dS_1'}{dy'} \frac{dS_n'}{dy'} = \Phi,$$

где F_0'' означает вторую производную от F_0. Ф допускает разложение по степеням y', dS_1'/dy', ..., dS_{p-1}'/dy'. Поскольку $y' = 0$ является простым нулем для всех этих величин, а разложение функции Ф начинается с членов второго порядка, для функции Ф значение $y' = 0$ является двукратным нулем.

Для dS_1'/dy' это значение является простым нулем.

Следовательно, оно является простым нулем для dS_p'/dy', что и требовалось доказать.

Итак,

$$x' = \frac{dS'}{dy'},$$

$$S' = S_0' + \sqrt{\mu} S_1' + \mu S_2' + \ldots, \quad S_0' = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$x_1 = \alpha + \frac{dS'(y_1 - \beta)}{dy_1}. \tag{7}$$

$S'(y_1 - \beta)$ означает функцию S', в которой аргумент y' заменен на $y_1 - \beta$. Пусть

$$\alpha = \alpha_0 + \mu\alpha_1 + \mu^2\alpha_2 + \ldots,$$
$$\beta = \beta_0 + \mu\beta_1 + \mu^2\beta_2 + \ldots,$$
$$x_1 = \frac{dS_0}{dy_1} + \sqrt{\mu}\frac{dS_1}{dy_1} + \ldots$$

— разложения α, β и x_1. Приравнивая члены одинаковых порядков в правой и левой частях (7), получим

$$\frac{dS_0}{dy_1} = \alpha_0, \frac{dS_1}{dy_1} = \frac{dS_1'(y_1 - \beta)}{dy_1}, \quad \frac{dS_2}{dy_1} = \alpha_1 + \frac{dS_2'}{dy_1},$$

$$\frac{dS_3}{dy_1} = \frac{dS_3'}{dy_1} - \beta_1 \frac{d^2S_1'}{dy_1^2}, \quad \frac{dS_4}{dy_1} = \alpha_2 + \frac{dS_4'}{dy_1} - \beta_1 \frac{d^2S_2'}{dy_1^2}, \ldots. \tag{8}$$

В производных от S_p' величину y' следует заменить на $y_1 - \beta$.

Очевидно, что dS_p/dy_1 остаются конечными.

Коль скоро мы доказали, что константы C_p можно выбрать так, чтобы производные dS_p/dy_1 не обращались в бесконечность, выбор этих постоянных можно произвести, не обращаясь для этого к разложениям α и β.

Для этого достаточно воспользоваться уравнениями (4).
Рассмотрим одно из этих уравнений:

$$F_0'' \frac{dS_1}{dy_1} \frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \Phi + C_p.$$

Если p четно, возьмем

$$C_p = -\Phi(y_1^0),$$

а поскольку функция Φ периодическая с периодом 2π, получим

$$C_p = -\Phi(y_1^0 + 2\pi),$$

так что производная dS_{p-1}/dy_1 не обращается в бесконечность ни при $y_1 = y_1^0$, ни при $y_2 = y_1^0 + 2\pi$.

Если p нечетно, то необходимо выбрать $C_p = 0$ и условие

$$\Phi(y_1^0) = 0,$$

[которое влечет за собой условие

$$\Phi(y_1^0 + 2\pi) = 0,$$

ибо функция Φ меняет только знак, если y_1 возрастает на 2π] будет также выполнено.

Кроме того, отсюда следует, что производная dS_{p-1}/dy_1 никогда не обращается в бесконечность.

Отсюда же, наконец, следует, что dS_p/dy_1 можно разлагать по синусам и косинусам аргументов, кратных y_1, если p четно, и по синусам и косинусам нечетных кратных $y_1/2$, если p нечетно.

Я потому столь подробно останавливаюсь на почти очевидных вещах, что впоследствии мне придется рассматривать аналогичную, но более сложную задачу. Именно поэтому мне и хотелось бы особенно подчеркнуть эту аналогию.

201. Посмотрим теперь, как происходит переход от первого случая, когда

$$F_0'(x_1^0) \neq 0$$

и когда методы п. **125** оказываются применимыми, ко второму случаю, когда

$$F_0'(x_1^0) = 0.$$

Именно этот второй случай мы и намереваемся изучить подробно.

Прежде всего заметим, что величина $F_0'(x_1^0)$ представляет собой то, что в п. **125** и в остальных частях настоящего труда мы обозначали — n_1^0.

Поэтому, обозначив

$$\frac{dS}{dy_1} = \frac{dS_0}{dy_1} + \mu \frac{dS_1}{dy_1} + \mu^2 \frac{dS_2}{dy_1} + \ldots$$

мы получим ряд уравнений вида

$$n_1^0 \frac{dS_p}{dy_1} = \Phi + C_p. \tag{1}$$

Как я указывал в п. 125, величины C_p можно задавать произвольно. Я буду предполагать, что эти величины выбраны так, что среднее значение $\Phi + C_p$ равно нулю, и, следовательно, S_p есть периодическая функция от y_1.

Ясно, что в разложении производной dS_p/dy_1 в знаменатель могут входить различные степени n_1^0, так что если n_1^0 мало, то некоторые члены разложения dS_p/dy_1 могут становиться значительными. Поэтому важно прежде всего выявить ту максимальную степень, в которой n_1^0 может входить в знаменатели различных членов dS_p/dy_1.

Я утверждаю, что показатель этой наибольшей степени равен $2p - 1$.

В самом деле, функция S, с одной стороны, зависит от y_1, а с другой — от параметра μ и постоянной интегрирования x_1^0. Я не говорю уже о постоянных C_p, которые полностью определяются условием

$$F_0(x_1^0) = C_p$$

и тем, что среднее значение $[\Phi + C_p] = 0$.

Выберем в качестве постоянной интегрирования вместо x_1^0 величину n_1^0. Тогда S будет функцией, зависящей от y_1, μ и n_1^0. Разложим ее по степеням μ и n_1^0. Разложение будет содержать отрицательные степени n_1^0.

Уравнение

$$n_1^0 \frac{dS_1}{dy_1} = \Phi + C_1$$

показывает нам, что разложение производной dS_1/dy_1 по возрастающим степеням констант n_1^0 начинается с члена, содержащего $1/n_1^0$.

Перейдем к уравнению

$$n_1^0 \frac{dS_2}{dy_1} = \Phi + C_2.$$

Здесь Φ зависит от dS_1/dy_1, но поскольку Φ получается при замене в F переменной $x_1 = dS/dy_1$ разложением

$$\frac{dS_0}{dy_1} + \mu \frac{dS_1}{dy_1} + \ldots$$

и удержании в этом разложении членов, содержащих μ^2, ясно, что Φ может содержать dS_1/dy_1 в степени не выше второй, так как куб величины dS_1/dy_1 должен был бы иметь коэффициент μ^3 и, следовательно, не мог дать члена с μ^2.

Итак, разложение функции Φ, а следовательно, и разложение C_2, будет начинаться с члена

$$\left(\frac{1}{n_1^0}\right)^2 .$$

Разложение же dS_2/dy_1 начинается с члена

$$\left(\frac{1}{n_1^0}\right)^3 .$$

Закон, которому следуют первые члены разложений, очевиден: разложение производной dS_p/dy_1 начинается с члена

$$\left(\frac{1}{n_1^0}\right)^{2p-1} .$$

В самом деле, предположим, что это верно для

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \quad \frac{dS_2}{dy_1}, \ldots, \frac{dS_{p-1}}{dy_1} .$$

Я утверждаю, что это верно и для

$$\frac{dS_p}{dy_1} .$$

Рассмотрим уравнение

$$n_1^0 \frac{dS_p}{dy_1} = \Phi + C_p .$$

Φ является полиномом относительно

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \quad \frac{dS_2}{dy_1}, \ldots, \frac{dS_{p-1}}{dy_1} .$$

Рассмотрим какой-нибудь член u этого полинома и постараемся вычислить сумму индексов q различных множителей вида dS_q/dy_1, входящих в u. Этот член u получается из члена, содержащего коэффициент μ^p в разложении

$$F\left(\frac{dS_0}{dy_1} + \mu \frac{dS_1}{dy_1} + \ldots\right),$$

и поэтому эта сумма равна самое большее p. Кроме того, если эта сумма равна в точности p, то поскольку ни один из индексов q не равен p, рассматриваемый член u содержит по крайне мере два множителя.

Разложение u по степеням n_1^0 начинается с члена

$$\left(\frac{1}{n_1^0}\right)^{\Sigma(2q-1)}$$

Но

$$\Sigma q \leqslant p.$$

Если

$$\Sigma q < p,$$

то

$$\Sigma\,(2q-1) \leqslant 2p-2;$$

если

$$\Sigma q = p,$$

то по-прежнему

$$\Sigma(2q-1) \leqslant 2p-2,$$

ибо член u состоит по крайней мере из двух сомножителей.

Итак, разложение Ф, а следовательно, и разложение C_p начинается с члена

$$\left(\frac{1}{n_1^0}\right)^{2p-2},$$

а разложение dS_p/dy_1 начинается с члена

$$\left(\frac{1}{n_1^0}\right)^{2p-1},$$

что и требовалось доказать.

Однако n_1^0 — произвольная постоянная. Заменим ее каким-нибудь разложением:

$$n_1^0 = \alpha_0 + \mu\alpha_1 + \mu^2\alpha_2 + \ldots .$$

Тогда S можно разложить по положительным степеням μ и положительным и отрицательным степеням

$$\alpha_0 + \mu\alpha_1 + \mu^2\alpha_2 + \ldots.$$

Если коэффициент α_0 отличен от нуля, то положительные и отрицательные степени величины

$$\alpha_0 + \mu\alpha_1 + \mu^2\alpha_2 + \quad \ldots$$

можно в свою очередь разложить по положительным степеням μ, так что в результате окажется, что функцию S можно разлагать по положительным степеням μ.

В силу сказанного в п. 125 эти разложения будут такими же, как те, что мы получали исходя из уравнений (1), однако постоянные C_p будут иметь иные значения, чем те, которые мы придавали им выше.

Предположим теперь, что постоянная n_1^0 очень мала и заменим n_1^0 разложением вида

$$n_1^0 = \alpha_1 \sqrt{\mu} + \alpha_2 \mu + \alpha_3 \mu \sqrt{\mu} + \ldots . \tag{2}$$

На этот раз отрицательные степени величины

$$\alpha_1 \sqrt{\mu} + \alpha_2 \mu + \ldots$$

нельзя разлагать по положительным степеням $\sqrt{\mu}$, но

$$\frac{\mu^p}{(n_1^0)^{2p-1}}$$

будет разлагаться по положительным степеням $\sqrt{\mu}$, причем разложение будет начинаться с члена $\sqrt{\mu}$.

Если заметить теперь, что S, как мы только что видели, можно разложить по степеням

$$\frac{\mu}{n_1^0}, \quad \frac{\mu^2}{(n_1^0)^3}, \quad \frac{\mu^p}{(n_1^0)^{2p-1}}, \quad \mu, \quad n_1^0,$$

то мы придем к выводу, что S можно разложить по положительным степеням $\sqrt{\mu}$.

Полученные таким способом разложения не будут отличаться от тех, к которым мы пришли в предыдущем пункте с помощью уравнений (4), придавая постоянным C_p различные значения.

Во избежание недоразумений я буду обозначать через

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \ldots \tag{3}$$

то разложение, к которому приходим исходя из уравнений (1), причем как я уже говорил ранее, C_p в этом случае выбираем так, чтобы среднее значение $\Phi + C_p$ было равно нулю.

Временно я буду обозначать через

$$S = T_0 + \sqrt{\mu}\, T_1 + \mu T_2 + \mu \sqrt{\mu}\, T_3 + \ldots \tag{4}$$

разложение, получающееся при замене в (3) n_1^0 разложением (2), с упорядочением результата такой подстановки по степеням $\sqrt{\mu}$.

Что в этом случае представляют собой коэффициенты T_0, T_1, ... и т. д.?

Коэффициент T_0 получится, если в S_0 вместо постоянной n_1^0 подставить 0.

Коэффициент T_1 получают следующим образом. Укажем явно зависимость S от n_1^0, записав $S(n_1^0)$. Мы нашли, что

$$S_0(n_1^0) = x_1^0\, y_1,$$
$$S_0(0) = T_0.$$

Имеем

$$S_0(n_1^0) = S_0(\alpha_1\sqrt{\mu} + \alpha_2\mu + \ldots) = T_0 + \frac{dS_0}{dn_1^0}\sqrt{\mu}\,\alpha_1 + \ldots$$

или

$$S_0(n_1^0) = T_0 + \alpha_1\frac{dx_1^0}{dn_1^0}\,y_1\sqrt{\mu} + \ldots = T_0 - \frac{\alpha_1\sqrt{\mu}}{F_0''}\,y_1 + \ldots,$$

где F_0'' имеет тот же смысл, что и в уравнениях (4) п. 200.

С другой стороны, коэффициент T_1 содержит члены, получающиеся из S_1, S_2, ... Эти члены находят следующим образом.

Выберем в разложении (3) все члены вида

$$\frac{\mu^p}{(n_1^0)^{2p-1}}.$$

Пусть

$$S_1'\frac{\mu}{n_1^0} + S_2'\frac{\mu^2}{(n_1^0)^3} + S_3'\frac{\mu^3}{(n_1^0)^5} + \ldots \qquad (5)$$

— совокупность таких членов.

Тогда

$$T_1 = -\frac{\alpha_1 y_1}{F_0''} + \frac{S_1'}{\alpha_1} + \frac{S_2'}{\alpha_1^3} + \frac{S_3'}{\alpha_1^5} + \ldots.$$

Отсюда следует, что если в разложении (3) сгруппировать все члены, содержащие $\mu^p/(n_1^0)^{2p-1}$, т. е. все члены, входящие в разложение (5), и возвести в квадрат производную

$$\frac{dT_1}{dy_1} = -\frac{\alpha_1}{F_0''} + \frac{1}{\alpha_1}\frac{dS_1'}{dy_1} + \frac{1}{\alpha_1^3}\frac{dS_2'}{dy_1} + \ldots,$$

то квадрат ее будет состоять из двух членов

$$\left(\frac{dT_1}{dy_1}\right)^2 = \frac{\alpha_1^2}{F_0''^2} - \frac{2}{F_0''}\frac{dS_1'}{dy_1}.$$

Этот результат замечателен еще и тем, что, как мы вскоре увидим, он переносится на все уравнения динамики.

Чтобы найти T_2, необходимо принять во внимание не только S_0 и члены, содержащие

$$\frac{\mu^p}{(n_1^0)^{2p-1}},$$

но и члены, содержащие

$$\frac{\mu^p}{(n_1^0)^{2p-2}}, \ldots.$$

Итак, переход от случая, когда методы п. 125 применимы, к случаю, когда эти методы отказываются служить, происходит следующим образом. Если постоянная n_1^0 очень мала, то порядок величины члена разложения зависит не только от показателя степени μ, но и от показателя n_1^0. Если предположить, что постоянная n_1^0 того же порядка, что и $\sqrt{\mu}$, то совокупность членов, имеющих одинаковый порядок, выделяют, а затем их суммируют.

202. Все эти результаты допускают непосредственное перенесение на более общий случай, рассмотренный в начале п. 199.

Предположим прежде всего, что F зависит от x_1, x_2, ..., x_n и y_1. В этом случае мы должны рассмотреть уравнение

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, \ldots, \frac{dS}{dy_n}, y_1\right) = \text{const}. \tag{1}$$

Чтобы проинтегрировать его, мы придадим

$$\frac{dS}{dy_2}, \ldots, \frac{dS}{dy_n}$$

некоторые постоянные значения

$$x_2^0, \ldots, x_n^0$$

и таким образом получим уравнение

$$F\left(\frac{dS_1}{dy_1}, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1\right) = C$$

того же вида, что и уравнения, которыми мы занимались в двух предыдущих пунктах.

Однако на этот раз решение S содержит не одну произвольную постоянную x_1^0, а n произвольных постоянных x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0.

Если основное уравнение записать в виде

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, \ldots, \frac{dS}{dy_n}, m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n\right) = C, \tag{2}$$

то его нетрудно привести к виду (1). В самом деле, положим

$$\begin{aligned} &m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n = y_1', \\ &m_1^2 y_1 + m_2^2 y_2 + \ldots + m_n^2 y_n = y_2', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &m_1^n y_1 + m_2^n y_2 + \ldots + m_n^n y_n = y_n', \end{aligned} \tag{3}$$

где m_i^k — целые числа, выбранные так, чтобы определитель, составленный из коэффициентов уравнений (3), был равен 1. Это всегда возможно, если целые числа m_1, m_2, ..., m_n взаимно просты, что всегда можно предположить.

Тогда уравнение с частными производными (2) запишется в виде

$$F\left(\frac{dS}{dy_1'}, \frac{dS}{dy_2'}, \ldots, \frac{dS}{dy_n'}, y_1'\right) = C$$

и, таким образом, приведется к виду (1). Следовательно, все, что было сказано относительно уравнений вида (1), относится и к уравнениям вида (2).

Мы можем находить решения уравнения (2), которые подобно решениям уравнения (1) будут допускать разложения то по степеням μ, то по степеням $\sqrt{\mu}$.

При $\mu = 0$ функция S будет иметь вид

$$S = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 + \ldots + x_n^0 y_n.$$

Полный интеграл уравнения с частными производными (2) должен содержать n произвольных постоянных. В качестве произвольных постоянных можно взять x_1^0, x_2^0 ..., x_n^0 либо n_1^0, n_2^0, ..., n_n^0, положив

$$n_i^0 = -\frac{dF_0}{dx_i^0}.$$

Однако более удобно ввести бесконечно много произвольных постоянных, среди которых лишь n независимых. Этими константами будут

$$n_1^0, n_2^0, \ldots, n_n^0, \quad C_0, C_1, C_2, \ldots, C_p, \ldots,$$

если правую часть уравнения (2) приравнять

$$C = C_0 + C_1\mu + C_2\mu^2 + \ldots.$$

Если

$$m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 + \ldots + m_n n_n^0 \neq 0,$$

то S можно разложить по степеням μ, и наоборот, если

$$m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 + \ldots + m_n n_n^0 = 0,$$

то S можно разложить по степеням $\sqrt{\mu}$.

В частности, придав постоянным n_1^0, n_2^0, ..., n_n^0 некоторые значения, предположим, что постоянные C_p выбраны так, что

$$S - n_1^0 y_1 - n_2^0 y_2 - \ldots - n_n^0 y_n$$

периодически зависит от y. Мы получим разложение, соответствующее тому, из которого в начале п. 20 были выведены уравнения (1).

В этом разложении в знаменатель входят различные степени

$$m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 + \ldots + m_n n_n^0.$$

Затем постоянные интегрирования n_i^0 заменим различными разложениями по степеням $\sqrt{\mu}$.

Пусть, например,

$$n_i^0 = \alpha_i^0 + \sqrt{\mu}\,\alpha_i^1 + \mu\alpha_i^2 + \ldots.$$

Я предполагаю, что

$$m_1 \alpha_1^0 + m_2 \alpha_2^0 + \ldots + m_n \alpha_n^0 = 0.$$

Отсюда следует, что разложение величины

$$m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 + \ldots + m_n n_n^0$$

начинается с члена, содержащего $\sqrt{\mu}$.

Если затем мы расположим члены S по положительным возрастающим степеням $\sqrt{\mu}$, то получим различные разложения, аналогичные разложениям, подробно изученным нами в п. 201.

203. После этого нетрудно понять существо метода Делоне.

Обратимся к общему случаю уравнений динамики и предположим, следовательно, что наша функция

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots$$

зависит не от суммы $m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n$, а от каждого из n аргументов y_1, y_2, ..., y_n и, кроме того, периодична по этим аргументам.

Если все линейные комбинации с целыми коэффициентами

$$m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 + \ldots + m_n n_n^0$$

достаточно велики, то методы п. 125 можно применять без особого труда. Но если хоть одна из этих линейных комбинаций очень мала, то в F особую роль будут играть члены, зависящие от аргумента

$$m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n.$$

Предполагается, что F разложена в тригонометрический ряд, т. е. в последовательность членов, каждый из которых равен произведению

$$\cos(p_1y_1 + p_2y_2 + \ldots + p_ny_n)$$

или

$$\sin(p_1y_1 + p_2y_2 + \ldots + p_ny_n)$$

(p — целые числа) на некоторый коэффициент, зависящий от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Рассмотрим совокупность указанных членов, таких, что

$$\frac{p_1}{m_1} = \frac{p_2}{m_2} = \ldots = \frac{p_n}{m_n}.$$

Пусть

$$F' = F_0' + \mu F_1' + \ldots$$

— совокупность этих членов.

В частности, эта совокупность включает в себя все члены F, не зависящие от $y_1, y_2, \ldots, y_n$, например, все члены F_0, так что

$$F_0' = F_0.$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$F'\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, \ldots, \frac{dS}{dy_n}, m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n\right) = C.$$

Его нетрудно проинтегрировать с помощью методов, изложенных в первых пунктах настоящей главы.

Пусть

$$S = x_1'y_1 + x_2'y_2 + \ldots + x_n'y_n + S'$$

— одно из решений этого уравнения. Коэффициенты $x_1', x_2', x_n', \ldots, x_n'$ являются постоянными интегрирования, которые я обозначал ранее через x_i^0, но теперь обозначу символом x_i', поскольку вскоре мне понадобится выбрать их в качестве новых независимых переменных.

Что же касается S', то эта величина представляет собой периодическую функцию от

$$m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n,$$

зависящую, кроме того, от x_1', x_2', ..., x_n', так что среднее значение dS/dy_i является не чем иным, как x_i', а выписанное выше выражение для S не отличается от выражения для S, вытекающего из уравнений (1) п. 202.

Положим теперь

$$x_i' = \frac{dS}{dy_i}, \qquad y_i' = \frac{dS}{dx_i'}.$$

Возьмем в качестве новых переменных x_i' и y_i'. Канонический вид уравнений не изменится; прежний вид сохранит и функция F, выраженная через x_i' и y_i'. Лишь коэффициенты членов, содержащих

$$m_1 y_1' + m_2 y_2' + \ldots + m_n y_n',$$

будут гораздо меньше коэффициентов соответствующих членов, зависящих от

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n.$$

Долгопериодические неравенства исчезнут, так как в конечном счете они будут учтены начиная с первого приближения.

Метод Болина

204. Недостаток метода Делоне состоит в том, что он требует большого числа замен переменных. Однако это неудобство можно обойти с помощью метода, открытого Болином. Я со своей стороны также предложил этот метод, но несколькими днями позже.

Возвратимся к нашим общим уравнениям

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \tag{1}$$

и предположим, что выражение

$$m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 + \ldots + m_n n_n^0$$

очень мало.

Задача состоит в том, чтобы проинтегрировать уравнение

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, \ldots, \frac{dS}{dy_n}, y_1, y_2, \ldots, y_n\right) = C. \tag{2}$$

Положим

$$S = S_0 + S_1\sqrt{\mu} + S_2\mu + S_3\mu\sqrt{\mu} + \ldots,$$
$$C = C_0 + C_2\mu + C_4\mu^2 + \ldots.$$

Подставим эти выражения в уравнение (2), расположим получившееся разложение по степеням $\sqrt{\mu}$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\mu}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&F_0\left(\frac{dS_0}{dy_1}, \frac{dS_0}{dy_2}, \ldots, \frac{dS_0}{dy_n}\right) = C_0,\\
&\sum \frac{dF_0}{dx_i}\frac{dS_1}{dy_i} = 0,\\
&\sum \frac{dF_0}{dx_i}\frac{dS_2}{dy_i} + \frac{1}{2}\sum \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\frac{dS_1}{dy_i}\frac{dS_1}{dy_k} = \Phi + C_2, \qquad (3)\\
&\sum \frac{dF_0}{dx_i}\frac{dS_3}{dy_i} + \frac{1}{2}\sum \frac{d^2F_0}{dx_i dx_k}\frac{dS_1}{dy_i}\frac{dS_2}{dy_k} = \Phi,\\
&\sum \frac{dF_0}{dx_i}\frac{dS_4}{dy_i} + \frac{1}{2}\sum \frac{d^2F_0}{dx_i dx_k}\frac{dS_1}{dy_i}\frac{dS_3}{dy_k} = \Phi + C_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Эти уравнения имеют следующий смысл.

Символом Ф я по-прежнему обозначаю всякую известную функцию. Я предполагаю, что в третьем уравнении (3) известна S_0, в четвертом — S_0 и S_1, в пятом — S_0, S_1 и S_2. Правые части этих уравнений содержат то Ф, то $\Phi + C_{2p}$, поскольку я предположил, что константы C нечетного индекса, т. е. коэффициенты при нечетных степенях $\sqrt{\mu}$ в разложении C, равны нулю.

Кроме того, необходимо еще уточнить смысл знака Σ во втором члене левой части уравнений (3). Этот знак означает суммирование по двум индексам: i и k. Следует условиться о том, что в третьем уравнении (3) каждая пара (i, k) входит дважды, если $i \neq k$, и только один раз, если $i=k$, и что в остальных уравнениях (3) такая пара встречается дважды при любых значениях i и k.

Как и прежде, я предполагаю, что

$$\frac{dS_0}{dy_i} = x_i^0,$$

где x_i^0 — постоянные. Я предполагаю, что в тех производных от F_0, которые фигурируют в уравнениях (3), величины x_i заменены величинами x_i^0, так что

$$\frac{dF_0}{dx_i} = -n_i^0.$$

Кроме того, я предполагаю, что x_i^0 выбраны так, что

$$\sum m_i n_i^0 = 0 \qquad (4)$$

и что между n_i^0 не существует никаких других линейных комбинаций с целыми коэффициентами.

Поставим перед собой задачу найти S так, чтобы производная

$$\frac{dS_p}{dy_i}$$

была периодической функций от y_i.

Первое уравнение (3) попросту определяет C_0. Второе уравнение записывается в виде

$$\sum n_i^0 \frac{dS_1}{dy_i} = 0. \tag{5}$$

Оно может выполняться, лишь если производные dS_1/dy_i зависят только от $m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n$, ибо если бы S_1 содержала, например, член

$$A\cos(p_1y_1 + \ldots + p_ny_n),$$

то левая часть уравнения (5) содержала бы член

$$-A(p_1n_1^0 + \ldots + p_nn_n^0)\sin(p_1y_1 + \ldots + p_ny_n),$$

который мог исчезнуть лишь при условии

$$\frac{p_1}{m_1} = \frac{p_2}{m_2} = \ldots = \frac{p_n}{m_n}.$$

Следовательно,

$$S_1 = \alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \ldots + \alpha_ny_n + f(m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n),$$

причем производная от f периодическая.

Перейдем к третьему уравнению (3) и приравняем в левой и правой частях этого уравнения члены, зависящие от синуса и косинуса дуг, кратных

$$m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n.$$

Первый член в левой части, который можно записать в виде

$$-\sum n_i^0 \frac{dS_2}{dy_i},$$

не содержит членов нужного вида, ибо если бы функция S содержала член

$$A\cos(p_1y_1 + \ldots + p_ny_n),$$

где

$$\frac{p_1}{m_1} = \frac{p_2}{m_2} = \ldots = \frac{p_n}{m_n},$$

то соответствующий член выражения

$$-\sum n_i^0 \frac{dS_2}{dy_i}$$

можно было записать в виде

$$\sum A\,(p_1 n_1^0 + \ldots + p_n n_n^0)\sin(p_1 y_1 + \ldots + p_n y_n).$$

В силу соотношения (5) этот член обратился бы в нуль.

Наоборот, второй член левой части зависит лишь от S_1 и является функцией лишь от $m_1 y_1 + \ldots + m_n y_n$. Следовательно, все эти члены содержат лишь синусы и косинусы дуг, кратных

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n.$$

Введем новое обозначение.

Пусть U—произвольная функция, производные которой dU/dy_i периодичны по y_i. Тогда ее можно представить в виде ряда, все члены которого имеют следующий вид:

$$\alpha_i y_i,\quad \alpha\cos(p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_n y_n),$$
$$\alpha\sin(p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_n y_n).$$

В этом ряду вычеркнем все тригонометрические члены, за исключением тех, для которых

$$\frac{p_1}{m_1} = \frac{p_2}{m_2} = \ldots = \frac{p_n}{m_n}.$$

Совокупность оставшихся членов можно обозначить $[U]$ и назвать средним значением функции U.

Тогда

$$\left[\frac{dU}{dy_i}\right] = \frac{d[U]}{dy_i};\qquad \sum n_i^0 \frac{d[U]}{dy_i} = \text{const}$$

и если V — некоторая периодическая функция, то

$$\left[[V]\frac{dU}{dy_i}\right] = [V]\left[\frac{dU}{dy_i}\right].$$

Следовательно, мы получаем

$$-\left[\sum n_i^0 \frac{dS_2}{dy_i}\right] = \text{const},$$
$$\left[\frac{dS_1}{dy_i}\frac{dS_1}{dy_k}\right] = \frac{dS_1}{dy_i}\frac{dS_1}{dy_k},\qquad (6)$$
$$[\Phi] = -[F_1].$$

Я предполагаю, что в функции F переменные x_i заменены на x_i^0 и что функция Ф, входящая в третье уравнение (6), та же, что и в третьем уравнении (3).

Постоянную в правой части первого уравнения (6) можно обозначить $C_2 - C_2'$.

Тогда, приравнивая средние значения правой и левой части третьего уравнения (3), получим

$$\frac{1}{2}\sum \frac{d^2F_0}{dx_i dx_k}\frac{dS_1}{dy_i}\frac{dS_1}{dy_k} = C_2' - [F_1]. \tag{7}$$

Это уравнение имеет такой же вид, как и уравнения, изучением которых мы занимались в пунктах 199—202 и, в частности, такой же вид, как второе уравнение (4) из п. 200. Поэтому так же, как и при рассмотрении второго уравнения (4), мы приходим к трем различным случаям.

Напомним, что функция S_1 имеет вид

$$S_1 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n + f(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n),$$

откуда

$$\frac{dS_1}{dy_i} = \alpha_i + m_i f'.$$

Подставим это значение dS_1/dy_i в (7). Уравнение (7) превратится в квадратное уравнение относительно f', и мы сможем записать его в виде

$$Af'^2 + 2Bf' + D = C_2' - [F_1], \tag{8}$$

где A, B и D — постоянные, зависящие от констант α_i. Последние можно выбирать произвольно.

Чтобы f' и, следовательно, dS_1/dy_i была периодической функцией относительно $m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n$, необходимо и достаточно, чтобы корни уравнения (8) всегда были вещественными, т. е. чтобы неравенство

$$B^2 + AD + AC_2' - A[F_1] > 0$$

выполнялось при всех значениях

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n.$$

Поскольку постоянные α_i произвольны, выберем их так:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0. \tag{9}$$

Как мы сейчас убедимся, при этом мы ничуть не уменьшаем общности.

Того же результата можно достичь, предположив, что

$$\frac{\alpha_1}{m_1} = \frac{\alpha_2}{m_2} = \ldots = \frac{\alpha_n}{m_n},$$

ибо если это условие выполнено, то выражение

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n$$

становится функцией только от $m_1 y_1 + \ldots + m_n y_n$, которая может входить под знак функции f.

Как бы там ни было, если предположить, что условия (9) выполнены, уравнение (8) упрощается и его можно записать в виде

$$Af'^2 = C_2' - [F_1]. \tag{8bis}$$

Предположим теперь, что при различных значениях постоянной C_2' мы построим кривые, выбрав в качестве радиуса-вектора f' + некоторая постоянная, а в качестве полярного угла

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n.$$

Мы получим при этом фигуру, полностью аналогичную изображенной на рис. 8.

Предположим для ясности, что коэффициент A положителен. Тогда для того чтобы функция f' была периодической, необходимо, чтобы коэффициент A всегда был вещественным, т. е. чтобы постоянная C_2' была больше, чем максимум $[F_1]$.

В этом случае f' и, следовательно, dS_1/dy_i будет периодической функцией от $m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n$, которая никогда не обращается в нуль.

После того как S_1 найдена, речь пойдет об отыскании S_2. Эта функция должна иметь вид

$$\alpha_1^2 y_1 + \alpha_2^2 y_2 + \ldots + \alpha_n^2 y_n + \varphi,$$

где φ — периодическая функция. В общем случае S_p также должна иметь вид

$$\alpha_1^p y_1 + \alpha_2^p y_2 + \ldots + \alpha_n^p y_p + \varphi,$$

где φ периодическая. Для простоты я буду предполагать, что

$$\frac{\alpha_1^p}{m_1} = \frac{\alpha_2^p}{m_2} = \ldots = \frac{\alpha_n^p}{m_n}. \tag{10}$$

Как мы только что видели, это не ограничивает общности.

Имеем

$$-\left[\sum n_i^0 \frac{dS_p}{dy_i}\right] = C_p' - C_p.$$

Это уравнение аналогично первому из уравнений (6). Если условия (10) выполнены, то $C_p' = C_p$ и, в частности, $C_2' = C_2$.

Установив это, вернемся вновь к третьему уравнению (3), которое теперь, когда постоянная C_2 нам задана, а функция S_1 полностью определена, можно записать в виде

$$\sum n_i^0 \frac{dS_2}{dy_i} = \Phi. \tag{11}$$

Известная функция Φ периодична по $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Пусть

$$\Phi = \sum A \cos (p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_n y_n + \beta).$$

Из уравнения (11) получим

$$S_2 = \sum \frac{A \sin (p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_n y_n + \beta)}{p_1 n_1^0 + p_2 n_2^0 + \ldots + p_n n_n^0} + \psi (m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n),$$

где ψ — произвольная функция от $m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n$.

Это решение теряет смысл, если для какого-нибудь члена разложения

$$p_1 n_1^0 + p_2 n_2^0 + \ldots + p_n n_n^0 = 0,$$

т. е. если

$$\frac{p_1}{m_1} = \frac{p_2}{m_2} = \ldots = \frac{p_n}{m_n}.$$

Однако это не может произойти, ибо

$$[\Phi] = 0.$$

В самом деле, мы только что полностью определили S_1, причем сделали это так, что средние значения обеих частей третьего уравнения (3) равны. Следовательно, это должно быть справедливо и для обеих частей уравнения (11), отличающегося от уравнения (3) лишь тем, что некоторые его члены перенесены из одной части в другую.

Но

$$\left[\sum n_i^0 \frac{dS_2}{dy_i}\right] = 0,$$

поскольку

$$C_2' = C_2.$$

Следовательно,

$$[\Phi] = 0,$$

что и требовалось доказать.

Чтобы функция S_2 была полностью известна, нам осталось еще найти произвольную функцию

$$\psi = [S_2].$$

Для этого приравняем средние значения обеих частей четвертого уравнения (3). В силу соотношений (10) получим

$$\left[\sum n_i^0 \frac{dS_3}{dy_i}\right] = 0$$

и, кроме того,

$$\left[\frac{d^2F_0}{dx_i dx_k}\frac{dS_1}{dy_i}\frac{dS_2}{dy_k}\right] = \frac{d^2F_0}{dx_i dx_k}\frac{dS_1}{dy_i}\frac{d[S_2]}{dy_k},$$

поскольку S_1 зависит лишь от $m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\sum \frac{d^2F_0}{dx_i dx_k}\frac{dS_1}{dy_i}\frac{d[S_2]}{dy_k} = [\Phi].$$

Если обозначить через $[S_2']$ производную от $[S_2]$ по

$$m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n,$$

то

$$\frac{dS_1}{dy_i} = m_i f', \qquad \frac{d[S_2]}{dy_k} = m_k [S_2']$$

и мы можем записать

$$\frac{1}{2}\sum \frac{d^2\Phi_0}{dx_i dx_k} m_i m_k [S_2'] = \frac{[\Phi]}{f'}.$$

Поскольку функция f' не обращается в нуль, $[S_2']$ — периодическая функция от $m_1y_1 + \ldots + m_ny_n$, не обращающаяся в бесконечность, и $[S_2]$ имеет вид

$$a(m_1y_1 + \ldots + m_ny_n) + \psi,$$

где a — некоторый постоянный коэффициент, а ψ — ряд, расположенный по синусам и косинусам дуг, кратных $m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n$.

Таким образом, S_2 полностью определена. Четвертое уравнение (3) записывается в виде

$$\sum n_i^0 \frac{dS_3}{dy_i} = \Phi.$$

Оно имеет вид, полностью аналогичный виду уравнения (11), и решается таким же способом. Так же рассматриваются и остальные уравнения.

Я утверждал несколько выше, что предположения (9) и (10) не уменьшают общности.

В самом деле, рассмотрим какое-нибудь решение нашего фундаментального уравнения, согласующееся с предположениями (9) и (10). Пусть S — такое решение и пусть

$$S = S_0 + \sqrt{\mu}\, S_1 + \mu S_2 + \ldots.$$

С другой стороны, пусть

$$S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 + \ldots + x_n^0 y_n$$

и

$$S_p = \alpha_1^p y_1 + \alpha_2^p y_2 + \ldots + \alpha_n^p y_p + \text{периодическая функция}.$$

Коэффициенты α в силу предположений (9) и (10) удовлетворяют условию

$$\frac{\alpha_1^p}{m_1} = \frac{\alpha_2^p}{m_2} = \ldots = \frac{\alpha_n^p}{m_n}$$

и, кроме того, зависят от постоянных интегрирования x_i^0 и C_p.

Поскольку постоянные x_i^0 произвольны, я могу заменить их какими-нибудь разложениями

$$x_i^0 = \beta_i^0 + \sqrt{\mu}\,\beta_i^1 + \mu\beta_i^2 + \ldots,$$

где β_i^p — новые произвольные постоянные.

Если в функции S мы заменим постоянные x_i^0 такими разложениями, а затем расположим результат по степеням $\sqrt{\mu}$, то

$$S = S_0' + \sqrt{\mu}\,S_1' + \mu S_2' + \ldots,$$

где

$$S_p = \alpha_1'^p y_1 + \alpha_2'^p y_2 + \ldots + \alpha_n'^p y_n + \text{периодическая функция}.$$

Постоянные же β_i^p мы можем выбрать так, чтобы постоянные имели *какое угодно* значение.

Следовательно, наши предположения не приводят ни к каким существенным ограничениям общности, что и требовалось доказать.

Случай либрации

205. Что произойдет, если постоянная C_2 не будет превышать максимум $|F_1|$, и, следовательно, если функция S_1 не будет всегда вещественной? В этом случае, о котором говорят, что происходит либрация, возникают некоторые трудности. Их можно преодолеть с помощью искусственного приема, аналогичного тому, применяя который в п. 199, мы воспользовались эллиптическими функциями. Чтобы немного упростить изложение, я буду предполагать, что

$$m_1 = 1, \quad m_2 = m_3 = \ldots = m_n = 0.$$

Я имею право поступать таким образом, ибо если бы величины имели иные значения, я мог бы произвести замену переменных, аналогичную замене (3) из п. 202.

Мы не можем более делать так, чтобы производные dS_p/dy_i были периодическими функциями от $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, но мы можем по крайней мере попытаться найти такую функцию S, чтобы производные dS_p/dy_i были периодическими функциями $y_2, \ldots, y_n$.

Тогда то, что мы в п. 204 обозначали символом $[U]$, представляет собой не что иное, как среднее значение функции U, рассматриваемой как периодическая функция $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Следовательно,

$$\left[\sum n_i^0 \frac{dS_p}{dy_i}\right] = \text{const.} \tag{12}$$

В самом деле,

$$\left[\frac{dS_p}{dy_2}\right], \quad \left[\frac{dS_p}{dy_3}\right], \quad \ldots, \quad \left[\frac{dS_p}{dy_n}\right]$$

равны каким-то постоянным, а с другой стороны, соотношение

$$\Sigma m_i n_i^0 = 0$$

в данном случае сводится просто к

$$n_1^0 = 0,$$

так что левая часть уравнения (12) не содержит члена $[dS_p/dy_1]$.

Я мог бы предположить, что не только производные dS_p/dy_i, но и функции S_p (по крайней мере, при $p > 0$) являются периодическими функциями от $y_2, y_3, \ldots, y_n$. Это предположение совпадает с предположениями (9) и (10) предыдущего пункта, которые, как мы видели, не уменьшают общности. Если принять такое предположение, то постоянная в правой части уравнения (12) будет равна нулю.

Установив это, обратимся к уравнениям (3) предыдущего пункта. Из второго уравнения мы узнаем, что S_1 зависит лишь от y_1, а третье уравнение после того, как мы приравняем средние значения обеих его частей, дает

$$\frac{1}{2}\frac{d^2F_0}{dx_1^2}\left(\frac{dS_1}{dy_1}\right)^2 = C_2 - [F_1], \tag{13}$$

откуда и находим S_1.

Учитывая уравнение (13), третье уравнение (3) можно записать в виде

$$-\sum n_i^0 \frac{dS_2}{dy_i} = [F_1] - F_1. \tag{14}$$

Поскольку правая часть зависит от $y_2, y_3, \ldots, y_n$, причем среднее значение ее равно нулю, применение метода интегрирования, которым мы

уже неоднократно пользовались, позволяет нам получить S_2 с точностью до произвольной функции от y_1, т. е. уравнение (14) позволяет найти

$$S_2 - [S_2].$$

Чтобы найти $[S_2]$, рассмотрим четвертое уравнение (3) и приравняем средние значения его правой и левой части. Получим

$$\frac{d^2F_0}{dx_1^2}\frac{d[S_2]}{dy_1}\frac{dS_1}{dy_1} = [\Phi]. \tag{15}$$

Отсюда находим значение $[S_2]$.

Зная S_2 и учитывая (15), можем записать четвертое уравнение (3) в виде

$$-\sum n_i^0 \frac{dS_3}{dy_i} = \Phi.$$

Среднее значение Φ равно нулю. Поэтому это уравнение, имеющее тот же вид, что и уравнение (14), решается так же, и мы получим

$$S_3 - [S_3]$$

и т. д.

Ясно, что найденные таким образом функции dS_p/dy_i однозначно зависят от y_1 и $\sqrt{C_2 - [F_1]}$.

206. Для более подробного исследования наших функций необходимо произвести замену переменных. Для этого введем вспомогательную функцию T, определяемую следующим образом:

$$T = T_0 + T_1\sqrt{\mu} + T_2\mu,$$
$$T_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 + \ldots + x_n^0 y_n,$$

где x_i^0 — постоянные, удовлетворяющие условиям

$$F_0 = C_0, \qquad n_1^0 = 0.$$

Иначе говоря, T_0 есть не что иное, как величина, которую мы обозначали S_0.

Чтобы найти T_1, мы исходим из того же уравнения, которым пользовались для определения S_1, т. е. уравнения (7) п. 204. Заменим в этом уравнении S_1 на T_1, C_2' на C_2 и получим

$$\frac{1}{2}\sum \frac{d^2F_0}{dx_i^0\,dx_k^0}\frac{dT_1}{dy_i}\frac{dT_1}{dy_k} = C_2 - [F_1]. \tag{7bis}$$

К этому уравнению еще добавим

$$\frac{dT_1}{dy_i} = x_i' \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

(x_i' — постоянные). Важно заметить, что делая последнее предположение, я определяю T_1 так же, как ранее определял S_1, но при этом отбрасываю предположения (9), в силу которых постоянные x_i' должны были равняться нулю.

Поскольку коэффициенты $d^2F_0/dx_i^0 dx_k^0$ зависят лишь от x_i^0, они являются постоянными. Следовательно, если заменить dT_1/dy_i постоянными x_i', то уравнение (7bis) примет вид

$$A\left(\frac{dT_1}{dy_1}\right)^2 + 2B\frac{dT_1}{dy_1} + D = C_2 - [F_1], \tag{8ter}$$

где A — некоторая постоянная, B и D — два однородных полинома относительно x_i', первый — первой степени, второй — второй. Отсюда находим

$$\frac{dT_1}{dy_1} = -\frac{B}{A} \pm \sqrt{\frac{B^2}{A^2} - \frac{D}{A} + \frac{C_2}{A} - \frac{[F_1]}{A}}.$$

Я введу обозначения

$$\frac{B^2}{A^2} - \frac{D}{A} + \frac{C_2}{A} = x_1'$$

и для сокращения записи

$$[F_1] = A\psi,$$

откуда

$$T_1 = x_2'y_2 + x_3'y_3 + \ldots + x_n'y_n - \frac{By_1}{A} + \int dy_1 \sqrt{x_1' - \psi}.$$

Затем из уравнения

$$\sum n_i^0 \frac{dT_2}{dy_i} = F_1 - [F_1],$$

аналогичного уравнению (11) п. 204, находим T_2.

Это уравнение, как мы уже видели, определяет T_2 с точностью до произвольной функции от y_1. Поэтому мы можем выбрать эту функцию как угодно, например так, чтобы

$$[T_2] = 0.$$

Я положу

$$\Sigma n_i^0 x_i' = -C_1.$$

Отсюда следует:

1. T_2 является периодической функцией y_1', не зависящей от x_i', ибо этими свойствами обладают F_1 и $[F_1]$, в которых по предположению x_i заменены на константы x_i^0.

2. Если в левой части уравнения (2) из п. 204 заменить S на T, то левая часть запишется в виде

$$C_0 + C_1\sqrt{\mu} + C_2\mu$$

с точностью до членов, содержащих множитель $\mu\sqrt{\mu}$, ибо функции T_0, T_1 и T_2 удовлетворяют трем первым уравнениям (3), *если только нуль в правой части второго из этих уравнений заменить на* C_1.

Положим теперь

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{dT}{dy_1} = x_1^0 + \sqrt{\mu}\left(-\frac{B}{A} + \sqrt{x_1' - \psi}\right) + \mu\frac{dT_2}{dy_1}, \\
y_1' &= \frac{dT}{dx_1'} = \frac{\sqrt{\mu}}{2}\int\frac{dy_1}{\sqrt{x_1' - \psi}}, \\
x_i &= \frac{dT}{dy_i} = x_i^0 + x_i'\sqrt{\mu} + \mu\frac{dT_2}{dy_i}, \\
y_i' &= \frac{dT}{dx_i'} = y_i\sqrt{\mu} - \frac{y_1\sqrt{\mu}}{A}\frac{dB}{dx_i'} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n).
\end{aligned} \tag{16}$$

Если в качестве новых переменных вместо x_i и y_i принять x_i' и y_i', то канонический вид уравнений не изменится.

Рассмотрим прежде всего второе уравнение (16), в которое входят y_1', y_1 и x_1'. Я утверждаю, что если x_1' считать постоянной и изменять только y_1', то y_1 будет периодической функцией от y_1'.

Именно в этом месте проявляется аналогия с применением эллиптических функций в п. 199. В том частном случае, который был там рассмотрен,

$$A = 1, \quad [F_1] = \cos y_1,$$

так что второе уравнение (16) записалось бы в виде

$$y_1' = \frac{\sqrt{\mu}}{2}\int\frac{dy_1}{\sqrt{C_2 - \cos y_1}}.$$

Интеграл в правой части является эллиптическим интегралом и, следовательно, $\cos y_1$ и $\sin y_1$ представляют собой двоякопериодические функции от y_1'. Следует различать два случая, в зависимости от того,

$$C_2 > 1 \text{ или же } C_2 < 1.$$

Если $C_2 > 1$, то вещественный период равен

$$\frac{\sqrt{\mu}}{2}\int_0^{2\pi}\frac{dy_1}{\sqrt{C_2-\cos y_1}},$$

а если

$$C_2 = \cos\alpha < 1,$$

то вещественный период равен

$$\sqrt{\mu}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{dy_1}{\sqrt{C_2-\cos y_1}}.$$

Кроме того, в этом частном случае y_1 представляет собой однозначную функцию от y_1' как при мнимых, так и при вещественных значениях y_1'. Однако в общем случае y_1' является однозначной функцией от y_1' только при вещественных значениях y_1', а с другой стороны, $\cos y_1$ и $\sin y_1$ обладают вещественным периодом, равным

$$\frac{\sqrt{\mu}}{2}\int_0^{2\pi}\frac{dy_1}{\sqrt{x_1'-\psi}},$$

если x_1' больше, чем максимум $[\psi]$, и

$$\sqrt{\mu}\int_\alpha^\beta\frac{dy_1}{\sqrt{x_1'-\psi}},$$

если x_1' меньше этого максимума и если разность $x_1' - \psi$ обращается в нуль при $y_1 = \alpha$ и $y_1 = \beta$ и остается положительной при $\alpha < y_1 < \beta$. Добавлю, что в первом случае y_1 получает приращение, равное 2π, если y_1' увеличивается на один период, в то время как во втором случае, т. е. в случае либрации, y_1 принимает свое исходное значение, если y_1' получает приращение, равное периоду.

В частном случае, рассмотренном в п. 199, двоякопериодическими функциями y_1' являются не только $\cos y_1$ и $\sin y_1$, но и $\sqrt{C_2-\cos y_1}$. Что же касается

$$S_1 = \int\sqrt{C_2-\cos y_1}\,dy_1,$$

то эта функция возрастает на одну и ту же постоянную величину, когда y_1' получает приращение, равное периоду.

Точно так же, в общем случае $\sqrt{x_1'-\psi}$ (следовательно, и dT_1/dy_1) оказывается периодической функцией от y_1'. Эта функция так же, как и

y_1, зависит помимо прочих аргументов от x_1', играющего роль, аналогичную модулю в случае эллиптических функций.

Заметим, прежде чем переходить к дальнейшему, что период этих различных периодических функций от y_i пропорционален $\sqrt{\mu}$.

Отсюда следует, что в случае либрации x_1, x_i, y_1 и $y_j - y_i\sqrt{\mu}$ оказываются периодическими функциями y_1'. Кроме того, x_1 и y_1 зависят от y_i, от этих $n-1$ переменной они являются периодическими функциями с периодом 2π.

Следовательно, если старые переменные x_i и y_i выразить через новые переменные x_i' и y_i', то станет ясно, что x_i, $\cos y_i$ и $\sin y_i$ будут периодическими функциями от y_i'. Поэтому периодической функцией от y_i будет и F, которая периодична с периодом 2π относительно y_i.

Период будет равен

$$\sqrt{\mu}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dy_1}{\sqrt{x_1'-\psi}}$$

по y_1' и $2\pi\sqrt{\mu}$ — по y_i'. Для краткости период относительно y_1' я буду обозначать через $P\sqrt{\mu}$. Ясно, что P зависит от x_i' аналогично тому, как период эллиптических функций зависит от модуля, и является функцией модуля.

Если ввести обозначение

$$y_i' = z_i\sqrt{\mu},$$

откуда

$$z_1 = \frac{1}{2}\int\frac{dy_1}{\sqrt{x_1'-\psi}}, \qquad z_i = y_i - \frac{y_1}{A}\frac{dB}{dx_i'}, \tag{16 bis}$$

то F будет периодической функцией от z_i; период ее относительно z_1 равен P, а относительно остальных z_i равен 2π. Кроме того, F будет зависеть от x_i'. F, выраженную как функцию от x_i', можно разлагать по степеням $\sqrt{\mu}$. Первые три члена разложения

$$C_0 + C_1\sqrt{\mu} + C_2\mu$$

не зависят от z_i, а являются функциями одних лишь x_i'. Первое слагаемое C_0 представляет собой абсолютную постоянную; C_1 по определению есть линейная функция от x_i', не зависящая от x_1'. Наконец,

$$C_2 = Ax_1' + D - \frac{B^2}{A},$$

откуда следует, что C_2 представляет собой полином первого порядка относительно остальных x_i'.

Положим теперь

$$F = C_0 + F^* \sqrt{\mu}.$$

Тогда уравнения запишутся в виде

$$\frac{dx_i'}{dt} = \frac{dF^*}{dz_i}, \qquad \frac{dz_i}{dt} = -\frac{dF^*}{dx_1'}. \tag{17}$$

Функция F^* так же, как и функция F в п. 125, периодически зависит от переменных второго ряда, которыми в нашем случае являются z_i.

Тем не менее существуют два обстоятельства, препятствующие непосредственному применению методов п. 125 к уравнениям (17).

1. Хотя функция F^* периодична относительно z_i, однако относительно z_1 ее период равен не 2π, а P.

Чтобы обойти эту трудность, достаточно произвести замену переменных. Если положить

$$u_1 = \int \frac{P\,dx_1'}{2\pi}, \qquad \nu_1 = \frac{2\pi z_1}{P}, \tag{18}$$

то уравнения по-прежнему будут каноническими и запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\frac{du_1}{dt} = \frac{dF^*}{d\nu_1}, \qquad \frac{d\nu_1}{dt} = -\frac{dF^*}{du_1}, \\ &\frac{dx_i'}{dt} = \frac{dF^*}{dz_i}, \qquad \frac{dz_i}{dt} = -\frac{dF^*}{dx_i'} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n) \end{aligned} \tag{19}$$

и теперь уже функция F^* периодическая с периодом 2π относительно

$$\nu_1, z_2, z_3, \ldots, z_n.$$

2. Если положить $\mu = 0$, то F^* будет равна C_1, а C_1 зависит не от всех переменных первого ряда, а только от

$$x_2', x_3', \ldots, x_n',$$

ибо постоянная n_1^0 равна нулю. Таким образом, мы оказываемся не в условиях п. 125, а в условиях п. 134. Мы сейчас увидим, что выводы, полученные в этом пункте, применимы и в рассматриваемом нами сейчас случае.

В самом деле, в рассматриваемом нами случае функцией, соответствующей функции, обозначенной в п. 134 символом R, является C_2. Нетрудно видеть, что C_2 зависит от x_1' и, следовательно, от u_1 и *зависит лишь от переменных первого ряда.*

Итак, условия, при которых верна теорема п. 134, выполнены и мы заключаем, что существует n функций

$$u_1,\ x_2',\ x_3',\ \ldots,\ x_n',$$

зависящих от n переменных

$$\nu_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_n$$

и n произвольных постоянных и удовлетворяющих следующим условиям.

1. При подстановке этих функций в F последняя становится константой.

2. Выражение

$$u_1 d\nu_1 + x_2' dz_2 + x_3' dz_3 + \ldots + x_n' dz_n = dV$$

является полным дифференциалом.

3. Эти n функций периодичны с периодом 2π относительно

$$\nu_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_n.$$

Итак, будем рассматривать u_1 и x_i' как функции от ν_1 и z_i. Это позволит нам получить n соотношений между этими $2n$ переменными, затем с помощью уравнений (16), (16bis) и (18) вернемся к старым переменным x_i и y_i. При этом мы получим n соотношений между x_i и y_i. Разрешая эти соотношения относительно x_i, получим x_i в виде функций от y_i. Ясно, что:

1. Если в F вместо x_i подставить их выражения через y_i, то F обратится в постоянную.

2. Выражение

$$\Sigma x_i dy_i = dS \tag{20}$$

представляет собой полный дифференциал, ибо из уравнений (16), (16bis) и (18) видно, что разность

$$dS - \sqrt{\mu}\, dV$$

всегда является полным дифференциалом.

3. Если x_i выразить через ν_1 и z_i, то x_i будут периодическими функциями этих переменных; точно так же, если x_i выразить через y_i, то полученные при этом функции будут периодическими с периодом 2π относительно $y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n$.

Отсюда следует, что функции S, определяемые уравнением (20), не отличаются от тех функций, изучением которых мы занимались в п. 205, поскольку для отыскания их мы воспользовались уравнением (2) п. 204 и условием, состоящим в том, что производные dS/dy_i должны быть периодическими относительно $y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n$.

Таким образом, две системы уравнений

$$u_1 = \frac{dV}{d\nu_1}, \quad x_i' = \frac{dV}{dz_i}, \quad u_1 = \int \frac{P\,dx_1'}{2\pi}, \quad \nu_1 = \frac{2\pi z_1}{P},$$
$$x_k = \frac{dT}{dy_k}, \quad z_k = \frac{dT_+}{dx_k'} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),\ (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

и

$$x_k = \frac{dS}{dy_k} \tag{22}$$

оказываются тождественными при условии, если V удовлетворяет уравнению с частными производными

$$F^*\left(\frac{dV}{d\nu_1}, \frac{dV}{dz_i}, \nu_1, z_i\right) = \text{const} \tag{23}$$

и условию, состоящему в том, что производные от V должны быть периодичны относительно ν_1 и z_i, и функция S определяется так же, как и в п. **205**.

Функцию V можно разложить по степеням $\sqrt{\mu}$ и записать в виде

$$V = V_0 + \sqrt{\mu} V_1 + \mu V_2 + \ldots.$$

Каждую из функций V_i можно записать в виде

$$V_i = \beta_i^1 \nu_1 + \beta_i^2 z_2 + \ldots + \beta_i^n z_n + V_i',$$

где V_i' — периодическая функция, а n постоянных β_i^k, аналогичных постоянным $\alpha_{i,k}$ п. **125**, можно так же, как и последние, выбирать произвольно. Аналогично

$$S = S_0 + \sqrt{\mu} S_1 + \ldots,$$

и мы видели, что S_p зависят еще и от произвольных постоянных, обозначенных нами выше α_i^p.

Разумеется, для того чтобы обе системы уравнений (21) и (22) были тождественными, если постоянным β_i^k приданы вполне определенные значения, необходимо, чтобы постоянным α_i^k были приданы соответствующие значения, и наоборот.

Таким образом, каждой функции V соответствует некоторая функция S, и наоборот.

Однако в предыдущих пунктах на постоянные α_i^p и, следовательно, на функцию S, мы наложили некоторые условия — предположения (9) и (10). Если эти предположения требуется сохранить, то постоянные β_i^k в свою очередь должны удовлетворять определенным условиям, которые нетрудно сформулировать. Скажу только, что x_i' должны обращаться в нуль вместе с $\sqrt{\mu}$.

Уравнения (21) и (22) позволяют выразить все переменные в виде функций n из них. Предположим, что y_1 и x_k представлены в виде функций от

$$\nu_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n.$$

Пусть

$$y_1 = \theta(\nu_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n).$$
$$x_k = \zeta_k\ (\nu_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n).$$

Нетрудно видеть, что функции θ и ζ_k периодические с периодом 2π относительно каждой из n переменных, от которых они зависят.

Если временно считать $y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n$ постоянными, а x_1 и y_1 — координатами точки на плоскости, то можно рассмотреть уравнения

$$y_1 = \theta\,(\nu_1), \qquad x_1 = \frac{dS}{dy_1} = \zeta_1\,(\nu_1).$$

Когда мы изменяем ν_1, точка x_1, y_1 описывает некоторую замкнутую кривую, ибо функции θ и ζ_1 принимают свои первоначальные значения, когда ν_1 получает приращение, равное 2π.

Итак, если $y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n$ рассматривать как постоянные, то *уравнение*

$$x_1 = \frac{dS}{dy_1}$$

будет уравнением некоторой замкнутой кривой.

Именно к этому результату я и стремился. Однако важно уточнить его смысл. В самом деле, не следует забывать, что сформулированные выше теоремы верны, *но только с точки зрения формального анализа.*

Функции θ и ζ_k допускают разложение по степеням $\sqrt{\mu}$, так что мы можем записать

$$\begin{aligned} y_1 &= \theta_0(\nu_1) + \sqrt{\mu}\,\theta_1(\nu_1) + \mu\theta_2(\nu_1) + \ldots, \\ x_1 &= \zeta_1^0(\nu_1) + \sqrt{\mu}\,\zeta_1^1(\nu_1) + \mu\zeta_1^2(\nu_1) + \ldots, \end{aligned} \tag{24}$$

причем все функции $\theta_p(\nu_1)$ и $\zeta_1^p(\nu_1)$ периодические с периодом 2π.

Правые части уравнений (24) представляют собой ряды, расположенные по степеням $\sqrt{\mu}$, однако, вообще говоря, эти ряды не сходятся. Следовательно, уравнения (24) верны лишь с точки зрения формального анализа. Поэтому перепишем эти уравнения заново, обрывая разложения на члене, содержащем $\mu^{\frac{p}{2}}$. Тогда

$$\begin{aligned} y_1 &= \theta_0(\nu_1) + \mu^{\frac{1}{2}}\,\theta_1(\nu_1) + \ldots + \mu^{\frac{p}{2}}\,\theta_p(\nu_1), \\ x_1 &= \zeta_1^0(\nu_1) + \mu^{\frac{1}{2}}\,\zeta_1^1(\nu_1) + \ldots + \mu^{\frac{p}{2}}\,\zeta_1^p(\nu_1). \end{aligned} \tag{24bis}$$

Очевидно, что уравнения (24bis) определяют некоторую замкнутую кривую. Предположим, что исключив из этих уравнений ν_1, мы разрешили их относительно x_1. Тогда

$$x_1 = P_0 + \mu^{\frac{1}{2}} P_1 + \ldots + \mu^{\frac{q}{2}} P_q + \ldots, \tag{25}$$

где $P_0, P_1, \ldots, P_q, \ldots$ зависят от y_1. Правая часть равенства (25) представляет собой бесконечный ряд, однако этот ряд сходится, а уравнение (25) является уравнением замкнутой кривой.

В силу принципов формального анализа полученное таким способом значение x_1 может отличаться от dS/dy_1 лишь на величину порядка $\mu^{(p+1)/2}$. Следовательно, мы получаем

$$P_0 = \frac{dS_0}{dy_1}, \qquad P_1 = \frac{dS_1}{dy_1}, \qquad \ldots, \qquad P_p = \frac{dS_p}{dy_1},$$

но мы не получаем

$$P_{p+1} = \frac{dS_{p+1}}{dy_1}.$$

Будет ли теперь кривая

$$x_1 = \frac{dS_0}{dy_1} + \mu^{\frac{1}{2}} \frac{dS_1}{dy_1} + \ldots + \mu^{\frac{p}{2}} \frac{dS_p}{dy_1} \tag{26}$$

замкнутой?

Обратимся к уравнению (15). Поскольку в случае либрации dS_1/dy_1 обращается в нуль при двух различных значениях y_1, можно поставить вопрос, не будет ли $d[S_2]/dy_1$ и, следовательно, dS_2/dy_1 обращаться в бесконечность. Это оказывается невозможным, ибо $[\Phi]$ обращается в нуль одновременно с dS_1/dy_1. Найдем следующие члены нашего приближенного решения.

Чтобы найти $d[S_3]/dy_1$, выпишем уравнение, аналогичное уравнению (15)

$$\frac{d^2F_0}{\partial x_1^2} \frac{d[S_3]}{dy_1} \frac{dS_1}{dy_1} = [\Phi] + C_4.$$

Будет ли в этом случае производная $d[S_3]/dy_1$ обращаться в бесконечность?

Правда, в нашем распоряжении имеется постоянная C_4, которую можно выбрать так, чтобы производная dS_3/dy_1 не обращалась в бесконечность при одном из тех значений y_1, при которых обращается в нуль dS_1/dy_1. Однако $[\Phi] + C_4$ не обращается в нуль при другом значении y_1, обращающем в нуль dS_1/dy_1. Итак, dS_3/dy_1 обращается в бесконечность при любом выборе постоянной C_4.

Таким образом, уравнение (26) не задает никакую замкнутую кривую, ибо его правая часть обращается в бесконечность.

Следовательно, когда я говорил выше, что кривая

$$x_1 = \frac{dS}{dy_1}$$

замкнута, это утверждение само по себе не могло иметь никакого смысла, поскольку ряд S расходится.

Смысл этого утверждения таков.

Оно означает, что всегда можно выбрать функцию Φ, зависящую от y_1 и μ и допускающую разложение по степеням $\sqrt{\mu}$ и такую, что уравнение

$$x_1 = \frac{dS_0}{dy_1} + \mu^{\frac{1}{2}} \frac{dS_1}{dy_1} + \mu \frac{dS_2}{dy_1} + \ldots + \mu^{\frac{p}{2}} \frac{dS_p}{dy_1} + \mu^{\frac{p+1}{3}} \Phi$$

представляет собой уравнение замкнутой кривой.

Простой пример поможет лучше уяснить сказанное. Пусть уравнение кривой имеет вид

$$x = \sqrt{1 - y^2 + \mu y^2}.$$

Это эллипс. Разложим правую часть по степеням μ и оборвем разложение, например, на члене μ^2. Получим

$$x = \sqrt{1 - y^2} + \frac{\mu}{2} \frac{y^2}{\sqrt{1 - y^2}} - \frac{\mu^2}{8} \frac{y^2}{(1 - y^2)^{3/2}}.$$

Это уравнение уже не определяет никакой замкнутой кривой, ибо его правая часть при $y = \pm 1$ обращается в бесконечность.

Все эти трудности, носящие чисто искусственный характер, можно обойти с помощью замены переменных (16).

Предельный случай

207. Перейдем, наконец, к случаю, когда постоянная C_2 равна максимуму $[F_1]$. Этот случай занимает промежуточное положение между обычным случаем и случаем либрации.

Рассмотрим вновь уравнения (3) п. **204** и уравнения (13), (14) и (15) п. **205**. Я всегда буду предполагать, что $m_1 = 1$, $m_i = 0$ (при $i > 1$) и, следовательно, что $n_1^0 = 0$. В этом случае, как мы видели в п. **200**, радикал

$$\sqrt{C_2 - [F_1]}$$

(а следовательно, и dS_1/dy_1) является периодической функцией от y_1, но период ее равен уже не 2π, а 4π. Если y_1 заменить на $y_1 + 2\pi$, то эта функция меняет знак на противоположный. Она обращается в нуль лишь

при одном значении y_1, заключенном между 0 и 2π. Это в точности то значение y_1, при котором функция $[F_1]$ достигает своего максимума. Не уменьшая общности, можно предполагать, что это значение равно нулю. Тогда

$$\frac{dS_1}{dy_1} = 0$$

при

$$y = 2k\pi,$$

каково бы ни было целое число k.

Все это я подробно изложил в п. **200**.

Рассмотрим теперь уравнения (3), а также уравнения, аналогичные уравнениям (13) и (15), полученным приравниванием средних значений правых и левых частей уравнений (3)*. Как мы видели, эти уравнения позволяют нам последовательно найти функции S_p. Кроме того, они показывают, что производные dS_p/dy_i являются периодическими функциями относительно y_i, причем период равен 2π относительно y_2, y_3, ..., y_n и 4π относительно y_1.

Если постоянные C_p равны нулю при нечетном индексе [как я предполагал при написании уравнений (3)], то эти уравнения не изменятся ни в том случае, если y_1 заменить на $y_1 + 2\pi$, ни в том случае, если $\sqrt{\mu}$ заменить на $-\sqrt{\mu}$.

Отсюда с помощью рассуждений, аналогичных тем, которыми мы пользовались в п. **200**, нетрудно заключить, что при замене y_1 на $y_1 + 2\pi$ производная dS_p/dy_i перейдет в

$$(-1)^p \frac{dS_p}{dy_i}.$$

Следовательно, производная dS_p/dy_i является периодической функцией с периодом 2π относительно y_1, если p четно. Если же p нечетно, то эта функция меняет знак при замене y_1 на $y_1 + 2\pi$.

Возникает вопрос: конечны ли функции dS_p/dy_i?

Для отыскания $[S_2]$ у нас имеется уравнение (15)

$$\frac{d^2F_0}{dx_1^2}\frac{d[S_2]}{dy_1}\frac{dS_1}{dy_1} = [\Phi],$$

в общем же случае $[S_p]$ находят из уравнения

$$\frac{d^2F_0}{dx_1^2}\frac{d[S_p]}{dy_1}\frac{dS_1}{dy_1} = [\Phi] + C_{p+1}, \tag{27}$$

где постоянная C_{p+1} равна нулю, если $p + 1$ нечетно.

---

* См. выше п. **205**. (*Прим. ред.*)

Функцию [Ф] в правой части уравнения (27), зависящую только от y_1, я полагаю равной $\varphi_{p+1}(y_1)$.

Нетрудно видеть (по индукции), что

$$\varphi_{p+1}(y_1 + 2\pi) = (-1)^{p+1}\varphi_{p+1}(y_1).$$

Может случиться так, что производная $d[S_p]/dy_1$ обращается в бесконечность, ибо dS_1/dy_1 может обращаться в нуль при $y_1 = 2k\pi$, а правая часть уравнения (27) при этих значениях y_1 в нуль может не обратиться.

Следовательно, если требуется, чтобы производные $d[S_p]/dy_1$ оставались конечными, то необходимо, чтобы

$$\varphi_{p+1}(0) + C_{p+1} = \varphi_{p+1}(2\pi) + C_{p+1} = 0. \tag{28}$$

Если условия (28) выполняются при всех значениях p, то производные $d[S_p]/dy_1$, а следовательно, и dS_p/dy_1, остаются конечными.

Если $p + 1$ четно, то уравнениям (28) удовлетворить легко: в самом деле, постоянная C_{p+1} произвольна, достаточно выбрать ее равной

$$-\varphi_{p+1}(0) = -\varphi_{p+1}(2\pi).$$

Но если $p + 1$ нечетно, то постоянная C_{p+1} равна нулю, и мы должны удовлетворить условию

$$\varphi_{p+1}(0) = 0, \tag{29}$$

из которого следует также условие

$$\varphi_{p+1}(2\pi) = 0.$$

Поскольку нет никакого иного произвола в выборе решения, условие (29) должно выполняться автоматически. На самом деле так и происходит, однако это необходимо еще доказать. Это доказательство я проведу ниже.

208. Предположим сначала, что имеется лишь две степени свободы и, следовательно, только четыре переменные x_1, x_2, y_1 и y_2.

Обратимся к пунктам **42**, **43** и **44**. Мы видели, что каждой системе средних движений

$$n_1^0,\ n_2^0, \ldots, n_n^0,$$

соизмеримых между собой, соответствует функция $[F_1]$, а каждому максимуму или каждому минимуму этой функции соответствует периодическое решение.

Но в рассматриваемом нами случае число средних движений равно двум,

$$n_1^0,\ n_2^0,$$

и одно из них, а именно n_1^0, равно нулю. Поэтому эти два средние движения соизмеримы между собой. Кроме того, функция $[F_1]$ обладает абсо-

лютным максимумом, который достигается при $y_1 = 0$ и равен C_2. Следовательно, этому максимуму должно отвечать какое-то периодическое решение. Пусть

$$x_1 = \psi_1(t), \quad x_2 = \psi_2(t), \quad y_1 = \psi_1'(t), \quad y_2 = \psi_2'(t) \tag{30}$$

— такое решение. Поскольку величина n_1^0 равна нулю, если величина t увеличивается на один период, то ψ_1, ψ_2 и ψ_1' принимают свои исходные значения, а y_2 получает приращение 2π.

Если исключить t из уравнений (30), то

$$x_1 = \theta_1(y_2), \quad x_2 = \theta_2(y_2), \quad y_1 = \theta_3(y_2), \tag{31}$$

где θ — периодические функции с периодом 2π.

Число характеристических показателей равно двум. В силу главы IV они должны быть равны по величине и противоположны по знаку. Кроме того, поскольку периодическое решение соответствует максимуму, а не минимуму функции $[F_1]$, эти показатели должны быть вещественными. В силу п. 79 периодическое решение должно быть неустойчивым.

Установив это, произведем замену переменных, аналогичную замене переменных п. 145.

Пусть

$$S^* = x_2'y_2 + \Theta + x_1'y_1 + y_1\theta_1 - x_1'\theta_3,$$

где Θ — некоторая функция от y_2, определяемая из условия

$$\frac{d\Theta}{dy_2} = \theta_2 - \theta_3 \frac{d\theta_1}{dy_2}.$$

Каноническая форма уравнений не изменится, если я в качестве новых переменных возьму x_i' и y_i', положив

$$x_i' = \frac{dS^*}{dy_i}, \qquad y_i' = \frac{dS^*}{dx_i'}.$$

Итак, имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' + \theta_1, \qquad x_2 = x_2' + \frac{d\Theta}{dy_2} + y_1\frac{d\theta_1}{dy_2} - x_1'\frac{d\theta_3}{dy_2}, \\ y_1' &= y_1 + \theta_3, \qquad y_2' = y_2, \end{aligned} \tag{32}$$

откуда

$$x_2 = x_2' + \theta_2 + y_1'\frac{d\theta_1}{dy_2} - x_1'\frac{d\theta_3}{dy_2}.$$

Как функция F выражается в новых переменных?

Прежде всего заметим, что в силу пунктов 42—44 θ_1, θ_2 и θ_3 можно разлагать по возрастающим степеням μ и что при $\mu = 0$ они обращаются в

постоянные

$$x_1^0,\ x_2^0 \text{ и } 0.$$

Ясно, таким образом, что x_1, y_1, и x_2 зависят от x_1', x_2', y_1', y'_2 и μ, допускают разложение по степеням μ и периодичны относительно y_2'. При $\mu = 0$ они будут

$$x_1 = x_1' + x_1^0,\ x_2 = x_2' + x_2^0,\ y_1 = y_1'.$$

Итак, функция F не изменит своего вида, если ее выразить через новые переменные. Под этим я подразумеваю, что F можно разлагать по степеням μ и что она периодична относительно y_2', однако относительно y_1' функция F не периодична.

Очевидно, что новые канонические уравнения

$$\frac{dx_i'}{dt} = \frac{dF}{dy_i'}, \qquad \frac{dy_i'}{dt} = -\frac{dF}{dx_i'}$$

допускают в качестве решения

$$x_1' = 0, \qquad x_2' = 0, \qquad y_1' = 0,$$

ибо старые уравнения допускали в качестве решения

$$x_1 = \theta_1, \qquad x_2 = \theta_2, \qquad y_1 = \theta_3.$$

Отсюда мы выводим заключение о том, что три производные

$$\frac{dF}{dy_1'},\ \frac{dF}{dy_2'},\ \frac{dF}{dy_3'}$$

одновременно обращаются в нуль, если

$$x_1' = x_2' = y_1' = 0.$$

С другой стороны, если $x_1' = x_2' = y_1' = 0$, то F вырождается в некую постоянную, которую я буду обозначать A. Эта постоянная допускает разложение по степеням μ.

Положим

$$F' = F - A;$$

функцию F' можно разлагать по степеням x_1', x_2' и y_1' при малых значениях этих переменных; ее разложение не будет содержать члена нулевого порядка и члена первого порядка, отличного от члена, содержащего x_2'. Коэффициенты этого разложения будут зависеть от μ и y_2'.

Рассмотрим далее уравнение

$$F'\left(\frac{dS'}{dy_1'}, \frac{dS'}{dy_2'}, y_1', y_2'\right) = 0.$$

Попытаемся удовлетворить ему, положив

$$S' = S_0' + \sqrt{\mu}\, S_1' + \mu S_2' + \ldots . \tag{33}$$

Функции S_p мы найдем последовательно с помощью уравнений, аналогичных уравнениям (3) п. **204** и отличающихся от последних лишь тем, что входящие в них буквы имеют штрихи и все постоянные C_p равны нулю.

Подставим в F' вместо S' его выражение (33), а затем разложим F' по возрастающим степеням $\sqrt{\mu}$.

Пусть этим разложением будет

$$F' = \psi_0 + \sqrt{\mu}\, \psi_1 + \mu\psi_2 + \ldots .$$

Тогда ψ_p при малых значениях y_1', x_1' и x_2' будет допускать разложение по степеням y_1', dS_q'/dy_1', dS_q'/dy_2'.

Коэффициенты разложения будут периодическими функциями от y_2'. Однако я хотел бы обратить особое внимание на то, что это разложение не содержит члена нулевого порядка и что единственными членами первого порядка будут те, которые содержат

$$\frac{dS_q'}{dy_2'}.$$

Итак, мы должны найти

$$S_q' - [S_q']$$

из уравнений

$$n_2^0 \frac{dS_q'}{dy_2'} = \Phi, \tag{34}$$

аналогичных уравнениям (14), и найти $[S_q']$ из уравнений

$$\frac{d^2F_0'}{dx_1'^2}\frac{d[S_q']}{dy_1'}\frac{dS_1'}{dy_1'} = [\Phi'], \tag{35}$$

аналогичных уравнениям (15), причем все константы, аналогичные C_p, равны нулю.

Функции Φ и Φ', входящие в правые части уравнений (34) и (35), можно разлагать по степеням y_1', dS_i'/dy_1', dS_i'/dy_2'. Единственными членами первого порядка будут члены, содержащие dS_i'/dy_2'.

Я утверждаю, что производные dS_i'/dy_2' и dS_i'/dy_1' при $y_1' = 0$ не только не обращаются в бесконечность, но и равны нулю, а именно, значение $y_1' = 0$ является простым нулем для dS_i'/dy_1' и двукратным для dS_i'/dy_2'.

Докажем эту теорему по индукции. Предположим, что она справедлива для уже известных нам функций. Тогда функция Φ из уравнения (34) имеет в $y_1' = 0$ двукратный нуль. В самом деле, $y_1' = 0$ является простым нулем для каждого из множителей, из которых состоит каждый член порядка больше 1 разложения Φ по степеням y_1', dS_i'/dy_1' и dS_i'/dy_2'. С другой стороны, члены первого порядка этого разложения зависят от производных dS_i'/dy_2', для которых $y_1' = 0$ является двукратным нулем.

Отсюда и из уравнения (34) следует, что $y_1' = 0$ есть двукратный нуль для

$$\frac{dS_q'}{dy_2'}$$

и, следовательно, для

$$S_q' - [S_q']$$

и простой нуль для

$$\frac{dS_q'}{dy_1'} - \frac{d[S_q']}{dy_1'}.$$

Аналогичные выводы о свойствах функции Φ′ можно получить из уравнения (35) так же, как мы только что сделали для функции Φ. Нетрудно видеть, что $y_1' = 0$ является двукратным нулем для Φ′ и, следовательно, для $[\Phi']$.

Поскольку, с другой стороны, это значение y_1' есть простой нуль для dS_i'/dy_1', то оно точно так же является простым нулем и для

$$\frac{d[S_q']}{dy_1'},$$

что и требовалось доказать.

Итак, функции, определяемые уравнениями (34) и (35), конечны.

Какое соотношение существует между функцией S, определенной в предыдущем пункте, и функцией S', которую мы только что нашли?

Имеем

$$dS = x_1 dy_1 + x_2 dy_2,$$
$$dS' = x_1' dy_1' + x_2' dy_2',$$

откуда, принимая во внимание уравнения (32), получаем

$$dS' - dS = d\Theta - d(y_1\theta_1).$$

Отсюда следует, что

$$S' - S = \Theta - y_1\theta_1. \tag{36}$$

Поскольку функции S', Θ и θ_1 так же, как и их производные, всегда конечны, то такими же будут и функция S и ее производные.

Приравнивая в (36) коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\mu}$, нетрудно вычислить функции S_p.

В самом деле, выше мы записали

$$S' = S_0' + \sqrt{\mu}\, S_1' + \mu S_2' + \ldots . \tag{33}$$

Но это разложение получено в предположении, что функции S_p' выражены в новых переменных x_i' и y_i'. Если же вернуться к старым переменным, то вид разложения изменится и его можно будет записать так:

$$S' = S_0'' + \sqrt{\mu}\, S_1'' + \mu S_2'' + \ldots$$

Іср. с уравнением (8) п. 200].

Пусть

$$\Theta = \Sigma \mu^{\frac{p}{2}} \Theta_p, \qquad \theta_1 = \sum \mu^{\frac{p}{2}} \theta_1^p.$$

Тогда

$$S_p = S_p'' - \Theta_p + y_1 \theta_1^p. \tag{37}$$

Из этого уравнения видно, что постоянные C_{p+1} можно выбрать так, чтобы производные dS_p/dy_i постоянно оставались конечными.

Отсюда с необходимостью следует, что условия (29) выполняются автоматически.

В п. 207 мы видели, что производные dS_p/dy_i представляют собой периодические функции с периодом 4π относительно y_1. Однако ни dS_p'/dy_i, ни dS_p''/dy_i' периодическими не являются, поскольку функция E, о чем я уже говорил выше, не является более периодической относительно y_1'.

Но уравнение (37) показывает нам, что:

1) производная dS_p''/dy_1 периодическая;

2) производная dS_p''/dy_2 получает приращение $-4\pi\theta_1^p$, если y_1 возрастает на 4π.

Рассмотрим уравнения

$$x_1 = \frac{dS}{dy_1}, \qquad x_2 = \frac{dS}{dy_2}, \tag{37'}$$

которые задают x_1 и x_2 в виде функций от y_1 и y_2. Эти уравнения интересны.

В самом деле, рассмотрим уравнения (30). Они определяют периодическое решение, послужившее отправным пунктом в наших рассуждениях. Мы видели, что это решение неустойчиво.

Следовательно, в силу принципов, изложенных в главе VII, оно приводит к возникновению двух рядов асимптотических решений, общие

уравнения которых можно привести к виду

$$x_1 = \omega_1(t, A), \quad x_2 = \omega_2(t, A), \quad y_1 = \omega_1'(t, A), \quad y_2 = \omega_2'(t, A) \tag{38}$$

— для первого ряда и к виду

$$x_1 = \eta_1(t, B), \quad x_2 = \eta_2(t, B), \quad y_1 = \eta_1'(t, B), \quad y_2 = \eta_2'(t, B)$$

— для второго ряда. Здесь A и B — произвольные постоянные.

Если из уравнений (38) исключить t и A, а затем разрешить их относительно x_1 и x_2, то получатся уравнения (37′). Мы придем к тому же результату (изменится лишь знак радикала $\sqrt{C_2 - [F_1]}$), если исключим t и B из уравнений (39). Может быть, некоторый интерес представит сравнение изложенного выше доказательства с тем, которое приведено мною в т. XIII журнала «Acta mathematica» (стр. 211—216, одна часть, и стр. 217—219, другая часть) [55].

209. Попытаемся обобщить приведенное доказательство на случай, когда число степеней свободы больше двух. Для этого попытаемся прежде всего обобщить понятие, послужившее нам отправной точкой, т. е. понятие периодического решения (30).

Итак, мы ищем $n + 1$ функцию, зависящую от $n - 1$ переменной

$$y_2, y_3, \ldots, y_n.$$

Я буду обозначать эти функции

$$\eta, \zeta, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n.$$

Они таковы, что соотношения

$$x_1 = \eta, \; y_1 = \zeta, \; x_i = \xi_i \quad (i > 1)$$

являются *инвариантными соотношениями* в том смысле, какой был придан этому слову в п. **19**.

Отсюда вытекают следующие условия:

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{d\eta}{dy_k}\frac{dF}{dx_k} &= -\frac{dF}{dy_1}, \\ \sum_k \frac{d\zeta_i}{dy_k}\frac{dF}{dx_k} &= -\frac{dF}{dy_i}, \\ \sum_k \frac{d\zeta}{dy_k}\frac{dF}{dx_k} &= \frac{dF}{dx_1} \qquad (i, k = 2, 3, \ldots, n). \end{aligned} \tag{40}$$

Излишне добавлять, что x_1, y_1 и x_i в производных от F по предположению заменены величинами η, ζ и ξ_i.

Кроме того, функции η, ζ и ξ_i должны быть периодическими относительно $y_2, y_3, \ldots, y_n$; при $\mu = 0$ они должны обращаться в постоянные η_0, ζ_0 и ξ_i^0.

Наконец, я наложу еще одно условие: я хочу, чтобы выражение

$$x_1 dy_1 + x_2 dy_2 + \ldots + x_n dy_n = d\theta + \eta_0 d\zeta$$

было полным дифференциалом некоторой функции $\theta + \eta_0 \zeta$, зависящей от $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Находим

$$\xi_i = \frac{d\theta}{dy_i} - (\eta - \eta_0)\frac{d\zeta}{dy_i}. \tag{41}$$

Отсюда заключаем, что производные от θ являются периодическими функциями. Кроме того,

$$F(\eta, \xi_i, \zeta, y_i) = \text{const}, \tag{42}$$

т. е. если в функции F заменить переменные x_1, x_i и y_1 функциями η, ξ_i и ζ, то F выродится в постоянную.

Нетрудно проверить с помощью вычислений, несколько напоминающих вычисления из главы XV, что второе уравнение (40) с необходимостью следует из двух остальных уравнений и уравнений (41) и (42).

В самом деле, если уравнение (42) продифференцировать по y_k, затем преобразовать, принимая во внимание первое и третье уравнения а (40), а также соотношение

$$\frac{dx_i}{dy_k} + \frac{dy_1}{dy_k}\frac{dx_1}{dy_i} = \frac{dx_k}{dy_i} + \frac{dy_1}{dy_i}\frac{dx_1}{dy_k},$$

получающееся из соотношений (41) при дифференцировании, то придем ко второму из уравнений (40).

Итак, для отыскания функций η, ζ, ξ_i и θ мы оставим первое и третье уравнение (40), а также уравнения (41) и (42).

Попытаемся теперь разложить функции η, ζ и θ по степеням μ следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0 + \mu\eta_1 + \mu^2\eta_2 + \ldots, \\ \zeta &= \zeta_0 + \mu\zeta_1 + \mu^2\zeta_2 + \ldots, \\ \theta &= \theta_0 + \mu\theta_1 + \mu^2\theta_2 + \ldots, \qquad \xi_i = \sum \mu^p \xi_i^p. \end{aligned} \tag{43}$$

Прежде всего, положив $\mu = 0$ в первом уравнении (40), найдем

$$\sum n_k^0 \frac{d\eta_0}{dy_k} = 0.$$

Этот результат доказывает, что η_0 не зависит от $y_2, y_3, \ldots, y_n$. То же можно записать в виде

$$\eta_0 = [\eta_0],$$

поскольку $[\eta_0]$ означает среднее значение η_0, рассматриваемой как периодическая функция от $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Отсюда, положив в третьем уравнении (40) $\mu = 0$, получим

$$-\sum n_k^0 \frac{d\zeta_0}{dy_k} = \frac{dF_0}{dx_1}.$$

В правой части x_1 и x_i следует заменить соответственно на η_0 и ξ_i^0. Последние должны быть такими постоянными, что

$$\frac{dF_0}{dx_1} = -n_1^0 = 0, \qquad \frac{dF_0}{dx_i} = -n_i^0,$$

Величины n_i^0 мы рассматриваем как данные задачи, так что эти уравнения определяют ξ_i^0 и

$$\eta_0 = [\eta_0].$$

Наши уравнения принимают вид

$$\sum n_k^0 \frac{d\zeta_0}{dy_k} = 0,$$

откуда

$$\zeta_0 = [\zeta_0].$$

Поскольку η_0 — абсолютная постоянная, а производная $d\zeta_0/dy_k$ должна быть равна нулю, получаем из уравнений (41), что

$$\xi_i^0 = \frac{d\theta_0}{dy_i}.$$

С другой стороны, если постоянную в правой части уравнения (42) разложить по возрастающим степеням μ и записать ее в виде

$$C_0 + C_1\mu + C_2\mu^2 + \ldots,$$

то из уравнения (42), положив в нем $\mu = 0$, получим

$$F_0\left(\eta_0, \frac{d\theta_0}{dy_i}\right) = C_0.$$

Это уравнение и определяет постоянную C_0. Кроме того, мы видим, что

$$\theta_0 = \xi_2^0 y_2 + \xi_3^0 y_3 + \ldots + \xi_n^0 y_n.$$

Теперь нам известны η_0 и θ_0. Что же касается ζ_0, то мы знаем лишь, что ζ_0 является некоторой постоянной и, следовательно, что

$$\zeta_0 = [\zeta_0],$$

но не знаем, чему равно $[\zeta_0]$.

Приравняв коэффициенты при μ в первом уравнении (40), получим (напомним, что η_0 — постоянная)

$$\sum n_k^0 \frac{d\eta_1}{dy_k} = \frac{dF_1}{dy_1}.$$

Предполагается, что в правой части y_1, x_1 и x_i заменены на ζ_0, η_i и ξ_i^0. Правая часть представляет собой периодическую функцию от $y_2, y_3, \ldots, y_n$, среднее значение которой в силу того, что ζ_0, η_0 и ξ_i^0 постоянны, будет обладать свойством

$$\left[\frac{dF_1}{dy_1}\right] = \frac{d[F_1]}{dy_1}.$$

Это среднее значение должно быть равным нулю, что дает нам уравнение

$$\frac{d[F_1]}{dy_1} = 0,$$

определяющее постоянную ζ_0.

Остается уравнение

$$\sum n_k^0 \frac{d\eta_1}{dy_k} = \Phi,$$

где Φ — некоторая известная периодическая функция, среднее значение которой равно нулю. Из этого уравнения легко найти

$$\eta_1 - [\eta_1].$$

Приравняем теперь коэффициенты при μ в уравнении (42) и примем во внимание уравнения (41), из которых следует, что

$$\xi_i^1 = \frac{d\theta_1}{dy_i} - \eta_1 \frac{d\zeta_0}{dy_i} = \frac{d\theta_1}{dy_i}.$$

Мы найдем, что

$$\sum n_k^0 \frac{d\theta_1}{dy_k} = \Phi - C_1.$$

Здесь Φ — некоторая известная периодическая функция, среднее значение которой не обязательно должно быть равным нулю, поскольку требуется, чтобы периодическими были не функция θ_1, а ее производные. Из этого уравнения мы получим θ_1, зависящую от n — 1 постоянной, которые можно выбирать произвольно.

Приравняв коэффициенты при μ в третьем уравнении (40), получим

$$\sum n_k^0 \frac{d\zeta_1}{dy_k} = \Phi - \frac{d^2F_0}{dx_1^2}\eta_1. \tag{44}$$

Среднее значение правой части этого уравнения должно быть равно нулю, откуда

$$\frac{d^2F_0}{dx_1^2}[\eta_1] = [\Phi].$$

Отсюда получаем $[\eta_1]$, а из уравнения (44) находим затем

$$\zeta_1 - [\zeta_1].$$

Будем продолжать аналогичным образом. Предположим, что уже нашли

$$\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{p-1}, \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1},$$
$$\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{p-2}, \zeta_{p-1} - [\zeta_{p-1}].$$

Требуется найти

$$\eta_p, \theta_p, \quad \text{и} \quad \zeta_{p-1}, \zeta_p - [\zeta_p].$$

Прежде всего приравняем коэффициенты при μ^p в третьем уравнении (40). Получим

$$\sum n_k^0 \frac{d\eta_p}{dy_k} = \Phi + \frac{d^2F_1}{dy_1^2}\zeta_{p-1}. \tag{45}$$

Среднее значение правой части этого уравнения должно быть равным нулю, откуда

$$\left[\frac{d^2F_1}{dy_1^2}\zeta_{p-1}\right] = [\Phi]$$

или

$$\frac{d^2[F_1]}{dy_1^2}[\zeta_{p-1}] = [\Phi] - \left[\frac{d^2F_1}{dy_1^2}(\zeta_{p-1} - [\zeta_{p-1}])\right].$$

Из этого уравнения находим $[\zeta_{p-1}]$, поскольку разность $\zeta_{p-1} - [\zeta_{p-1}]$ известна. Итак, ζ_{p-1} полностью известна. Уравнение (45) позволяет найти

$$\eta_p - [\eta_p].$$

Если теперь приравняем коэффициенты при μ^p в уравнении (42) и учтем уравнение (41), то получим

$$\sum n_k^0 \frac{d\theta_p}{dy_k} = \Phi - C_p,$$

откуда найдем θ_p.

Приравняем, наконец, коэффициенты при μ^p в третьем уравнении (40). Мы получим уравнение, аналогичное уравнению (44),

$$\sum n_k^0 \frac{d\zeta_p}{dy_k} = \Phi - \frac{d^2F_0}{dx_1^2}\eta_p. \tag{46}$$

Правая часть его должна иметь нулевое среднее значение, и соответствующее уравнение

$$\Phi = \frac{d^2F_0}{dx_1^2}[\eta_p]$$

определяет $[\eta_p]$ и, следовательно, η_p.

Затем из уравнения (46) находим

$$\xi_p - [\zeta_p]$$

и т. д.

Итак, мы сумели найти функции, удовлетворяющие наложенным условиям, и тем самым реализовали подлинное *обобщение периодических решений*. Единственное различие состоит в том, что в то время как ряды, определяющие периодические решения, сходятся, ряды, существование которых мы только что доказали, сходиться не будут. Поэтому указанное обобщение периодических решений обладает ценностью только с точки зрения формального анализа.

210. Попытаемся теперь воспользоваться результатами п. 209, чтобы показать, что соотношения (29) и в общем случае выполняются автоматически.

Для этого обозначим

$$S^* = x_2'y_2 + x_3'y_3 + \ldots + x_n'y_n + \theta - (\eta - \eta_0)\,\zeta + x_1'y_1 + y_1\eta - x_1'\zeta$$

и произведем замену переменных, положив,

$$x_i = \frac{dS^*}{dy_i}, \qquad y_i = \frac{dS^*}{dx_i'}.$$

При этом канонический вид уравнений не изменится, и мы получим

$$x_1 = x_1' + \eta, \qquad y_1' = y_1 - \zeta, \qquad y_i' = y_i \qquad (i > 1)$$

и, наконец,

$$x_i = x_i' + \frac{d\theta}{dy_i} - (\eta - \eta_0)\frac{d\zeta}{dy_i} - \zeta\frac{d\eta}{dy_i} + y_1\frac{d\eta}{dy_i} - x_1'\frac{d\zeta}{dy_i},$$

или, учитывая (41),

$$x_i = x_i' + \xi_i + y_1'\frac{d\eta}{dy_i} - x_1'\frac{d\zeta}{dy_i}.$$

В новых переменных функция F имеет тот же вид, что и в старых, за исключением того, что она не является периодической относительно y_1'.

В качестве инвариантных соотношений новые канонические уравнения допускают соотношения

$$x_1' = x_i' = y_1' = 0.$$

Это означает, что при $x_1' = x_i' = y_1' = 0$

$$\frac{dF}{dy_1'} = \frac{dF}{dy_i'} = \frac{dF}{dx_1'} = 0$$

и, кроме того, F вырождается в постоянную A. Я введу новое обозначение:

$$F' = F - A.$$

Ясно, что если F' разложить по степеням x_1', x_i' и y_1', то членов нулевого порядка не будет, а единственными членами первого порядка будут члены, содержащие x_2', x_3',. . ., x_n'.

Рассмотрим уравнение

$$F'\left(\frac{dS'}{dy_i'},\ y_i'\right) = 0$$

и попытаемся удовлетворить ему, положив

$$S' = \sum \mu^{\frac{p}{2}} S_p'$$

(функции S_p' будем находить последовательно).

Вычисления протекают в точности так же, как в п. 208.

Кроме того, в рассматриваемом случае функции S_q' и их производные зависят от y_1'. Ясно, что при $y_1' = 0$ эти функции не обращаются в бесконечность, наоборот, для

$$\frac{dS_q'}{dy_i'} \quad (i > 1)$$

точка $y_1' = 0$ является двукратным нулем, для

$$\frac{dS_q'}{dy_1'}$$

эта точка является простым нулем. Так же, как и в п. 208, рассуждения проводятся по индукции (наши уравнения имеют тот же вид, что и уравнения п. 208). Поэтому я не буду останавливаться на деталях. Замечу только, что уравнение, аналогичное уравнению (34), записывается в

виде

$$\sum n_k^0 \frac{dS_q'}{dy_k'} = \Phi,$$

где

$$\Phi = \Sigma A \cos(m_2 y_2' + \ldots + m_n y_n' + \omega)$$

— периодическая функция относительно y_2', y_3',. . ., y_n, среднее значение которой равно нулю. Коэффициенты A и ω зависят от y_1, но, разумеется, для разных членов по-разному.

Мы найдем, что

$$\frac{dS_q'}{dy_k'} = \sum \frac{Am_k}{n_2^0 m_2 + \ldots + n_n^0 m_n} \cos(m_2 y_2' + \ldots + m_n y_n' + \omega).$$

Утверждение о том, что $y_1' = 0$ является двукратным нулем для функции Ф, очевидно, эквивалентно утверждению о том, что $y_1' = 0$ является двукратным нулем для каждого из коэффициентов A и, следовательно, для dS_q'/dy_k'.

Остальная часть доказательства протекает в точности так же, как в п. 208.

Итак, функции S_q' конечны. Отсюда так же, как и в п. 208, заключаем, что конечными будут и функции S_q и, следовательно, соотношения (29) выполняются автоматически.

Связь с рядами п. 125

211. В п. 125 мы определили некоторые ряды S, первые члены которых сходятся достаточно быстро, если ни одна из линейных комбинаций

$$m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 + \ldots + m_n n_n^0$$

не слишком мала. В п. 204 и последующих мы определили другие ряды S, первые члены которых сходятся достаточно быстро и в тех случаях, когда эти линейные комбинации малы.

Каким образом можно перейти от одних рядов к другим? Ответ на этот вопрос можно предвидеть, исходя из того, что было сказано в п.201.

Функция S, определенная в п. 125, зависит (см. там же) от бесконечного числа наборов, состоящих из n произвольных постоянных, а именно:

$$x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0,$$

$$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{1,n},$$

$$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \ldots, \alpha_{n,n},$$

. . . . . .

Мы не уменьшим общности, если предположим, что все $\alpha_{i,k}$ равны нулю.

Пусть, в самом деле,

$$S^* = S_0^* + \mu S_1^* + \mu^2 S_2^* + \ldots \tag{1}$$

— те функции, которые получаются из функций S, если положить все $\alpha_{i,k}$ равными нулю. Функции S^* будут содержать лишь n произвольных постоянных

$$x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0.$$

Поскольку x_i^0 — произвольные постоянные, мы можем заменить их любыми разложениями по степеням μ.

Итак, x_i^0 мы заменяем разложением

$$x_i^0 + \mu\beta_{1,i} + \mu^2\beta_{2,i} + \ldots,$$

где β — некоторые постоянные. Функция S, к которой приводит такая подстановка, как и S^*, удовлетворяет уравнению (4) п. 125, однако на сей раз не все $\alpha_{i,k}$ равны пулю. Ясно, что произвольные постоянные β можно выбрать так, чтобы α имели какие угодно значения. Следовательно, полученная при указанной выше подстановке функция является функцией S наиболее общего вида.

Вернемся к функции S^*. Эта функция зависит от n постоянных x_i^0, но, с другой стороны, n средних движений n_i^0 также зависят от x_i^0 и, наоборот, x_i^0 зависят от n_i^0, так что S^* можно рассматривать как функцию, зависящую от произвольных постоянных

$$n_1^0, n_2^0, \ldots, n_n^0.$$

Каков вид зависимости функций S_p^* от этих постоянных? Каждый член S_p^* содержит в качестве множителя синус или косинус дуги

$$p_1y_1 + p_2y_2 + \ldots + p_ny_n \qquad (p\text{—целые}),$$

а коэффициент при синусе или косинусе представляет собой некоторую голоморфную функцию от n_i^0, деленную на произведение множителей вида

$$q_1n_1^0 + q_2n_2^0 + \ldots + q_nn_n^0 \qquad (q\text{—целые}).$$

Именно эти множители мы и называем малыми делителями.

Из рассуждений, аналогичных проводимым в п. 201, видно, что ни один из членов S_p^* не может содержать более чем $2p - 1$ малого делителя.

Если эти делители, например

$$m_1n_1^0 + m_2n_2^0 + \ldots + m_nn_n^0,$$

становятся очень малыми, то сходимость ряда S^* становится сомнительной. Так же, как в п. 202, заменим постоянные интегрирования n_i^0 различными разложениями, проводимыми не по степеням μ, а по степеням $\sqrt{\mu}$. Пусть, например,

$$n_i^0 = \alpha_i^0 + \sqrt{\mu}\alpha_i^1 + \mu\alpha_i^2 + \ldots . \tag{2}$$

Я предполагаю, что

$$m_1\alpha_1^0 + m_2\alpha_2^0 + \ldots + m_n\alpha_n^0 = 0.$$

Отсюда следует, что разложение величины

$$m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 + \ldots + m_n n_n^0$$

начинается с члена, содержащего $\sqrt{\mu}$.

Далее, пусть

$$\frac{N}{P}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_n y_n) \tag{3}$$

какой-то член S_p^*, где P означает произведение малых делителей. Тогда N и P будут допускать разложение по возрастающим степеням $\sqrt{\mu}$ и показатель μ в первом члене разложения P не больше $p - {}^1/_2$.

Отсюда следует, что функцию S^* после подстановки в нее вместо n_i^0 их разложений (2) можно будет разлагать по *положительным* степеням $\sqrt{\mu}$.

Пусть

$$S^* = S_0' + \sqrt{\mu}S_1' + \mu S_2' + \ldots \tag{4}$$

— такое разложение. Ясно, что различные разложения (4), которые можно получить при этом, не отличаются от разложений, уже служивших объектом рассмотрений в этой главе. Эти разложения мы научились строить в пунктах 204—207. Рассмотрим, в частности, первые члены S_0' и S_1'.

Имеем

$$S_0' = S_0^* = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 + \ldots + x_n^0 y_n.$$

Величины x_i^0 постоянные. Эти постоянные в свою очередь являются известными функциями от n_i^0. В S_0' величины n_i^0 необходимо заменить постоянными α_i^0, поскольку при $\mu = 0$ разложение (2) величины n_i^0 вырождается в первый член, т. е. в α_i^0.

С другой стороны, находим

$$S_1 = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \ldots + \xi_n y_n + U,$$

где

$$\xi_i = \sum \frac{dx_i^0}{dn_k^0} \alpha_k^1. \tag{5}$$

Величины x_i^0 представляют собой известные функции от n_k^0, поэтому их производные dx_i^0/dn_k^0 также известны и в них вместо n_k^0 надлежит подставить α_k^0.

Что же касается U, то эту функцию находят следующим образом.

Возьмем все члены S_p^* в виде (3), где знаменатель P содержит малый делитель

$$m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 + \ldots + m_n n_n^0$$

в степени $2p - 1$.

Подставим в числитель N вместо n_k^0 постоянные α_k^0, а в знаменатель вместо

$$m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 + \ldots + m_n n_n^0 \tag{6}$$

подставим

$$m_1 \alpha_1^1 + m_2 \alpha_2^1 + \ldots + m_n \alpha_n^1 = \gamma. \tag{7}$$

Тогда выделенный член примет вид

$$\frac{N_0}{\gamma^{2p-1}} \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} (p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_n y_n), \tag{8}$$

где N_0 означает то, во что переходит N при замене n_i^0 на α_j^0.

Аналогичным образом мы поступим со всеми членами S_p^*, которые содержат малый делитель (6) в степени $2p - 1$. Пусть

$$\frac{U}{\gamma^{2p-1}}$$

— сумма всех полученных при этом членов вида (8).

Проделав аналогичные операции со всеми функциями S_1^* S_2^*,. . ., мы получим последовательно

$$\frac{U_1}{\gamma}, \frac{U_2}{\gamma^3}, \ldots .$$

Тогда

$$U = \frac{U_1}{\gamma} + \frac{U_2}{\gamma^3} + \frac{U_3}{\gamma^5} + \ldots .$$

Если теперь мы будем считать, что выполняется предположение (9) п. 204, то

$$\frac{\xi_1}{m_1} = \frac{\xi_2}{m_2} = \ldots = \frac{\xi_n}{m_n}.$$

Комбинируя эти соотношения с (5) и (7), можно записать

$$\xi_i = m_i A\gamma,$$

где A — коэффициент, вычисление которого не представляет никаких трудностей, зависящий от целых чисел m_i и производных dx_i^0/dn_n^0.

Отсюда находим

$$\frac{dS_1'}{dy_1} = m_1 A\gamma + \frac{1}{\gamma}\frac{dU_1}{dy_1} + \frac{1}{\gamma^3}\frac{dU_2}{dy_1} + \ldots . \tag{9}$$

Из этого следует, что квадрат правой части уравнения (9), допускающий, как и сама правая часть, разложение по убывающим степеням γ, если ограничиться первыми двумя его членами, равен

$$m_1^2 A^2\gamma^2 + m_1 A\frac{dU_1}{dy_1}.$$

В свою очередь отсюда вытекает ряд тождеств

$$2m_1 A\frac{dU_2}{dy_1} + \left(\frac{dU_1}{dy_1}\right)^2 = 0,$$

$$2m_1 A\frac{dU_3}{dy_1} + 2\frac{dU_1}{dy_1}\frac{dU_2}{dy_2} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

которые, даже независимо от своих приложений (им посвящена эта глава), представляют собой любопытные и неожиданные свойства разложения (1).

Расходимость рядов

212. Ряды, полученные нами в этой главе, расходятся так же, как и ряды Ньюкома и Линдштедта.

В самом деле, рассмотрим один из рядов S, определенных в п. 204. Этот ряд зависит от некоторого числа произвольных постоянных.

Прежде всего мы имеем постоянные

$$x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0.$$

Между этими постоянными имеется соотношение

$$m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 + \ldots + m_n n_n^0 = 0.$$

Так же, как в п. 205 и последующих, предположим, что

$$m_1 = 1, \qquad m_2 = m_3 = \ldots = m_n = 0.$$

Мы видели, что так всегда можно сделать. Тогда наше соотношение запишется в виде

$$-n_1^0 = \frac{dF_0}{dx_1^0} = 0.$$

Это уравнение можно разрешить относительно x_1^0:

$$x_1^0 = \varphi(x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0). \tag{1}$$

Кроме того, n выписанных постоянных связаны с C_0 соотношением

$$F_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = C_0.$$

Кроме C_0, у нас имеются

$$C_2,\ C_4,\ C_6, \ldots .$$

Наконец, у нас есть

$$\begin{gathered}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,\\ \ldots\ldots\ldots\\ \alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots, \alpha_n^p,\\ \ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$

Однако, не уменьшая общности, можно предположить, что между этими величинами имеются соотношения (9) и (10) п. **204**, или, еще лучше, можно, также не уменьшая общности, предположить, что все величины α_i и α_i^p равны нулю.

Постоянные C_4, C_6,... связаны с произвольными постоянными α_i и α_i^p определенными соотношениями. Следовательно, если предположить, что α_i и α_i^p равны нулю, то C_4, C_6,... станут полностью известными функциями x_i^0 и C_2.

Итак, остается всего n произвольных постоянных

$$x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0 \text{ и } C_2,$$

ибо x_1^0 связана с остальными x_i^0 некоторым соотношением.

Рассмотрим теперь соотношения

$$x_1 = \frac{dS}{dy_1}, \quad x_2 = \frac{dS}{dy_2}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{dS}{dy_n}. \tag{2}$$

Правые их части зависят от

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0, C_2.$$

Разрешив уравнения (2) относительно

$$x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0, C_2,$$

получим

$$x_i^0 = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 2, 3, \ldots, n), \tag{3}$$

$$C_2 = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Если бы ряды S сходились, то функции φ_i и θ были интегралами дифференциальных уравнений.

Посмотрим, какой вид имели бы эти интегралы.

Прежде всего обратимся к случаю п. **204.** Тем самым мы предполагаем, что C_2 больше максимума $[F_1]$. Отсюда следует, что

$$\sqrt{C_2 - [F_1]}, \quad \frac{1}{\sqrt{C_2 - [F_1]}}$$

являются голоморфными функциями от C_2, y_1, y_2, . . ., y_n при всех вещественных значениях y_i и при значениях C_2, достаточно близких к рассматриваемым.

Мы предполагали ранее, что F голоморфна относительно x_i и y_i при всех вещественных значениях y_i и при значениях x_i, достаточно близких к x_i^0. Кроме того, вторая производная F_0 по x_1^0 в общем случае будет отлична от нуля, так что x_1^0 будет голоморфной функцией от остальных x_i^0.

Из всего сказанного следует, что производные dS_p/dy_i будут голоморфными функциями при всех вещественных значениях y_1 и при значениях

$$x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0, C_2,$$

достаточно близких к рассматриваемым.

Итак, пусть

$$\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \gamma$$

— значения этих постоянных, достаточно близкие к рассматриваемым.

Положим

$$\lambda_1 = \varphi(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n).$$

Обе части уравнения (2) будут разлагаться по степеням

$$\sqrt{\mu}, x_1 - \lambda_1, x_2 - \lambda_2, \ldots, x_n - \lambda_n, x_1^0 - \lambda_1, x_2^0 - \lambda_2, \ldots,$$
$$x_n^0 - \lambda_n, \quad C_2 - \gamma$$

и по синусам и косинусам линейных комбинаций y_i.

Однако прежде чем применять теорему п. **30** к уравнениям (2), мы должны преобразовать одно из этих уравнений. В самом деле, положим

$$x_1 = \varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n) + \sqrt{\mu} x_1'.$$

Тогда первое из уравнений (2) запишется в виде

$$\varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n) + \sqrt{\mu}x_1' = \varphi(x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0) + \sqrt{\mu}\,\frac{dS_1}{dy_0} + \mu\,\frac{dS_2}{dy_1} + \ldots$$

или, если учесть остальные уравнения (2),

$$\sqrt{\mu}x_1' = \varphi\left(\frac{dS}{dy_2}, \frac{dS}{dy_3}, \ldots, \frac{dS}{dy_n}\right) - \varphi(x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0) + \sqrt{\mu}\,\frac{dS_1}{dy_1} + \mu\frac{dS_2}{dy_1} + \ldots.$$

Однако мы знаем, что dS_1/dy_2, dS_1/dy_3, ..., dS_1/dy_n равны нулю. Это означает, что разности

$$\frac{dS}{dy_i} - x_i^0 \qquad (i > 1)$$

и, следовательно, разности

$$\varphi\left(\frac{dS}{dy_i}\right) - \varphi(x_i^0)$$

делятся на μ. Поэтому я могу записать

$$\varphi\left(\frac{dS}{dy_2}, \frac{dS}{dy_3}, \ldots, \frac{dS}{dy_n}\right) - \varphi(x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0) = \mu H,$$

откуда

$$x_1' = \frac{dS_1}{dy_1} + H\sqrt{\mu} + \frac{dS_2}{dy_1}\sqrt{\mu} + \frac{dS_3}{dy_1}\mu + \ldots. \tag{4}$$

К этому уравнению (4) присоединим $n - 1$ остальных уравнений (2). Таким образом, мы снова получим систему, состоящую из n уравнений, обе части которых допускают разложение по степеням

$$\sqrt{\mu},\quad x_1',\quad x_2 - \lambda_2,\quad \ldots,\quad x_n - \lambda_n,$$
$$x_2^0 - \lambda_2, \ldots, x_n^0 - \lambda_n,\quad C_2 - \gamma$$

и по синусам и косинусам линейных комбинаций y_i.

При $\mu = 0$ эта система имеет вид

$$x_1' = \frac{dS_1}{dy_1}, \qquad x_i = x_i^0.$$

Следовательно, необходимо доказать, что при

$$x_1' = 0, \qquad x_i = x_i^0 = \lambda_i$$

функциональный определитель $x_i^0 - x_i$ и $dS_1/dy_1 - x_1'$ по x_i^0 и C_2 не обращается в нуль. Но этот определитель равен производной dS_1/dy_1 по C_2 или, если

$$\frac{dS_1}{dy_1} = A\sqrt{C_2 - [F_1]},$$

то

$$\frac{A}{2\sqrt{C_2 - [F_1]}}.$$

Следовательно, он отличен от нуля, и теорема п. 30 применима. Если бы рассматриваемые нами ряды сходились, то наши дифференциальные уравнения имели n интегралов ψ_i и θ, однозначных относительно x и y и периодических относительно y. Однако это невозможно. Следовательно, эти ряды расходятся, что и требовалось доказать.

Тот же результат получается и в случае либрации. Чтобы убедиться в этом, достаточно лишь вспомнить, что в п. 206 мы с помощью замены переменных привели уравнения к тому же виду, что и уравнения п. 134. Следовательно, рассуждая так же, как в главе XIII, мы бы показали, что сходимость рядов влечет за собой существование однозначных интегралов, что противоречит теореме главы V.

В предельном случае ряды также расходятся, однако доказать это строго я смогу лишь несколько дальше.

Можно спросить, каков механизм того, что члены этих рядов начинают возрастать настолько, что препятствуют сходимости самих рядов.

В том частном случае, когда имеются лишь две степени свободы, малые делители не возникают.

В самом деле, уравнения, подлежащие интегрированию, имеют один из двух видов:
либо

$$n_2^0 \frac{dS_p}{dy_2} = \Phi,$$

либо

$$\frac{dS_1}{dy_1} \frac{d[S_p]}{dy_1} = \Phi$$

и делители, входящие в $n_2^0 m_1$ и dS_1/dy_1, не очень малы.

Однако на сходимость может повлиять операция дифференцирования: дифференцирование члена, содержащего косинус и синус аргумента

$$p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_n y_n,$$

приводит к появлению в качестве множителя одного из p_i, которые могут быть очень большими.

Поэтому сходимости препятствует не наличие малых делителей, возникающих при интегрировании, а большие множители, возникающие при дифференцировании.

Тот же результат можно изложить и по-другому. В случае, рассмотренном в п. 125, при условии, что имеются лишь две степени свободы, существуют малые делители вида

$$m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0.$$

Подставим в них вместо n_1^0 и n_2^0 разложения, аналогичные разложениям (2) предыдущего пункта.

Пусть, например,

$$n_2^0 = \alpha_2, \qquad n_1^0 = \alpha_1 \sqrt{\mu}.$$

Наши малые делители запишутся в виде

$$m_2\alpha_2 + m_1\alpha_1 \sqrt{\mu}.$$

Выражение

$$\frac{1}{m_2\alpha_2 + m_1\alpha_1 \sqrt{\mu}}$$

можно разложить по степеням $\sqrt{\mu}$ и получить

$$\frac{1}{m_2\alpha_2} + \sqrt{\mu}\,\frac{m_1\alpha_1}{(m_2\alpha_2)^2} + \mu\,\frac{(m_1\alpha_1)^2}{(m_2\alpha_2)^3} + \ldots. \tag{5}$$

Ни один из членов этого разложения не содержит в знаменателе малого делителя, ибо $m_2\alpha_2$ никогда не бывает малым.

Отсюда ясно, что каков бы ни был параметр μ, можно найти целые числа m_1 и m_2, такие, что

$$\sqrt{\mu}\,\frac{m_1\alpha_1}{m_2\alpha_2} > 1.$$

Следовательно, при таком выборе m_1 и m_2 разложение (5) не будет сходиться. Это объясняет, почему при подстановке (как я делал в предыдущем пункте) вместо средних движений их разложений (2) и последующем упорядочении результата подстановки по степеням $\sqrt{\mu}$, мы получаем расходящиеся ряды.

Сказанное только что следует сопоставить с тем, что говорилось в п. 109 и следующих.

Глава XX

РЯДЫ БОЛИНА

213. В предыдущей главе мы показали, каким образом можно построить функцию S. Чтобы найти из нее координаты как функции времени, достаточно применить к S метод Якоби.

Для простоты предположим, что целое число, обозначенное нами m_1, равно 1, а остальные m_i равны нулю. Именно так мы выбрали m_i в пунктах 205 и 206. Известно, что общий случай можно свести к указанному частному случаю заменой переменных (3), приведенной в п. 202.

Функция S, определяемая в п. 204 и последующих, зависит от n переменных y_i. Кроме того, она содержит n произвольных постоянных $x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0$ и C_2. В наших вычислениях могут встретиться и другие постоянные, а именно x_1^0, C_p, α_i^p. Однако мы предположим, что:

1) величина x_1^0 связана с остальными x_i^0 соотношением (4), указанным в п. 204;

2) α^p удовлетворяют условию (10), приведенному в том же п. 204;

3) постоянные C_p как-то выражены через остальные постоянные.

Итак, S будет функцией, зависящей от

$$y_1, y_2, \ldots, y_n; C_2, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0.$$

Положим

$$x_i = \frac{dS}{dy_i}, \qquad w_1 = \frac{dS}{dC_2}, \qquad w_k = \frac{dS}{dx_k^0} \tag{1}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 2, 3, \ldots, n).$$

Отсюда мы получим x_i и y_i как функции от w, x_k^0 и C_2. Если в полученных таким образом выражениях x_k^0 и C_2 считать произвольными постоянными, а w — линейными функциями времени, то координаты x_i и y_i окажутся функциями времени. Мы знаем это из теоремы п. 3.

Однако более удобно изменить уравнения (1) и записать их в виде

$$x_i = \frac{dS}{dy_i}, \qquad \theta_1 w_1 = \frac{dS}{dC_2}, \qquad w_k + \theta_k w_1 = \frac{dS}{dx_k^0}, \tag{2}$$

где θ — произвольные функции от C_2 и x_k^0.

Ясно, что если вместо уравнений (1) рассматривать уравнения (2), то величины w по-прежнему будут линейными функциями времени, ибо θ зависят лишь от C_2 и x_k^0, и будут постоянными.

Я воспользуюсь произволом в выборе функций θ следующим образом. Я выберу их так, чтобы x_i, $\cos y_i$ и $\sin y_i$ были периодическими функциями от w с периодом 2π.

Обратимся прежде всего к первому случаю, когда производная dS_1/dy_1 принимает только вещественные значения и никогда не обращается в нуль, и посмотрим, какой вид имеют получаемые при этом ряды.

В этом случае производные dS_q/dy_1 периодичны по y, период равен 2π. Что же касается S, то эта функция имеет вид

$$S = S' + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n,$$

где S' — периодическая функция от y, а β зависят от C_2 и x_k^0.

Кроме того, S' и β разлагаются по степеням $\sqrt{\mu}$.

Поскольку в силу предположений, сделанных относительно целых чисел m_i, условие (10), приведенное в п. 204, запишется в виде

$$\alpha_i^p = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

мы получаем просто

$$\beta_2 = x_2^0, \qquad \beta_3 = x_3^0, \ldots, \qquad \beta_n = x_n^0.$$

Если β_1 разложить по степеням $\sqrt{\mu}$, то первый член этого разложения также будет равен x_1^0.

Я хочу, чтобы при замене

$$w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n$$

на

$$w_1 + 2k_1\pi,\ w_2 + 2k_2\pi,\ \ldots,\ w_n + 2k_n\pi,$$

где k_i — целые числа, величины x_i и y_i переходили соответственно в

$$x_i \quad \text{и} \quad y_i + 2k_i\pi.$$

Чтобы получить этот результат, положим

$$\theta_1 = \frac{d\beta_1}{dC_2}; \qquad \theta_k = \frac{d\beta_1}{dx_k^0}.$$

Отсюда следует, что функции θ_1 и θ_k допускают разложение по степеням $\sqrt{\mu}$. При $\mu = 0$ величина β_1 равна x_1^0, но постоянная x_1^0 связана с остальными x_k^0 соотношением (4), указанным в п. 204. В нашем случае это соотношение имеет вид

$$n_{1_0}^{0*} = 0.$$

Следовательно, при $\mu = 0$ функции θ_1 и θ_k будут

$$\theta_1 = \frac{dx_1^0}{dC_2} = 0, \quad \theta_k = \frac{dx_1^0}{dx_k^0}.$$

Из уравнений (2) мы найдем y_i, а затем x_i в виде функций, зависящих от w, x_k^0, C_2 и μ и допускающих разложение по степеням $\sqrt{\mu}$. При $\mu = 0$ первое и третье из уравнений (2) принимают вид

$$x_i = x_i^0, \qquad w_1 + \frac{dx_1^0}{dx_k^0} w_k = y_1 + \frac{dx_1^0}{dx_k^0} y_k.$$

Второе уравнение приводит к тождеству $0 = 0$, но если его поделить на $\sqrt{\mu}$, а затем положить $\mu = 0$, то оно примет вид

$$\theta_1' w_1 = \frac{dS_1}{dC_2}.$$

Здесь $\theta_1' w_1$ — первый член разложения θ_1.

Если придерживаться обозначений предыдущей главы, то это уравнение можно переписать:

$$\theta_1' w_1 = \frac{d}{dC_2} \int \sqrt{\frac{C_2 - [F_1]}{A}}\, dy_1 = \frac{1}{2\sqrt{A}} \int \frac{dy_1}{\sqrt{C_2 - [F_1]}}.$$

Его правую часть можно представить в виде

$$\gamma y_1 + \psi(y_1),$$

где γ — постоянная, зависящая от C_2 и x_k^0, а ψ — периодическая функция.

Функцию θ_i' находим в соответствии с принятым выше соглашением, полагая

$$\theta_1' = \gamma,$$

откуда

$$\gamma(w_1 - y_1) = \psi.$$

С другой стороны,

$$\frac{dw_1}{dy_1} = \frac{1}{2\gamma\sqrt{A}} \frac{1}{\sqrt{C_2 - [F_1]}} = \frac{1}{2\gamma A \dfrac{dS_1}{dy_1}}.$$

Поскольку производная dS_1/dy_1 всегда имеет один и тот же знак, производная dw_1/dy_1 всегда положительна, так что w_1 будет возрастающей функцией от y_1. Если y_1 возрастает на 2π, то эта функция возрастает также на 2π.

Отсюда следует, что верно и обратное: y_1 является возрастающей функцией от w_1. Эта функция возрастает на 2π, если w_1 возрастает на 2π.

Следовательно, можно записать, что

$$y_1 = w_1 + \eta,$$

где η — функция от w_1 с периодом 2π.

Если не предполагать больше, что $\mu = 0$, то первыми членами разложений

$$x_i,\ y_1,\ y_k$$

будут соответственно

$$x_i^0,\quad w_1 + \eta,\quad w_k - \frac{dx_1^0}{dx_k^0}\eta.$$

Следующие члены будут периодическими по w, в результате чего x_i и $y_i - w_i$ будут периодическими функциями от w_i.

Мы уже видели, что w должны быть линейными функциями времени, так что

$$w_i = n_i t + \varpi_i,$$

где ϖ_i — произвольные постоянные интегрирования.

Нам остается найти величины n_i.

Для этого рассмотрим уравнение (2) в п. 204. Для его правой части C имеем

$$C = C_0 + C_2\mu + C_4\mu^2 + \ldots,$$

C_0 зависит от x_k^0; $C_4, C_6, \ldots$ зависят от C_2 и x_k^0. Постоянные x_k^0 мы выбирали произвольно, но одинаковым образом для всех C.

Отсюда следует, что C является функцией постоянных C_2 и x_k^0.

С помощью метода Якоби мы получим

$$\theta_1 n_1 = -\frac{dC}{dC_2}, \tag{3}$$

$$n_k + \theta_k n_1 = -\frac{dC}{dx_k^0}.$$

Поскольку θ и C заданы как функции C_2 и x_k^0, эти уравнения позволяют найти n_i в виде функций тех же переменных.

Замечу, что в силу того, что C и θ разлагаются по степеням $\sqrt{\mu}$, функции n_i также должны обладать тем же свойством.

Первый член разложения θ_1 равен $\gamma\sqrt{\mu}$, первый член разложения dC/dC_2 равен μ, первый член разложения n_1 равен

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\gamma},$$

в силу чего n_1 будет обращаться в нуль при $\mu = 0$, как и следовало ожидать. Наоборот, из второго уравнения (3) мы получаем при $\mu = 0$

$$n_k = -\frac{dC_0}{dx_k^0} = n_k^0.$$

Следовательно, первый член разложения n_k равен n_k^0.

Случай либрации

214. Переходим ко второму случаю, когда производная dS_1/dy_1 может обращаться в нуль и принимает не только вещественные значения.

Прежде всего обратим внимание на то, что было особенно полезно нам в предыдущем пункте — на вид функции S. Я утверждаю, что производные

$$\frac{dS_p}{dy_1}, \frac{dS_p}{dy_2}, \ldots, \frac{dS_p}{dy_n}$$

будут иметь вид

$$\sum \frac{A}{\left(\frac{dS_1}{dy_1}\right)^q} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (p_2y_2 + p_3y_3 + \ldots + p_ny_n), \qquad (\alpha)$$

где q, p_2, p_3, ..., p_n — целые числа, A — периодическая функция от y_1, не обращающаяся в бесконечность.

Сразу же ясно, что:

1) сумма или произведение двух функций вида (α) также будет иметь вид (α);

2) производная функции вида (α) либо по y_1, либо по y_2, ..., либо по y_n также будет иметь вид (α).

Поэтому мы предположим, что все производные

$$\frac{dS_1}{dy_i}, \frac{dS_2}{dy_i}, \ldots, \frac{dS_{p-1}}{dy_i}$$

имеют вид (α) и попытаемся установить, что производные dS_p/dy_i также будут иметь вид (α).

В самом деле, эти производные получаются из уравнения вида

$$\sum_{k=2}^{n} n_k^0 \frac{dS_p}{dy_k} = \Phi, \qquad (\beta)$$

где Φ, представляющая собой линейную комбинацию функций вида (α),

также будет иметь вид (α). Из уравнения (β) получим

$$\frac{dS_p}{dy_2}, \quad \frac{dS_p}{dy_3}, \ldots, \quad \frac{dS_p}{dy_n}, \quad S_p - [S_p].$$

Ясно, что все эти функции будут иметь вид (α).

Из этого следует, что

$$\frac{d[S_p]}{dy_1}\frac{dS_p}{dy_1} = [\Phi],$$

где $[\Phi]$ имеет вид (α). Следовательно, тот же вид имеет и $d[S_p]/dy_1$, а следовательно, и dS_p/dy_1, что и требовалось доказать.

Несмотря на то, что функция S имеет теперь более сложный вид, мы могли бы записать уравнения (2) предыдущего пункта и найти из них x и y как функции w. Однако можно поступить проще.

В самом деле, в п. 206 мы видели, что, произведя замену переменных и перейдя от переменных x_i и y_i к переменным u_1, v_1, x_k' и z_k, мы получим уравнения, вполне аналогичные уравнениям п. 134. Следовательно, к нашим уравнениям можно будет применить те выводы, к которым мы пришли в этом пункте, а также все, что говорилось по поводу задачи п. 134 в главах XIV и XV.

Отсюда следует, что эти уравнения можно решить, взяв в качестве u_1, v_1, x_i' и z_i функции от n постоянных интегрирования и n линейных функций времени

$$w_1, \ w_2, \ \ldots, \ w_n,$$

причем таких, что

$$u_1, \quad v_1 - w_1, \quad x_k' \quad \text{и} \quad z_k - w_k$$

будут периодическими функциями от w, допускающими разложение по степеням $\sqrt{\mu}$.

Затем мы вернемся к исходным переменным и увидим, что

$$x_i, \quad y_1 \quad \text{и} \quad y_k - w_k \qquad (k > 1)$$

являются периодическими функциями от w.

Кроме того,

$$w_i = n_i v + \varpi_i,$$

где ϖ_i — постоянные интегрирования, а n_i разлагаются по степеням $\sqrt{\mu}$.

Первый член разложения n_i равен n_i^0, а поскольку постоянная n_1^0 равна нулю, разложение n_1 начинается с члена, содержащего $\sqrt{\mu}$.

Все эти ряды получают из функции V, определенной в п. 206.

Сама функция V зависит от переменных второго ряда

$$\nu_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$$

и, кроме того, от n постоянных интегрирования

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n,$$

причем так, что

$$V - \lambda_1\nu_1 - \lambda_2 z_2 - \lambda_3 z_3 - \ldots - \lambda_n z_n$$

представляет собой периодическую функцию от ν_1 и z_k.

Затем с помощью уравнений

$$u_1 = \frac{dV}{d\nu_1}, \qquad x_k' = \frac{dV}{dz_k}, \qquad w_i = \frac{dV}{d\lambda_i} \tag{4}$$

находим переменные u_1, ν_1, x_k' и z_k как функции от λ и w.

Способ получения уравнений (4) из уравнений (2) предыдущего пункта достаточно сложен, поэтому я коротко остановлюсь на нем.

Имеем

$$dV = u_1 d\nu_1 + \Sigma x_k' dz_k + \Sigma w_i d\lambda_i.$$

Удобно считать, что индексы k пробегают значения от 2 до n, а индексы i от 1 до n.

С другой стороны,

$$dT = \Sigma x_i dy_i + \sqrt{\mu}\,\Sigma z_i dx_i'$$

и

$$\nu_1 du_1 = z_1 dx_1',$$

откуда

$$dT = \Sigma x_i dy_i + \sqrt{\mu}\,\Sigma z_k dx_k' + \sqrt{\mu}\nu_1 du_1.$$

Если положить

$$S = V\sqrt{\mu} + T - \sqrt{\mu}\,(\Sigma z_k x_k' + u_1\nu_1), \tag{5}$$

то путем несложных вычислений получим

$$dS = \Sigma x_i dy_i + \sqrt{\mu}\,\Sigma w_i d\lambda_i,$$

так что (представив S в виде функции от y_i и λ_i) будем иметь

$$x_i = \frac{dS}{dy_i}, \qquad w_i\sqrt{\mu} = \frac{dS}{d\lambda_i}. \tag{6}$$

Эти постоянные замены переменных могут привести к недоразумениям, поэтому я остановлюсь на них несколько подробнее:

функция V зависит от ν_1, z_k, λ_i,
функция T зависит от u_1, x_k', y_i,
функция S зависит от λ_i и y_i.

Таким образом, у нас имеется $6n$ переменных, а именно:

$$x_i, y_i, u_1, \nu_1, x_k', z_k, \lambda_i, w_i.$$

Однако эти переменные связаны между собой $4n$ соотношениями

$$x_i = \frac{dT}{dy_i}, \qquad \sqrt{\mu} z_k = \frac{dT}{dx_k'}, \qquad \sqrt{\mu}\nu_1 = \frac{dT}{du_1},$$

$$u_1 = \frac{dV}{d\nu_1}, \qquad x_k' = \frac{dV}{dz_k}, \qquad w_i = \frac{dV}{d\lambda_i},$$

поэтому в действительности имеется только $2n$ независимых переменных. Это позволяет нам каждую из функций S, V, T выразить через $2n$ надлежаще выбранных переменных.

Функция V обладает следующим характеристическим свойством: если одному из переменных z_k придать приращение 2π, оставляя остальные переменные ν, z и λ без изменений, то функция V получит приращение $2\pi\lambda_k$.

В самом деле, мы знаем, что производные V по ν_1 и z_k периодичны по этим переменным.

В то же время z_k переходит в $z_k + 2\pi$; остальные переменные z, ν_1 и λ не изменяются. Что же при этом происходит?

Переменные u_1 и x_k' остаются без изменений, поскольку, как я только что сказал, производные V периодичны.

Чтобы понять, во что переходит y_i, воспользуемся уравнениями

$$\sqrt{\mu} z_k = \frac{dT}{dx_k'}, \qquad \sqrt{\mu}\nu_1 = \frac{dT}{du_1}.$$

Эти уравнения, представляющие собой не что иное, как уравнения (16) п. **206**, показывают, что если z_k возрастает на 2π, то y_k также возрастает на 2π, в то время как остальные y_i остаются без изменений.

При тех же условиях T возрастает на $2\pi\,(x_k^0 + \sqrt{\mu} x_k')$, $z_k x_k'$ возрастает на $2\pi x_k'$ и, следовательно, S возрастает на

$$2\pi\,(x_k^0 + \sqrt{\mu}\lambda_k).$$

Отсюда видно, что производные S по y периодичны относительно $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Таким образом, функция S, определяемая уравнением (5), обладает характеристическим свойством функций, изученных в пунктах **204**, **205** и **207**.

Однако она имеет и одно важное отличие.

Функция S предыдущего пункта зависит не только от переменных y_i, но и от n постоянных

$$x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0, C_2.$$

Подробный анализ, проведенный в пунктах **204** и **205**, показывает, что все функции S, производные которых периодичны, можно получать из названной выше функции, заменяя n произвольных постоянных на произвольные функции других n постоянных.

Функция же S, определяемая уравнением (5), зависит от переменных y_i, n постоянных λ_i, но она, кроме того, зависит и от постоянных x_i^0, ибо x_i^0 фигурируют в функции T и, следовательно, участвуют в замене переменных, о которой говорилось в п. **206**. Отличие состоит лишь в том, что в п. **206**, так же, как и в предыдущих вычислениях, мы рассматривали x_i^0 как абсолютные постоянные, именно по этой причине в выражении dV входят дифференциалы $d\lambda_i$, а дифференциалы dx_i^0 не входят.

Кроме того, замечу, что при замене y_k на $y_k + 2\pi$ функция S предыдущего пункта возрастает на $2\pi x_k^0$, в то время как функция S, определяемая уравнением (5), возрастает на $2\pi(x_k^0 + \sqrt{\mu}\lambda_k)$.

Отсюда я заключаю, что функцию S, определяемую из уравнения (5), можно получить из функции S предыдущего пункта заменой постоянных x_k^0 на $x_k^0 + \sqrt{\mu}\lambda_k$, а постоянной C_2 — некоторой функцией

$$\varphi(x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0, \lambda_2 \lambda_3, \ldots, \lambda_n).$$

Сравним теперь уравнения (2) с уравнениями (6). Мы получим

$$\frac{dS}{d\lambda_1} = \frac{dS}{dC_2}\frac{d\varphi}{d\lambda_1},$$
$$\frac{dS}{d\lambda_k} = \frac{dS}{dC_2}\frac{d\varphi}{d\lambda_k} + \sqrt{\mu}\frac{dS}{dx_k^0},$$

откуда, учитывая уравнения (2) и (6),

$$w_1\sqrt{\mu} = \theta_1 w_1 \frac{d\varphi}{d\lambda_1},$$
$$w_k\sqrt{\mu} = \theta_1 w_1 \frac{d\varphi}{d\lambda_k} + \sqrt{\mu}(w_k + \theta_k w_1).$$

Отсюда следует

$$\theta_1 = \frac{\sqrt{\mu}}{(d\varphi/d\lambda_1)}, \qquad \theta_k = -\frac{(d\varphi/d\lambda_k)}{(d\varphi/d\lambda_1)}. \tag{7}$$

Следовательно, от уравнений (2) к (6) можно перейти, взяв вместо x_k^0 и C_2 соответственно $x_k^0 + \sqrt{\mu}\lambda_k$ и φ, а вместо θ — их выражения (7).

Предельный случай

215. Перейдем, наконец, к предельному случаю, когда C_2 равна максимуму $[F_1]$.

Замечу прежде всего, что мы всегда можем предполагать выполнение равенства

$$F = \frac{dF}{dy_1} = \frac{dF}{dy_i} = \frac{dF}{dx_1} = 0$$

при $x_1 = x_i = y_1 = 0$.

Следовательно, разложения функций F_1, F_2, ... по степеням x_1, x_i и y_1 не содержат члена нулевого порядка, а единственными членами первого порядка будут те, которые содержат x_2, x_3, ..., x_n.

В самом деле, если бы это было неверно, то, совершив замену переменных пунктов 208 и 210, мы могли бы свести рассматриваемый случай к такому случаю, когда это предположение выполняется.

Отсюда следует, что если произвольным постоянным приданы следующие значения:

$$x_2^0 = x_3^0 = \ldots = x_n^0 = 0 \quad (\text{откуда} \quad x_1^0 = C_0 = 0),$$
$$C_2 = C_4 = \ldots = C_6 = 0,$$

то мы приходим именно к предельному случаю, а функция S такова, что при $y_1 = 0$ производные dS_p/dy_1 имеют простой, а производные dS_p/dy_i ($i > 1$) двукратный нуль. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, что при вычислениях в пунктах 208 и 210 мы получили после замены переменных уравнения, полностью аналогичные уравнениям (3) п. 204, которые отличались от последних лишь тем, что входящие в них буквы имели штрихи, а *все постоянные C_p были равны нулю* (ср. с изложенным в п. 208). Придадим теперь постоянным x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0 другие значения, близкие к нулю. Кроме того, постоянные C_2, C_4, C_6, ... можно выбрать так, чтобы C_2 была равна максимуму $[F_1]$ и выполнялись условия (28) п. 207, при этом функции S_1, S_2, ..., S_p по-прежнему будут конечными.

Значения C_2, C_4, C_6, ..., удовлетворяющие этим условиям, представляют собой голоморфные функции от x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0, такие, что

$$C_p = \varphi_p(x_2^0, x_3^0, \ldots x_n^0).$$

Как мы только что видели, при

$$x_2^0 = x_3^0 = \ldots, = x_n^0 = 0$$

эти функции должны обращаться в нуль.

Итак, мы нашли функцию S, зависящую от $n-1$ произвольной постоянной

$$x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0.$$

Эта функция имеет вид

$$S = \beta_1 y_1 + x_2^0 y_2 + x_3^0 y_3 + \ldots + x_n^0 y_n + S', \tag{8}$$

где β_1 — постоянная, а S' можно разложить по синусам и косинусам линейных комбинаций

$$\frac{y_1}{2}, y_2\, y_3, \ldots, y_n.$$

Кроме того, эта функция голоморфна по x_k^0, и если положить

$$x_2^0 = x_3^0 = \ldots = x_n^0 = 0,$$

то производная dS/dy_1 имеет при $y_1 = 0$ простой, а остальные производные dS/dy_i двойной нуль.

Чтобы найти функцию S, зависящую от n произвольных постоянных, я положу

$$\begin{aligned} C_0 &= \varphi_0(x_2^0, \ldots, x_n^0), \\ C_2 &= \lambda + \varphi_2(x_2^0, \ldots, x_n^0), \\ C_4 &= \varphi_4(x_2^0, \ldots, x_n^0), \\ C_6 &= \varphi_6(x_2^0, \ldots, x_n^0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Таким образом, я получу функцию S, зависящую от n постоянных

$$\lambda, x_2^0, \ldots, x_n^0.$$

В силу сказанного в начале предыдущего пункта производные такой функции S будут иметь вид (α).

Можно высказать и некоторые другие утверждения. Пусть

$$\frac{A}{\left(\frac{dS_1}{dy_1}\right)^q} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (p_2 y_2 + p_3 y_3 + \ldots + p_n y_n)$$

— один из членов производных такой функции, приведенных к виду (α). Я утверждаю, что числитель A не зависит от λ.

Это вытекает из того, что постоянные $C_4, C_5, \ldots$ не зависят от λ.

Чтобы доказать рассматриваемое утверждение, условимся для краткости говорить, что выражение имеет вид (α'), если оно имеет вид (α) и если, кроме того, числитель A не зависит от λ.

Предположим, что производные

$$\frac{dS_1}{dy_i}, \frac{dS_2}{dy_i}, \ldots, \frac{dS_{p-1}}{dy_i}$$

приведены к виду (α'). Тогда dS_p/dy_i также имеет вид (α').

В самом деле, правая часть уравнения (β) в предыдущем пункте имеет вид (α'), отсюда следует, что этим же свойством будут обладать и

$$\frac{dS_p}{dy_2}, \quad \frac{dS_p}{dy_3}, \ldots, \quad \frac{dS_p}{dy_n}, \quad S_p - [S_p].$$

Я утверждаю, что вид (α') будет иметь и

$$\frac{dS_p}{dy_1} - \frac{d[S_p]}{dy_1},$$

т. е. производная по y_1 от выражения, имеющего вид (α'), также будет иметь вид (α'). В самом деле, пусть

$$\sum A \left(\frac{dS_1}{dy_1}\right)^{-q} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\omega)$$

— такое выражение, где через ω я кратко обозначил

$$p_2y_2 + \ldots + p_ny_n.$$

Производная имеет вид

$$\sum \frac{dA}{dy_1}\left(\frac{dS_1}{dy_1}\right)^{-q} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\omega) - \sum \frac{q}{2} A \frac{d}{dy_1}\left(\frac{dS_1}{dy_1}\right)^2 \left(\frac{dS_1}{dy_1}\right)^{-q-2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\omega). \tag{9}$$

Если A не зависит от λ, то dA/dy_1 также не зависит от λ. С другой стороны, $(dS_1/dy_1)^2$ равен с точностью до постоянного множителя

$$\lambda + \varphi - [F_1].$$

Следовательно, производная этого квадрата

$$\frac{d}{dy_1}\left(\frac{dS_1}{dy_1}\right)^2$$

не зависит от λ и выражение (9) имеет вид (α'), что и требовалось доказать.

Итак, правая часть уравнения (γ) предыдущего пункта имеет вид (α). Следовательно, вид (α') имеют также

$$\frac{d[S_p]}{dy_1} \quad \text{и} \quad \frac{dS_p}{dy_1}.$$

Следовательно, функция S записывается в виде

$$S = \Sigma A \left(\frac{dS_1}{dy_1}\right)^{-q} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\omega) + \int \Sigma A_1 \left(\frac{dS_1}{dy_1}\right)^{-q} dy_1 + x_2^0 y_2 + x_3^0 y_3 + \ldots + x_n^0 y_n. \tag{10}$$

Если постоянные

$$\lambda, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0$$

в этом выражении положить равными нулю, то $y_1 = 0$ будет нулем кратности $q + 2$ для A и кратности $q + 1$ для A_1. Это необходимо для того, чтобы производные dS/dy_k имели двукратный, а производная dS/dy_1 простой нуль.

Установив это, рассмотрим следующие уравнения, аналогичные уравнениям (2) в п. **213**

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{dS}{dy_i}, \\ \theta_1 w_1 &= \frac{dS}{d\lambda}, \\ w_k + \theta_k w_1 &= \frac{dS}{dx_k^0}, \end{aligned} \tag{2bis}$$

В этих выражениях *после дифференцирования* надлежит положить

$$\lambda = x_k^0 = 0.$$

Но ничто не мешает *до дифференцирования* положить

$$\lambda = x_k^0 = 0$$

в первом уравнении (2bis),

$$x_k^0 = 0$$

— во втором и

$$\lambda = 0$$

— в третьем уравнении.

Важно лишь не обращать в нуль до дифференцирования ту переменную, *по которой проводится дифференцирование.*

Из первого уравнения (2bis) мы видим, что x_i разлагаются по синусам и косинусам линейных комбинаций

$$\frac{y_1}{2}, y_2, y_3, \ldots, y_n$$

с целыми коэффициентами.

Рассмотрим теперь третье уравнение (2bis). Ясно, что если положить $\lambda = 0$, то S примет вид (8), и после дифференцирования мы получим

$$\frac{dS}{dx_k^0} = y_1 \frac{d\beta_1}{dx_k^0} + y_k + \frac{dS'}{dx_k^0},$$

откуда

$$w_1\theta_k + w_k = y_1 \frac{d\beta_1}{dx_k^0} + y_k + \frac{dS'}{dx_k^0}. \tag{11}$$

Последнее слагаемое в правой части можно разложить по синусам и косинусам линейных комбинаций

$$\frac{y_1}{2}, y_2, y_3, \ldots, y_n$$

с целыми коэффициентами.

Перейдем ко второму уравнению (2bis). Чтобы найти $dS/d\lambda$, я продифференцирую уравнение (10), предварительно положив $x_k^0 = 0$.

Тогда

$$\frac{dS_1}{dy_1} = D\sqrt{\lambda - [F_1]}$$

(D — постоянная), ибо φ_2 равно нулю.

Следовательно,

$$\frac{dS}{d\lambda} = -\sum_q \frac{AD^2}{2}\left(\frac{dS_1}{dy_1}\right)^{-q-2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\omega) + \int \sum_q \frac{A_1D^2}{2}\left(\frac{dS_1}{dy_1}\right)^{-q-2} dy_1. \tag{12}$$

После дифференцирования положим $\lambda = 0$. Тогда при $y_1 = 0$ производная dS_1/dy_1 имеет простой нуль, A — нуль кратности $q + 2$, а A_1 — нуль кратности $q + 1$. Отсюда следует, что правая часть уравнения (12) остается конечной, но величина, стоящая в правой части под знаком интеграла, при $y_1 = 2k\pi$ обращается в бесконечность, так что ее можно представить в виде

$$\frac{\alpha}{2\sin\frac{y_1}{2}} + f(y_1),$$

где $f(y_1)$ — конечная периодическая функция.

Сам интеграл при $y_1 = 0$, $y_1 = 2\pi$, ... имеет логарифмическую расходимость. Под этим я понимаю, что его можно представить в виде

$$\alpha \ln \operatorname{tg}\frac{y_1}{4} + \psi,$$

где ψ — некоторая функция, зависящая от y_1 и не обращающаяся в бесконечность при всех значениях y_1, а α — постоянная. Итак,

$$\frac{dS}{d\lambda} = \alpha \ln \operatorname{tg}\frac{y_1}{4} + \gamma y_1 + \Theta,$$

где γ — новая постоянная, Θ — функция, допускающая разложение по синусам и косинусам линейных комбинаций

$$\frac{y_1}{2}, y_2, y_3, \ldots, y_n,$$

откуда

$$w_1\theta_1 = \alpha \ln \operatorname{tg} \frac{y_1}{4} + \gamma y_1 + \Theta. \tag{13}$$

Теперь речь пойдет о том, чтобы воспользоваться уравнениями (11) и (13) и выразить y через w.

Разложив правые части уравнений (11) и (13) по степеням $\sqrt{\mu}$, найдем первые члены разложения.

В правой части уравнения (13) член, не зависящий от $\sqrt{\mu}$, будет равен нулю; в правой же части уравнения (11) такой член будет равен

$$\frac{dx_1^0}{dx_k^0} y_1 + y_k.$$

Что же касается членов, содержащих $\sqrt{\mu}$, то в правых частях уравнений (11) и (13) они равны соответственно

$$\sqrt{\mu}\frac{dS_1}{dx_k^0} \quad \text{и} \quad \sqrt{\mu}\frac{dS_1}{d\lambda}.$$

Относительно первой из этих величин я замечу лишь, что она зависит только от y_1 и не зависит от $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Что же касается второй величины, то, положив после дифференцирования $\lambda = x_k^0 = 0$, получим

$$\frac{dS_1}{d\lambda} = \frac{D}{2}\int \frac{dy_1}{\sqrt{-F_1}}.$$

Установив это, рассмотрим правые части уравнений (11) и (13).

Они представляют собой n функций, зависящих от $y_1, y_2, \ldots, y_n$; функциональный определитель Δ этих функций по $y_1, y_2, \ldots, y_n$ делится на $\sqrt{\mu}$. Однако если поделить его на $\sqrt{\mu}$, затем (после деления) положить $\mu = 0$, то этот функциональный определитель будет равен

$$\frac{D}{2\sqrt{-F_1}}.$$

В силу того, что F_1 никогда не обращается в бесконечность, это выражение не обращается в нуль ни при каком наборе значений y.

Следовательно, Δ не обращается в нуль и при достаточно малом μ.

Однако Δ может обращаться в бесконечность. В самом деле, при $y_1 = 2k\pi$ правые части уравнений (11) и (13) обращаются в бесконечность.

Отсюда следует, что если придавать $y_2, y_3, \ldots, y_n$ всевозможные значения, а y_1 изменять от 0 до 2π, то Δ не изменит знака.

Возьмем для простоты

$$\theta_1 = 1, \ \theta_k = 0$$

так, что уравнения (11) и (13) запишутся в виде

$$w_k = y_1 \frac{d\beta_1}{dx_k^0} + y_k + \frac{dS'}{dx_k^0}, \tag{11}$$

$$w_1 = \alpha \ln \operatorname{tg} \frac{y_1}{4} + \gamma y_1 + \Theta. \tag{13}$$

Ввиду наличия логарифмического члена w_1 изменяются от $-\infty$ до $+\infty$, если y_1 изменяется от 0 до 2π.

Итак, придавая переменным y_k всевозможные значения, а y_1 — значения от 0 до 2π, мы получим всевозможные значения w. Кроме того, мы видели, что при этих условиях определитель Δ не меняет знака.

Следовательно, y являются *однозначными* функциями от w при всех вещественных значениях w. В самом деле, исходя из уравнений (11) и (13) и применяя теорему п. 30, можно разложить y по степеням

$$w_1 - h_1, \ w_2 - h_2, \ \ldots, \ w_n - h_n,$$

где $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — некоторые постоянные, поскольку функциональный определитель в нуль никогда не обращается.

Добавлю, что

$$y_1, \ y_2 - w_2, \ y_3 - w_3, \ \ldots, \ y_n - w_n$$

являются периодическими функциями от

$$w_2, \ w_3, \ \ldots, \ w_n.$$

В самом деле, если заменить y_k на $y_k + 2\pi$, то w_k перейдет в $w_k + 2\pi$. Далее, из первого уравнения (2bis) мы видим, что x_i также представляют собой однозначные функции от w, периодические относительно

$$w_2, \ w_3, \ \ldots, \ w_n.$$

Если w_1 стремится к $\pm\infty$, y_1 стремится к 0 или к 2π. Необходимо рассмотреть, во что переходят уравнения (11) и (13), если, например, положить

$$w_1 = \infty, \qquad y_1 = 0.$$

Уравнение (13) теряет смысл. Уравнение (11) запишется в виде

$$w_k = y_k + \frac{dS'}{dx_k^0}.$$

Отсюда мы получим $y_2, y_3, \ldots, y_n$ в виде функций от $n-1$ аргумента

$$w_2, w_3, \ldots, w_n.$$

Нетрудно видеть, что разность $y_k - w_k$ периодична относительно $w_2, w_3, \ldots, w_n$. Итак, пусть

$$y_k = w_k + \eta_k (w_2, w_3, \ldots, w_n).$$

Если в первом уравнении (2bis) положить $y_1 = 0$, то оно примет вид

$$x_i = 0.$$

Следовательно, полагая

$$x_1 = x_i = y_1 = 0, \quad y_k = w_k + \eta_k, \tag{14}$$

мы находим частное решение уравнений (2bis).

Смысл уравнений (14) очевиден. В п. 209 мы обобщили понятие периодического решения. В самом деле, мы выписали инвариантные соотношения

$$x_1 = \eta, \quad y_1 = \zeta, \quad x_i = \xi_i.$$

В рассматриваемом случае эти инвариантные соотношения в силу предположения, сделанного в начале данного пункта, примут вид

$$x_1 = y_1 = x_i = 0.$$

В этих соотношениях мы узнаем три первых уравнения (14).

Таким образом, четыре уравнения (14) доставляют нам в новом виде обобщение периодических решений. Очевидно, что x_i, y_1, и $y_k - w_k$ представлены в виде периодических функций от $n-1$ аргумента

$$w_k = n_k t + \varpi_k.$$

В том частном случае, когда имеется только две степени свободы, остается только один аргумент w_2.

Тогда x_1, x_2, y_1 и $y_2 - w_2$ оказываются периодическими функциями от w_2 и, следовательно, от времени. В этом случае мы приходим просто к периодическим решениям, определенным в главе III.

Замечательным следствием этого обстоятельства является то, что в случае двух степеней свободы разложения (14) *сходятся*, в то время как при числе степеней свободы, большем двух, они имеют смысл лишь с точки зрения формального анализа.

216. Рассмотрим, в частности, что происходит, если w_1 отрицательно и очень велико. Соответствующие значения y_1 будут очень малыми, следовательно, правую часть уравнения (11) можно будет разложить по возрастающим степеням y_1.

Что же касается уравнения (13), то мы преобразуем его следующим образом:

$$e^{\frac{w_1}{\alpha}} = \operatorname{tg}\frac{y_1}{2}\, e^{\frac{\gamma y_1}{2}} e^{\frac{\Theta}{\alpha}}. \tag{13bis}$$

Если α положительна (для большей ясности я так и буду предполагать) и если w_1 имеет очень большое отрицательное значение, то экспонента

$$e^{\frac{w_1}{\alpha}}$$

будет очень мала. Что же касается правой части уравнения (13bis), то ее можно будет разложить по степеням y_1.

Итак, запишем наши уравнения в виде

$$w_k = y_k + \psi_k, \tag{11bis}$$

$$e^{\frac{w_1}{\alpha}} = \psi_1. \tag{13bis}$$

Если ψ разложить по степеням y_1 и $\sqrt{\mu}$, то каждый из членов разложения будет периодическим относительно

$$y_2, y_3, \ldots, y_n.$$

Итак, можно считать, что обе части уравнений (11bis) и (13bis) разложены по степеням y_1, $\sqrt{\mu}$ и $e^{w_1/\alpha}$.

Заметим, что величину α можно разложить по степеням $\sqrt{\mu}$. Пусть

$$\alpha_1 \sqrt{\mu}$$

— первый член этого разложения. С другой стороны, первый член разложения γ и Θ будет содержать $\sqrt{\mu}$, так что разложения γ/α и Θ/α начинаются с члена, не зависящего от $\sqrt{\mu}$.

Если в уравнениях (11bis) и (13bis) положить $\mu = 0$, то они запишутся в виде

$$w_k = y_k + \frac{dx_1^0}{dx_k^0}\, y,$$

$$e^{\frac{w_1}{\alpha}} = e^{\frac{dS_1}{\alpha_1 d\lambda}}.$$

Функциональный определитель правых частей этих уравнений по y_1, $y_2, \ldots, y_n$ при $y_1 = 0$ будет равен 1. Это позволяет нам применить теоремы п. 30.

Отсюда следует, что при всех значениях

$$w_2, w_3, \ldots, w_n$$

переменные y можно будет разлагать по степеням $\sqrt{\mu}$ и $e^{iw_1/\alpha}$. Коэффициенты этих разложений будут функциями от

$$w_2, w_3, \ldots, w_n.$$

Чтобы найти вид этих функций, заметим, что если y_k переходит в $y_k + 2\pi$, то w_k перейдет также в $w_k + 2\pi$.

Мы заключаем, что

$$y_1 \quad \text{и} \quad y_k - w_k$$

допускают разложение в ряд по степеням

$$\sqrt{\mu} \quad \text{и} \quad e^{iw_1/\alpha},$$

коэффициенты которого будут периодическими функциями от

$$w_2, w_3, \ldots, w_n.$$

Далее из первого уравнения (2bis) непосредственно видно, что x можно разлагать в ряды того же вида.

Мы предполагали, что w_1 — большое отрицательное число, а y_1 мало отличается от нуля. Если теперь вместо этого предположить, что w_1 положительно и очень велико, а y_1 мало отличается от 2π, то мы придем к тому же результату. Единственное отличие будет заключаться в том, что ряды будут расположены не по

$$\sqrt{\mu} \quad \text{и} \quad e^{iw_1/\alpha},$$

а по

$$\sqrt{\mu} \quad \text{и} \quad e^{-iw_1/\alpha}.$$

Обратимся снова к тому случаю, когда w_1 отрицательно и очень велико, а y_1 мало отличается от нуля, и предположим, что имеются лишь две степени свободы.

В этом случае мы имеем только два аргумента

$$w_1 \text{ и } w_2$$

и наши ряды располагаются по степеням $\sqrt{\mu}$ и $e^{iw_1/\alpha}$ и по синусам и косинусам дуг, кратных w_2. Поскольку аргументы w_1 и w_2 линейно зависят от

времени, наши ряды будут расположены по степеням $\sqrt{\mu}$ и экспоненты, показатель которой пропорционален времени, причем коэффициенты различных членов являются периодическими функциями времени. Следовательно, наши ряды ничем не отличаются от рядов, рассмотренных в главе VII, которые определяют *асимптотические решения*.

Отсюда ясно, что результаты главы VII применимы и в нашем случае.

Если рассматриваемые ряды будут по-прежнему располагаться по степеням $\sqrt{\mu}$ и экспоненты, то они не будут сходиться. Поэтому эти ряды будут иметь смысл только с точки зрения формального анализа. Если же их расположить по возрастающим степеням одной лишь экспоненты (объединяя, следовательно, в один член все те, которые содержат одну и ту же степень экспоненты, но разные степени $\sqrt{\mu}$), то *ряды станут сходящимися*. Если ту же операцию произвести в том случае, когда число степеней свободы больше двух, то ряды сходящимися не станут.

217. В начале п. 215 я высказал несколько предположений по поводу функции F. Я предположил, что

$$F = \frac{dF}{dy_1} = \frac{dF}{dy_i} = \frac{dF}{dx_1} = 0$$

при

$$x_1 = x_i = y_1 = 0.$$

Кроме того, я заметил, что если функция F не удовлетворяет этим условиям, то достаточно произвести замену переменных пунктов 208 и 210, чтобы эти условия оказались выполненными.

Итак, предположим, что функция F не удовлетворяет этим условиям.

Произведем указанную в п. 210 замену старых переменных x_i и y_i на новые переменные x_i' и y_i'. Имеем

$$x_1 = x_1' + \eta, \quad y_1' = y_1 - \zeta, \quad y_i' = y_i,$$
$$x_i = x_i' + \xi_i - y_1' \frac{d\eta}{dy_i} - x_1' \frac{d\xi}{dy_i} \tag{1}$$

(ср. с началом п. 210).

Заключения двух последних пунктов остаются в силе и в новых переменных, следовательно,

$$x_1', x_k', y_1', y_k' - w_k$$

можно представить в виде рядов, расположенных по степеням $\sqrt{\mu}$ и косинусам и синусам линейных комбинаций

$$w_2, w_3, \ldots, w_n,$$

коэффициенты которых по w_1 определяются однозначно. Эти однозначные функции разлагаются, когда w_1 достаточно велико, по степеням $e^{w_1/\alpha}$, если w_1 отрицательно, и по степеням $e^{-w_1/\alpha}$, если w_1 положительно.

Следовательно, соотношения (1), связывающие переменные x_i и y_i с переменными x_i' и y_i' позволяют заключить, что и

$$x_1, x_k, y_1, y_k - w_k$$

разлагаются в ряды того же вида.

Единственное отличие этих рядов состоит в том, что при $w_1 = -\infty$ x_1', x_k' и y_1' равны 0, в то время как x_1, x_k и y_1 в нуль не обращаются.

Если положить $w_1 = -\infty$, то $e^{w_1/\alpha} = 0$, откуда

$$x_1 = \varphi_1, \quad x_k = \varphi_k, \quad y_1 = \varphi_1', \quad y_k = w_k + \varphi_k', \tag{2}$$

где φ_i и φ_i' означают ряды, расположенные по степеням $\sqrt{\mu}$, и тригонометрические по линейным комбинациям

$$w_2, w_3, \ldots, w_n.$$

Исключая $w_2, w_3, \ldots, w_n$ из соотношений (2), мы должны получить

$$x_1 = \eta, \quad y_1 = \xi, \quad x_k = \xi_k,$$

т. е. соотношения п. 209. Если имеются лишь две степени свободы, то соотношения (2) представляют собой не что иное, как периодическое решение (ср. с п. 208).

Аналогично, если положить

$$w_1 = +\infty, \quad \text{откуда} \quad e^{-\frac{w_1}{\alpha}} = 0,$$

то мы получим

$$x_1 = \varphi_1, \quad x_k = \varphi_k, \quad y_1 = \varphi_1' + 2\pi, \quad y_k = w_k + \varphi_k'.$$

Ряды, изучением которых мы занимались в этой главе, можно было бы получить непосредственно с помощью методов, аналогичных методам глав XIV и XV. Несмотря на интерес, который представляет такой подход, я не могу останавливаться на нем, ибо это завело бы нас слишком далеко. Упомяну лишь, что нашу задачу заменой переменных, указанной в п. 206, можно свести к задаче п. 134, к которой методы глав XIV и XV применяются непосредственно.

Сравнение с рядами п. 127

218. В п. 211 мы видели, как можно ряды п. 204 и последующих вывести из рядов п. 125. Я намереваюсь рассмотреть вопрос о том, каким образом ряды настоящей главы можно вывести из рядов п. 127.

Для начала разберем более простой случай, а именно случай п. 199. Уравнения можно тогда записать (опуская ненужный нам индекс 1) в виде

$$x = \sqrt{C - \mu \cos y},$$
$$\theta w = \int \frac{dy}{\sqrt{C - \mu \cos y}}.$$

Здесь $2\pi\theta$ означает вещественный период интеграла, стоящего в правой части. Эти уравнения позволяют вычислить y в виде функции аргументов w, постоянной C и μ.

Если предположить, что μ много меньше C, то разложение можно производить по возрастающим степеням μ и мы получим ряды п. 127. Наоборот, если C сравнима с μ, то мы положим $C = C_1\mu$ и при этом снова получим ряды, подробно рассмотренные в настоящей главе.

Разберем полученный результат более детально. Из уравнений (1) видно, что x, $\cos y$ и $\sin y$ являются двоякопериодическими функциями от θw или, что то же, от w. Пусть ω_1 и ω_2 — два периода (θw мы считаем независимой переменной). Например, период ω_1 равен интегралу в правой части, взятому в пределах от 0 до 2π, а ω_2 равен тому же интегралу, взятому в пределах $\pm \arccos C/\mu$ и умноженному на 2. Кроме того, переменная y не изменяется при замене θw на $\theta w + \omega_2$, а при замене θw на $\theta w + \omega_1$ переменная y переходит в $y + 2\pi$.

Если $C > |\mu|$, то период ω_1 вещественен и следует взять $\theta = \omega_1/2\pi$. В этом случае x и y — w представляют собой периодические функции от w периода 2π. Если параметр μ очень мал по сравнению с C, то разложение можно проводить по степеням μ (что приводит к рядам п. 127), причем каждый член такого разложения будет периодическим с периодом 2π относительно w.

Однако если постоянная C имеет тот же порядок величины, что и μ, и мы положили $C = \mu C_1$, то при том же значении C_1 период ω_1 и коэффициент θ будут пропорциональны $1/\sqrt{\mu}$. Следовательно, если обозначить

$$\theta_0 = \frac{\theta}{\sqrt{\mu}},$$

то уравнения (1) запишутся в виде

$$x = \sqrt{\mu}\sqrt{C_1 - \cos y},$$
$$\theta_0 w = \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 - \cos y}}. \qquad (1\,\text{bis})$$

Второе из этих уравнений не зависит более от μ. Из этих уравнений мы найдем y — w и $x/\sqrt{\mu}$ в виде рядов, расположенных по синусам и косинусам дуг, кратных w. Эти ряды зависят от C_1, но не зависят от μ. Именно эти ряды и рассматривались в настоящей главе.

В самом деле, полученные ранее ряды были расположены по степеням μ. Они аналогичны рядам п. 127 и, как нетрудно видеть, имеют следующий вид:

$$x = \sqrt{C} + \mu C^{-\frac{1}{2}}\varphi_1 + \mu^2 C^{-\frac{3}{2}}\varphi_2 + \mu^3 C^{-\frac{5}{2}}\varphi_3 + \dots,$$
$$y = w + \frac{\mu}{C}\psi_1 + \left(\frac{\mu}{C}\right)^2\psi_2 + \dots, \tag{2}$$

где φ и ψ не зависят ни от μ, ни от C и периодичны (период 2π) относительно w.

Если затем положить $C = C_1\mu$, то y и $x/\sqrt{\mu}$, как я уже говорил, буду зависеть только от C_1, а не от μ.

Итак, чтобы перейти от рядов п. 127 к рядам, рассмотренным в настоящей главе, необходимо положить $C = C_1\mu$, а результат этой подстановки расположить по возрастающим степеням μ. В рассматриваемом нами частном случае полученное таким образом новое разложение будет состоять из одного члена, ибо x содержит лишь члены первого порядка относительно $\sqrt{\mu}$, а y не содержит членов, зависящих от μ.

Если $C_1 > 1$, то величина ω_1 вещественна, а x и $y - w$ являются периодическими функциями от w с периодом 2π. Однако если $C_1 < 1$, то величина ω_1 становится мнимой, а вещественной будет ω_2, вследствие чего необходимо положить $\theta = \omega_2/2\pi$. В этом случае периодическими функциями от w с периодом 2π будут x и y (но не $y - w$).

Если в качестве независимой переменной мы примем w, то определение величины θ будет меняться, если C_1 будет переходить от значений бо́льших единицы к значениям меньшим единицы. Это неудобство можно обойти, если считать независимой переменной $\theta w\sqrt{\mu}$.

В самом деле, если представить x и y в виде функций, зависящих от $\theta w\sqrt{\mu}$ и C_1, то выражения, получающиеся при $C_1 < 1$, будут аналитическими продолжениями выражений, получающихся при $C_1 > 1$.

Итак, взяв ряды (2), т. е. ряды п. 127, и положив $C = C_1\mu$, получим

$$\frac{x}{\sqrt{\mu}} = C_1^{\frac{1}{2}} + C_1^{-\frac{1}{2}}\varphi_1 + C_1^{-\frac{3}{2}}\varphi_2 + \dots,$$
$$y = w + \frac{1}{C_1}\psi_1 + \frac{1}{C_1^2}\psi_2 + \dots. \tag{2bis}$$

Эти ряды сходятся, если C_1 достаточно велико. В этом случае можно найти их сумму. Если же эти ряды расходятся, то функции $x/\sqrt{\mu}$ и y можно все же продолжить аналитически. При этом мы придем к значениям C_1 меньшим 1, а вид самих функций полностью изменится, ибо вещественный период станет мнимым, и наоборот.

Таким образом, именно двоякая периодичность объясняет столь различное поведение функций, с которыми мы столкнулись при рассмотрении задачи: период, вещественный в обычном случае, становится мнимым в случае либрации, и наоборот. В предельном случае один из периодов обращается в бесконечность.

Можно поставить вопрос о том, каким образом эти результаты можно обобщить на случай, когда $F = x^2 + \mu F_1$, где F_1 — *произвольная* функция, зависящая только от y и притом периодически. Уравнения (1) запишутся тогда в виде

$$x = \sqrt{C - \mu F_1}, \tag{1ter}$$

$$\theta w = \int \frac{dy}{\sqrt{C - \mu F_1}}.$$

Пусть максимальное значение F равно A. Если

$$C > A\mu,$$

то мы получаем обычный случай, если же

$$C < A\mu,$$

то случай либрации.

При сделанных предположениях относительно функции F ни x, ни $\cos y$, ни $\sin y$ не будут эллиптическими функциями от w. Следовательно, они не будут однозначными и двоякопериодическими функциями при всех вещественных и мнимых значениях w (хотя, разумеется, будут по-прежнему однозначными функциями при всех *вещественных* значениях w).

Тем не менее предыдущие результаты остаются в силе.

Для наших целей будет достаточно, если мы ограничимся рассмотрением области D, такой, что мнимая часть θw будет достаточно малой, а с другой стороны, постоянная C будет достаточно мало отличаться от $A\mu$.

Если теперь x, $\cos y$ и $\sin y$ рассматривать как функции от θw и от C (или от $\theta w\sqrt{\mu}$ и от $C_1 = C/\mu$), то эти функции будут однозначными и двоякопериодическими, *лишь бы мы не выходили за пределы области* D. Один из периодов равен интегралу, стоящему в правой части второго соотношения (1ter), взятому в пределах от 0 до 2π, а второй — удвоенному этому же интегралу, взятому в пределах от одного значения y_1, при котором μF_1 становится равным C, до другого значения y_1, при котором снова $\mu F_1 = C$.

Этого достаточно для того, чтобы переход от обычного случая к случаю либрации происходил так же, как и в частном случае, рассмотренном нами вначале.

Чтобы облегчить перенесение этих результатов на общий случай, удобно ввести среднее движение n_1, которое я буду обозначать здесь просто n, поскольку индекс 1 не играет роли и будет всюду опускаться.

В силу принципов, изложенных в п. 3, имеем

$$n = \frac{1}{\theta} = \frac{2\pi}{\omega_1}.$$

С другой стороны, если разложить n по степеням μ, как мы уже делали раньше, так что

$$n = n^0 + \mu n^1 + \dots,$$

то при $\mu = 0$

$$\omega_1 = \int \frac{dy}{\sqrt{C}} = \frac{2\pi}{\sqrt{C}},$$

откуда

$$n^0 \Phi = \sqrt{C}.$$

Следовательно, мы можем принять в качестве независимых переменных n^0 и μ вместо C и μ.

В этих переменных ряды (2) будут разлагаться по степеням μ и $1/n^0$, что делает их похожими на ряды, рассмотренные в п. 201, которые содержали члены вида

$$\frac{\mu^p}{(n_1^0)^q} \qquad (q \leqslant 2p - 1).$$

Перейдем, наконец, к общему случаю.

Рассмотрим ряды п. 127. Они представляют собой выражения $2n$ переменных x_i и y_i в виде функций n аргументов

$$w_1, w_2, \dots, w_n$$

и n постоянных интегрирования. Выберем в качестве этих n постоянных интегрирования, например, величины, которые мы обозначили символами

$$n_1^0, n_2^0, \dots, n_n^0.$$

В рядах, расположенных по целым степеням μ, в знаменателях фигурируют малые делители

$$m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 + \dots + m_n n_n^0.$$

Предположим теперь, что один из этих делителей становится очень малым. Пусть таким делителем будет n_1^0 (ибо если бы это был другой делитель, то достаточно было произвести только замену переменных, указанную в п. 202). Рассмотрим прежде всего, каков максимальный показатель n_1^0, встречающийся в знаменателях членов нашего ряда.

В силу сказанного в пунктах 201 и 211, разложение функции S не содержит членов

$$\frac{\mu^p}{(n_1^0)^q},$$

где $q \leqslant 2p-1$.

Если записать затем уравнения

$$x_i = \frac{dS}{dy_i}, \qquad w_i = \frac{dS}{dx_i^0},$$

то в производную dS/dy_i будут входить лишь члены $\mu^p/(n_1^0)^q$, но в производную dS/dx_i^0 среди прочих будут входить и члены

$$\mu^p \frac{d}{dx_i^0}[(n_1^0)^{-q}] = -q\mu^p \frac{dn_1^0}{dx_i^0}(n_1^0)^{-q-1},$$

т. е. члены

$$\frac{\mu^p}{(n_1^0)^{q+1}} \qquad (q \leqslant 2p-1).$$

Из уравнений

$$w_i = \frac{dS}{dx_i^0}$$

мы найдем y_i в виде функций от w_i и x_i^0 или, если угодно, в виде функций от w_i и n постоянных интегрирования

$$n_1^0, n_2^0, \ldots, n_n^0.$$

Отсюда видно, что разложение y содержит лишь члены

$$\frac{\mu^p}{(n_1^0)^{q+1}} \qquad (q \leqslant 2p-1).$$

Подставим затем полученные выражения для переменных y в уравнения

$$x_i = \frac{dS}{dy_i}. \tag{3}$$

В результате подстановки правая часть уравнений (3) будет содержать лишь члены

$$\frac{\mu^p}{(n_1^0)^q}.$$

Пусть

$$\frac{\mu^p}{(n_1^0)^q}\varphi_\alpha(y_1, y_2, \ldots, y_n, n_1^0, n_2^0, \ldots, n_n^0)$$

— один из таких членов, причем функция φ_α при $n_1^0 = 0$ не обращается в бесконечность. После указанной подстановки

$$\varphi_\alpha = \sum \frac{\mu^\lambda}{(n_1^0)^h} \psi(w_i, n_i^0) \qquad (h \leqslant 2\lambda),$$

где функции ψ при $n_1^0 = 0$ в бесконечность не обращаются.

Итак, общий член в правой части уравнений (3) после такой подстановки будет иметь вид

$$\frac{\mu^{p+\lambda}}{(n_1^0)^{q+h}} \psi,$$

и очевидно, что

$$q + h \leqslant 2(p + \lambda) - 1.$$

Общий вывод из всего сказанного состоит в том, что разложения п. 127, определяющие x_i, содержат лишь члены

$$\frac{\mu^p}{(n_1^0)^q},$$

а разложения для y_i — члены вида

$$\frac{\mu^p}{(n_1^0)^{q+1}},$$

где

$$q \leqslant 2p - 1.$$

Установив это, предположим, что величина n_1^0 очень мала и имеет тот же порядок, что и $\sqrt{\mu}$. Пусть

$$n_1^0 = \alpha_1 \sqrt{\mu} + \alpha_2 \mu + \alpha_3 \mu^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$

где α — новые постоянные. Именно так мы поступали в п. 211. Например, можно положить

$$n_1^0 = \alpha_1 \sqrt{\mu}.$$

В результате такой подстановки член

$$\frac{\mu^p}{(n_1^0)^q}$$

не будет более иметь относительно μ порядок p, а будет иметь порядок $p - q/2$.

Сгруппируем затем члены наших рядов, имеющие одинаковые порядки относительно μ. Каждая из таких групп членов образует некоторый частичный ряд, а весь ряд в целом есть сумма всех таких частичных рядов.

Чтобы получить ряды настоящей главы, достаточно просуммировать каждый из этих частичных рядов. Если постоянная α_1 достаточно велика, то частичные ряды сходятся (разумеется, весь ряд будет по-прежнему расходящимся и имеет смысл лишь с точки зрения формального анализа). Однако если α_1 слишком мала для того, чтобы частичные ряды сходились, то, как нетрудно понять, можно найти их сумму с помощью аналитического продолжения.

Дело обстоит так же, как и в случае функции

$$\frac{1}{1+x},$$

задаваемой с помощью ряда

$$1 - x + x^2 + \ldots,$$

которая будет иметь смысл и после того, как ряд станет расходящимся.

Итак, рассмотрим сумму одного из таких частичных рядов. Во-первых, эта сумма будет периодической с периодом 2π относительно w_2, w_3, ..., w_n. Во-вторых, эта сумма будет зависеть еще от одного аргумента $\theta_1 w_1$, причем при вещественных значениях этого аргумента и при тех его значениях, мнимая часть которых достаточно мала, или, иначе говоря, если аргумент $\theta_1 w_1$ остается внутри некоторой области, охватывающей всю вещественную ось, эта зависимость будет однозначной. Если α_1 меняется в определенных пределах, то функция, описывающая указанную зависимость, *внутри этой области* будет однозначной и двоякопериодической. Один из периодов будет вещественным, другой — мнимым. При некотором значении α_1 один из периодов обращается в бесконечность, затем вещественный период становится мнимым, и наоборот.

Именно это и обусловливает переход от обычного случая к случаю либрации.

Глава XXI

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА БОЛИНА

Обобщение задачи п. 134

219. В начале главы XI я разъяснил, какие специфические трудности возникают в задаче трех тел. Эти трудности обусловлены тем, что не все переменные первого ряда, т. е. переменные x_i, входят в функцию F_0.

В главах XI и XIII мы видели, каким образом можно обойти эту трудность и, несмотря на нее, построить функцию S, допускающую разложение по степеням μ, удовлетворяющую уравнению Якоби

$$F = C,$$

и такую, что ее производные по y_i будут периодическими функциями от y_i.

Кроме того, эта функция S зависит от n постоянных интегрирования, например, от n величин

$$n_1^0, n_2^0, \ldots, n_n^0.$$

Если одна из линейных комбинаций

$$m_1 n_1^0 + m_2 n_2^0 + \ldots + m_n n_n^0$$

мала и имеет порядок $\sqrt{\mu}$, то так же, как и в п. 211, мы можем положить

$$n_i = \alpha_i^0 + \alpha_i^1 \sqrt{\mu} + \alpha_i^2 \mu + \ldots,$$

где α_i^p — новые постоянные, и предположить, что

$$m_1 \alpha_1^0 + m_2 \alpha_2^0 + \ldots + m_n \alpha_n^0 = 0.$$

Расположим затем каждый член разложения S по возрастающим степеням $\sqrt{\mu}$ и сгруппируем те члены, которые содержат в качестве сомножителя одинаковую степень $\sqrt{\mu}$. Каждая из таких совокупностей членов будет обладать тем же свойством, что и сама функция S, а именно: ее производные будут периодическими функциями от y.

Поэтому заранее ясно, что метод Болина будет применим и в том случае, когда функция F_0 зависит не от всех переменных первого ряда, и в частности в задаче трех тел. Однако при применении этого метода воз-

никает несколько тонких вопросов, на которых я не могу не остановиться подробно.

220. Итак, предположим, что F_0 зависит не от всех переменных первого ряда. Для большей ясности я буду обозначать переменные первого ряда через

$$x_1, x_2, \ldots, x_p, z_1, z_2, \ldots, z_q,$$

а соответствующие переменные второго ряда — через

$$y_1, y_2, \ldots, y_p, u_1, u_2, \ldots, u_q$$

и буду предполагать, что F_0 зависит от всех x_i, но не зависит от z_i.

Требуется найти такую функцию S переменных y и u, которая бы удовлетворяла уравнению Якоби

$$F\left(\frac{dS}{dy_i}, \frac{dS}{du_i}, y_i, u_i\right) = C. \tag{1}$$

Я предполагаю здесь, что переменные первого ряда x_i и z_i в левой части заменены соответствующими переменными dS/dy_i и dS/du_i.

Кроме того, необходимо, чтобы функция S допускала разложение по степеням $\sqrt{\mu}$, а ее производные были периодическими по y и u.

Полагая $\mu = 0$, получим из уравнения (1)

$$F_0\left(\frac{dS_0}{dy_1}, \frac{dS_0}{dy_2}, \ldots, \frac{dS_0}{dy_p}\right) = C_0, \tag{2}$$

откуда видно, что S_0 имеет вид

$$S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 + \ldots + x_p^0 y_p + T_0,$$

где T_0 зависит лишь от переменных u. Положим

$$n_i^0 = -\frac{dF_0}{dx_i^0}.$$

Если между величинами n_i^0 не существует никакого линейного соотношения с целыми коэффициентами, то никаких трудностей не возникает. С помощью методов главы XI можно построить функцию S, содержащую лишь целые степени μ, ибо члены, содержащие нечетные степени $\sqrt{\mu}$, пропадут.

Предположим, однако, что между величинами n_i^0 существует линейное соотношение и пусть это соотношение имеет вид

$$n_i^0 = 0.$$

Такое предположение вполне допустимо, ибо в противном случае я мог бы воспользоваться заменой переменных п. 202.

Прежде чем переходить дальше, введем одно новое обозначение. Пусть U — некоторая периодическая по y функция, зависящая, кроме того, и от u. Через

$$[U]$$

я обозначу среднее значение U, если рассматривать ее только как функцию от y_2, y_3, ..., y_n, а через

$$[[U]]$$

— среднее значение U, если рассматривать ее как функцию от y_1, y_2,..., y_n.

Из этого определения следует, что $[U]$ есть функция от y_1 и u, в то время как $[[U]]$ есть функция одних лишь переменных u.

Если предположить, что функция U вместо того, чтобы быть периодической по y, такова, что периодическими являются ее производные, то

$$U = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 + \ldots + x_p^0 y_p + U',$$

где U' — периодическая функция, а x_i^0 — постоянные. Положим

$$[U] = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 + \ldots + x_p^0 y_p + [U']$$

и

$$[[U]] = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 + \ldots + x_p^0 y_p + [[U']].$$

Установив это, рассмотрим еще раз уравнения (3) из п. 204. Первое из этих уравнений есть не что иное, как уравнение (2), которое мы только что рассмотрели. Из второго уравнения видно, что производные

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \quad \frac{dS_1}{dy_3}, \quad \ldots, \quad \frac{dS_1}{dy_n}$$

равны некоторым постоянным. Не ограничивая общности, можно предположить, что эти постоянные равны нулю. На самом деле это означает, что мы вновь вернулись к предположениям (9), указанным в п. 204.

Но тогда функция S_1 будет зависеть только от y_1 и u, так что

$$S_1 = [S_1].$$

Рассмотрим теперь третье из уравнений (3) п. 204. Функция Ф, фигурирующая в его правой части, есть не что иное, как $-F_1$. Второй член в левой части будет равен

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 F_0}{dx_1^{0\,2}} \left(\frac{dS_1}{dy_1} \right)^2,$$

поскольку остальные производные dS_1/dy_1 равны нулю.

Положим

$$\frac{1}{2}\frac{d^2F_0}{dx_1^{02}} = A,$$

тогда наше уравнение запишется в виде

$$-\sum n_i^0 \frac{dS_2}{dy_i} + A\left(\frac{dS_1}{dy_1}\right)^2 = C_2 - F_1. \tag{4}$$

Следует особо подчеркнуть, что функция F_1 здесь неизвестна. В самом деле, она зависит от переменных x, z, y и u. Переменные x_i следует заменить величинами x_i^0, которые известны, а *переменные* z_i *— величинами*

$$\frac{dS_0}{du_i} = \frac{dT_0}{du_i},$$

которые неизвестны.

Вычислим теперь средние значения правой и левой частей относительно $y_2, y_3, \ldots, y_n$. Прежде всего ясно, что среднее значение $[dS_2/dy_i]$ представляет собой постоянную. Не ограничивая общности, можно считать, что эти постоянные равны нулю. Это отвечает предположениям (10) в п. 204.

Кроме того,

$$\left[\frac{dS_1}{dy_1}\right]^2 = \left(\frac{dS_1}{dy_1}\right)^2,$$

поскольку функция S не зависит от $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Наконец, важно заметить, что при вычислении среднего значения функции F_1 можно действовать так, как если бы функции dT_0/du_i (которые следует подставить вместо z_i) были постоянными, поскольку эти функции не зависят от $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Следовательно,

$$A\left(\frac{dS_1}{dy_1}\right)^2 = C_2 - [F_1], \tag{4bis}$$

откуда

$$\frac{dS_1}{dy_1} = \sqrt{\frac{C_2 - [F_1]}{A}}.$$

Вычислив средние значения правой и левой частей по y_1, получим

$$\left[\left[\frac{dS_1}{dy_1}\right]\right] = \left[\left[\sqrt{\frac{C_2 - [F_1]}{A}}\right]\right].$$

Если S_1 — функция, производные которой периодичны, то левая часть выписанного равенства обратится в константу, которую я обозначу через h. Тогда

$$\left[\left[\sqrt{\frac{C_2 - [F_1]}{A}}\right]\right] = h$$

или

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{C_2 - [F_1]}\, dy_1 = 2\pi A h. \tag{5}$$

Левая часть зависит от u_i и, кроме того, от производных dT_0/du_i, входящих в F_1. Таким образом, это уравнение с частными производными, позволяющее найти функцию T_0. Определим функцию T_0 так, чтобы ее производные были периодическими. Уравнение (5) можно записать в виде

$$\Theta\left(\frac{dT_0}{du_i}, u_i\right) = 2\pi A h. \tag{5bis}$$

Задача сводится к интегрированию уравнения (5bis), и я вернусь к ней ниже. Предположим, что интегрирование этого уравнения возможно и что

$$T_0 = z_1^0 u_1 + z_2^0 u_2 + \ldots + z_q^0 u_q + T_0'$$

— полный интеграл этого уравнения, содержащий q постоянных интегрирования z_i^0. Разумеется, я предполагаю, что T_0 зависит от u_i и постоянных z_i^0 и периодична по u_i.

Найдя таким образом функцию T_0, мы можем вычислить производную dS_1/dy_1 и, следовательно,

$$S_1 - [[S_1]].$$

Можно записать

$$S = S_1' + T_1,$$

где S_1' — *известная* функция от y_1 и u, а T_1 — еще неизвестная функция от u.

Далее из уравнения (4) мы получаем

$$-\sum n_i^0 \frac{dS_2}{dy_i} = [F_1] - F_1,$$

откуда находим

$$\frac{dS_2}{dy_2}, \quad \frac{dS_2}{dy_3}, \quad \ldots, \quad \frac{dS_2}{dy_n}, \quad S_2 - [S_2].$$

Рассмотрим теперь четвертое из уравнений (3). Все производные dS_2/dy_i во втором члене левой части известны, за исключением производной dS_2/dy_1, поэтому этот член можно записать в виде

$$2A \frac{dS_2}{dy_1} \frac{dS_1}{dy_1} + \Phi.$$

С другой стороны, в п. 204 я обозначал правую часть этого уравнения через Ф, поскольку она была полностью известна. На этот раз дело обстоит иначе, поскольку правая часть зависит от dS_1/du_i, а следователь-

но, от производных dT_1/du_i, которые неизвестны. Нетрудно видеть, что эта правая часть будет иметь вид

$$-\sum \frac{dF_1}{dz_i}\frac{dT_1}{du_i} + \Phi,$$

причем Φ будет известной функцией. В силу этого наше уравнение можно записать в виде

$$-\sum n_i^0 \frac{dS_3}{dy_i} + 2A\frac{dS_2}{dy_1}\frac{dS_1}{dy_1} + \sum \frac{dF_1}{dz_i}\frac{dT_1}{du_i} = \Phi. \tag{6}$$

Разумеется, в производные dF_1/dz_i вместо переменных x_i и z_i следует подставить соответственно x_i^0 и dT_0/du_i.

Возьмем средние значения от правой и левой части по $y_2, y_3, \ldots, y_n$. Можно считать, как мы делали раньше, что средние значения производных dS_3/dy_i $(i > 1)$ равны нулю. Тогда

$$2A\frac{d[S_2]}{dy_1}\frac{dS_1}{dy_1} + \sum \frac{d[F_1]}{dz_i}\frac{dT_1}{du_i} = \Phi. \tag{7}$$

Отсюда мы получим

$$\frac{d[S_2]}{dy_1} = \frac{\Phi - \sum \frac{d[F_1]}{dz_i}\frac{dT_1}{du_i}}{2A\frac{dS_1}{dy_1}}.$$

Обе части этого уравнения зависят от y_1 и u. Среднее значение левой части должно быть постоянной, которой я, не ограничивая общности, могу придавать произвольное значение, например значение, равное нулю. Следовательно,

$$\left[\left[\frac{\Phi - \sum \frac{d[F]}{dz_i}\frac{dT_1}{du_i}}{2A\frac{dS_1}{dy_1}}\right]\right] = 0,$$

что можно записать и в виде

$$-\int_0^{2\pi} \frac{\sum \frac{d[F_1]}{dz_i}\frac{dT_1}{du_i}}{2\sqrt{C_2 - [F_1]}}\,dy = \Phi \tag{8}$$

или

$$\sum \frac{d\Theta}{dz_i}\frac{dT_1}{du_i} = \Phi. \tag{8bis}$$

Функция Θ зависит от z_i и u_i и периодична по u_i. Если вместо z_i подставить в нее dT_0/du_i, то получим левую часть уравнения (5bis).

Аналогично я предполагаю, что в уравнении (8bis) переменные z_i в производных $d\Theta/dz_i$ заменены производными dT_0/du_i.

Функцию T_1 можно найти из уравнения (8bis). Я сейчас докажу, что интегрирование этого уравнения проводится без труда, если проинтегрировано уравнение (5bis).

Действительно, если известно, как интегрировать уравнение (5bis), то мы знаем функцию T_0, зависящую от u_i и q постоянных z_i, такую, что если в функцию Θ вместо z_i подставить производные от T_0, то Θ обратится в некоторую постоянную (относительно u_i), т. е. в некоторую функцию от z_i^0, которую я обозначу

$$\theta\,(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_q^0).$$

С другой стороны, положим

$$z_i = \frac{dT_0}{du_i}, \qquad u_i^0 = \frac{dT_0}{dz_i^0}. \tag{9}$$

При этом мы получим $2q$ соотношений между $4q$ величинами z_i, u_i, z_i^0, u_i^0, так что в качестве независимых переменных мы можем взять либо z_i и u_i, либо z_i^0 и u_i, либо z_i^0 и u_i^0.

Во избежание недоразумений будем обозначать символом d производные по переменным z_i и u_i или же по z_i^0 и u_i^0 и символом ∂ — производные по переменным z_i^0 и u_i.

Функцию Θ в уравнении (8bis) следует считать записанной в переменных z_i и u_i (ибо замена z_i на dT_0/du_i производится только после дифференцирования). Напротив, функция T_1 зависит от u_i и, кроме того, от постоянных интегрирования z_i^0.

В новых обозначениях уравнение (8bis) записывается в виде

$$\sum \frac{d\Theta}{dz_i}\frac{\partial T_1}{\partial u_i} = \Phi.$$

С другой стороны, соотношение

$$\Theta = \theta$$

выполняется тождественно, и, поскольку θ зависит лишь от z_i^0,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u_i} = 0.$$

Последнее уравнение можно также записать в виде

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u_i} + \sum \frac{d\Theta}{dz_k}\frac{\partial z_k}{\partial u_i} = 0.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial T_1}{\partial u_i} = \frac{dT_1}{du_i} + \sum \frac{dT_1}{dz_k}\frac{\partial z_k}{\partial u_i} = 0.$$

Преобразуя последовательно уравнение (8 bis), получим

$$\sum \frac{d\Theta}{dz_i}\frac{dT_1}{du_i} + \sum \frac{d\Theta}{dz_i}\frac{dT_1}{dz_k}\frac{\partial z_k}{\partial u_i} = \Phi$$

или, переставляя индексы,

$$\sum \frac{d\Theta}{dz_i}\frac{dT_1}{du_i} + \sum \frac{d\Theta}{dz_k}\frac{dT_1}{dz_i}\frac{\partial z_k}{\partial u_i} = \Phi,$$

поскольку

$$\frac{\partial z_k}{\partial u_i} = \frac{\partial z_i}{\partial u_k} = \frac{\partial^2 T_0}{\partial u_i \partial u_k}.$$

Отсюда

$$\sum \left(\frac{d\Theta}{dz_i}\frac{\partial T_1}{du_i} - \frac{d\Theta}{du_i}\frac{dT_1}{dz_i} \right) = \Phi$$

или в переменных u_i^0 и z_i^0

$$\sum \left(\frac{d\Theta}{dz_i^0}\frac{dT_1}{du_i^0} - \frac{d\Theta}{du_i^0}\frac{dT_1}{dz_i^0} \right) = \Phi.$$

Наконец, поскольку функция Θ равна θ, не зависящей от u_i^0, имеем

$$\sum \frac{d\theta}{dz_i^0}\frac{dT_1}{du_i^0} = \Phi, \qquad (8\text{ter})$$

где функцию Φ следует выразить в переменных u_i^0 и постоянных интегрирования z_i^0. Производные функции θ зависят лишь от постоянных z_i^0 и в силу этого являются константами. Отсюда следует, что уравнение (8ter) является уравнением с постоянными коэффициентами и немедленно интегрируется.

Функция Φ периодична по u_i. Часто бывает так, что функция T_0 и уравнения (9) таковы, что переменные u_i оказываются однозначными функциями величин u_i^0, и наоборот. Поэтому разности $u_i - u_i^0$ оказываются периодическими функциями либо от u_i, либо от u_i^0.

Следовательно, функция Φ, периодическая по u_i, будет также периодической и по u_i^0. Это означает, что уравнение (8ter) можно проинтегрировать так, что либо производные dT_1/du_i^0 будут периодическими относительно u_i^0, либо, что то же, производные $\partial T_1/\partial u_i$ будут периодическими относительно u_i, либо функция T_1 будет возрастать на некоторую постоянную всякий раз, когда u_i получают приращение, равное 2π.

Итак, проинтегрировав уравнение (8), мы получаем из уравнения (7) производную $d[S_2]/dy_1$. Поэтому функцию S_2 можно записать в виде

$$S_2 = S_2' + T_2,$$

где функция S_2' полностью известна и зависит от y и u, а функция T_2 неизвестна и зависит лишь от u.

После этого можно записать уравнение (6) в виде

$$\sum n_i^0 \frac{dS_3}{dy_i} = \Phi.$$

Отсюда найдем

$$\frac{dS_3}{dy_2}, \quad \frac{dS_3}{dy_3}, \quad \ldots, \quad \frac{dS_3}{dy_n}, \quad S_3 - [S_3]$$

и т. д.

Обобщение на случай задачи трех тел

221. Итак, вся задача сводится к интегрированию уравнения (5). Посмотрим, какой вид имеет это уравнение в случае задачи трех тел. Его можно записать так:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{C_2 - [F_1]}\, dy_1 = 2\pi A h.$$

Но какой вид имеет $[F_1]$?

В качестве переменных выберем величины

$$\Lambda_1, \quad \Lambda_1', \quad \xi_1, \quad \xi_1',$$
$$\lambda_1, \quad \lambda_1', \quad \eta_1, \quad \eta_1',$$

определенные в п. 145. Если три тела движутся не в одной плоскости, то к этим переменным следует добавить еще переменные

$$p, \; p',$$
$$q, \; q',$$

определения которых были даны в п. 12.

Разложим функцию F по положительным степеням μ, ξ_1, ξ_1', η_1, η_1', p, q, p', q' и по синусам и косинусам линейных комбинаций λ_1 и λ_1' с целыми коэффициентами. Член с

$$\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} (m\lambda_1 + m'\lambda_1')$$

должен содержать сомножитель, представляющий собой одночлен, степень которого относительно переменных ξ_1, η_1, p, q, ... самое меньшее равна $|m + m'|$ и может отличаться от $|m + m'|$ только на четное число. Наконец, F_0 зависит лишь от Λ_1 и Λ_1'.

Установив это, предположим, что

$$m\frac{dF_0}{d\Lambda_1^0}+m'\frac{dF_0}{d\Lambda_1'^0}=0,$$

где m и m' — два целых числа, Λ_1^0 и $\Lambda_1'^0$ — две константы. Будем считать, что производные $dS_0/d\lambda_1$ и $dS_0/d\lambda_1'$ равны этим константам, тогда последние будут аналогичны тем, которые мы в предыдущем пункте обозначили через x_i^0.

Положим

$$m\lambda_1+m'\lambda_1'=y_1.$$

Чтобы найти $[F_1]$, мы должны вычеркнуть в F_1 все члены, зависящие от λ_1 и λ_1', и оставить лишь члены, зависящие только от y_1.

Чтобы выявить порядок каждого члена относительно эксцентриситетов и наклонений, заменим всюду

$$\xi_1,\ \eta_1,\ \xi_1',\ \eta_1',\ p,\ q,\ p',\ q'$$

на

$$\varepsilon\xi_1,\ \varepsilon\eta_1,\ \varepsilon\xi_1',\ \varepsilon\eta_1',\ \varepsilon p,\ \varepsilon q,\ \varepsilon p',\ \varepsilon q'$$

и будем учитывать порядок каждого члена F_1 относительно ε. $[F_1]$ можно записать в виде

$$[F_1]=R+R',$$

где R — совокупность членов, не зависящих ни от λ_1, ни от λ_1', так что

$$R=[[F_1]],$$

а R' — совокупность членов, зависящих от y_1 и только от y_1.

Функция R разлагается по степеням ε^2, и мы получаем

$$R=R_0+\varepsilon^2R_2+\varepsilon^4R_4+\ldots.$$

Что же касается функции R', то она делится на $\varepsilon^{|m+m'|}$.

В общем случае

$$|m+m'|>2,$$

так что мы можем положить

$$R'=\varepsilon^3R''.$$

Функцию R_0, зависящую только от Λ_1^0 и $\Lambda_1'^0$, можно считать постоянной. Следовательно, можно положить

$$C_2=R_0+k_0^2+\varepsilon^2k_1$$

и в то же время

$$Ah = k_0 + \varepsilon^2 k_1',$$

так что уравнение (5) перейдет в уравнение

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{k_0^2 + \varepsilon^2 k_1 - \varepsilon^2 R_2 - \varepsilon^3 R'' - \varepsilon^4 R_4 - \ldots}\, dy_1 = 2\pi (k_0 + \varepsilon^2 k_1'),$$

которое, если разложить радикал по степеням ε, произвести необходимые сокращения и поделить на $2\pi\varepsilon^2$, будет эквивалентно уравнению

$$\frac{k_1 - R_2}{2k_0} + \varepsilon Z = k_1',$$

причем функция Z будет разлагаться по положительным степеням ε, ξ, η, p и q.

Наконец, положив

$$k_1 - 2k_0 k_1' = K,$$

получим

$$R_2 - 2\varepsilon k_0 Z = K.$$

Функция R_2 та же, что и функция, обозначенная тем же символом в п. **131** (единственное отличие состоит в том, что буквы ξ и η в рассматриваемом случае имеют индекс 1). Поэтому так же, как в п. **131**, можно определить переменные ρ_i и ω_i (всякий раз, когда нам будут встречаться переменные ξ и η, мы будем заменять их переменными ξ_1 и η_1) и принять в качестве новых переменных

$$\Lambda_1, \quad \Lambda_1', \quad \rho_i,$$

$$\lambda_1, \quad \lambda_1', \quad \omega_i.$$

Функция R_2 будет иметь вид

$$2A_1\rho_1 + 2A_2\rho_2 + 2A_3\rho_3 + 2A_4\rho_4$$

(ср. с выражением в конце п. **131**).

Заменив ρ_i на $dT_0/d\omega_i$, мы, наконец, получим уравнение

$$\Theta\left(\frac{dT_0}{d\omega_i}, \omega_i\right) = R_2 - 2\varepsilon k_0 Z = K, \qquad (5\text{ter})$$

которое и будем интегрировать.

Левая часть Θ этого уравнения периодична относительно ω_i и допускает разложение по степеням ε и, если положить $\varepsilon = 0$, равна R_2. Θ не зависит больше от ω_i, а только от $dT_0/d\omega_i$. Следовательно, методы п. **125** оказываются в этом случае применимыми.

Итак, интегрирование уравнения (5), *к которому мы свели задачу, возможно.*

Аналогично рассматривается случай, когда

$$m + m' = \pm 1 \text{ или } 2.$$

Особые трудности возникают в случае

$$m + m' = 0,$$

когда

$$\Lambda_1^0 = \Lambda_1'^0,$$

т. е. в том случае, когда обе большие оси отличаются лишь незначительно.

Исследование рядов

222. Вернемся к обозначениям п. 220 и предположим, что функция S найдена с помощью предложенных там методов. Однако задача решена еще не полностью. Необходимо еще взять уравнения

$$\begin{gathered} (k > 1), \qquad \frac{dS}{dx_k^0} = w_k + \theta_k w_1, \\ \frac{dS}{dC_2} = \theta_1 w_1, \qquad \frac{dS}{dz_i^0} = w_i' + \theta_i' w_1, \qquad x_i = \frac{dS}{dy_i}, \qquad z_i = \frac{dS}{du_i}, \end{gathered} \tag{10}$$

где θ и θ' — надлежащим образом выбранные функции от x_i^0 и z_i^0, решить их и получить x_i, y_i и u_i в виде функций от x_i^0, z_i^0, w_i, w_i' и, наконец, заменить величины w_i и w_i' линейными функциями времени с соответствующим образом подобранными коэффициентами. Мы получим выражения для координат x, y, z, u в виде функций от времени.

Прежде всего посмотрим, какой вид будут иметь уравнения (10).

Функцию S, имеющую периодические производные, можно записать в виде

$$S = \beta y_1 + x_2^0 y_2 + x_3^0 y_3 + \ldots + x_p^0 y_p + z_1^0 u_1 + \ldots + z_q^0 u_q + S',$$

где β — постоянная, не зависящая от y и u, а функция S' — периодическая по y и u. Коэффициенты при y_i и u_k можно, не ограничивая общности, считать равными x_k^0 и z_i^0. Это предположение соответствует предположению (10) в п. **204**.

Что касается постоянной β, то она допускает разложение по степеням $\sqrt{\mu}$:

$$\beta = \beta_0 + \sqrt{\mu}\beta_1 + \mu\beta_2 + \ldots$$

Здесь β_0 равно x_i^0, а β_1 — постоянной h в уравнении (5) п. 220.

Функция S' точно так же допускает разложение по степеням $\sqrt{\mu}$:

$$S' = S_0' + S_1'\sqrt{\mu} + \ldots,$$

где

$$S_0' = T_0',$$

$$S_1' = \int\left(\sqrt{\frac{C_2 - [F_1]}{A}} - h\right)dy_1 + T_1'.$$

Уравнения (10) в результате можно записать в виде

$$\begin{aligned} w_k + \theta_k w_1 &= y_k + \frac{d\beta}{dx_k^0}\,y_1 + \frac{dS'}{dx_k^0}, \\ \theta_1 w_1 &= \frac{d\beta}{dC_2}\,y_1 + \frac{dS'}{dC_2}, \\ w_i' + \theta_i' w_1 &= u_i + \frac{d\beta}{dz_i^0}\,y_1 + \frac{dS'}{dz_i^0}. \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, мы получаем

$$\theta_k = \frac{d\beta}{dx_k^0}, \qquad \theta_1 = \frac{d\beta}{dC_2}, \qquad \theta_i' = \frac{d\beta}{dz_i^0}.$$

Однако имеется одна трудность, проистекающая из следующего обстоятельства. Поскольку $\beta_0 = x_1^0$ не зависит ни от C_2, ни от z_i^0, величины θ_1 и θ_i' при $\mu = 0$ обращаются в нуль. Следовательно, они делятся на $\sqrt{\mu}$. Производная же dS'/dC_2, наоборот, при $\mu = 0$ становится равной

$$dT_0'/dC_2$$

и в нуль не обращается.

Далее необходимо положить

$$w_i = n_i t + \varpi_i, \qquad w_i' = n_i' t + \varpi_i',$$

где n — некоторые определенные, а ϖ — произвольные постоянные. Чтобы найти n, поступают следующим образом.

Если в функции F произвести замену переменных x_i и z_i на производные dS/dy_i и dS/du_i, то по определению функция F перейдет в функцию S, которая должна быть некоторой постоянной или, точнее, некоторой

функцией от постоянных интегрирования x_k^0, C_2 и z_i^0. Итак, пусть

$$F = \varphi(x_k^0, C_2, z_i^0).$$

Имеем

$$\begin{aligned} n_k + \theta_k n_1 &= -\frac{d\varphi}{dx_k^0}, \qquad (k > 1) \\ \theta_1 n_1 &= -\frac{d\varphi}{dC_2}, \\ n_i' + \theta_i' n_1 &= -\frac{d\varphi}{dz_i^0}. \end{aligned} \tag{12}$$

Очевидно, что величины n допускают разложение по степеням $\sqrt{\mu}$. Чтобы представить себе вид этого разложения, запишем функцию φ в виде ряда, расположенного по степеням μ:

$$\varphi = C_0 + \mu C_2 + \mu^2 C_4 + \dots .$$

Здесь

$$C_0 = F_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0),$$

откуда

$$\frac{dC_0}{dx_k^0} = \frac{dF_0}{dx_k^0} + \frac{dF_0}{dx_1^0}\frac{dx_1^0}{dx_k^0} = -n_k^0 - n_1^0\frac{dx_1^0}{dx_k^0} = -n_k^0,$$

поскольку n_1^0 равно нулю.

Кроме того, ясно, что

$$\frac{d\varphi}{dC_2} = \mu$$

и что разложение производной $d\varphi/dz_i^0$ начинается с члена порядка μ^2.

Второе из уравнений (12), в котором коэффициент θ_1 делится на $\sqrt{\mu}$, а правая часть — на μ, показывает, что разложение величины n_1 начинается с члена порядка $\sqrt{\mu}$. Поскольку коэффициенты θ_i' также делятся на $\sqrt{\mu}$, произведение $\theta_i' n_1$ делится на μ, а правая часть делится на μ^2. Из третьего уравнения (12) видно, что n_i' делится на μ. С другой стороны, заметим, что уравнения (11) допускают упрощение. До сих пор мы предполагали, что функции S и S' выражены через переменные y и u и постоянные x_k^0, C_2 и z_i^0. Пусть теперь

$$\beta = x_1^0 + \gamma\sqrt{\mu}.$$

Предположим (что равносильно сделанному ранее предположению), что S и S' записаны в виде функций от переменных y и u и n постоянных x_k^0,

γ и z_i^0. Уравнения (11) запишутся тогда в виде

$$(w_k - y_k) + \frac{dx_1^0}{dx_k^0}(w_1 - y_1) = \frac{dS'}{dx_k^0},$$
$$\sqrt{\mu}\,(w_1 - y_1) = \frac{dS'}{d\gamma}, \qquad (11\text{bis})$$
$$w_i' - u_i = \frac{dS}{dz_i^0}.$$

Отсюда видно, что несмотря на то, что уравнения (11) и (11bis) задают неявным образом наши координаты в виде функций от w, мы не можем решать их с помощью методов п. 30. Следовательно, соотношения между этими координатами и w гораздо сложнее, чем соотношения, выведенные в п. 127 и в главах XI и XX.

Ограничимся следующим замечанием.

Что произойдет с нашими уравнениями при $\mu = 0$? Не станут ли они противоречивыми? Поскольку n_1 и n_1' при $\mu = 0$ обращаются в нуль, w_1 и w_i' равны постоянным ϖ_1 и ϖ_i', так что

$$\varpi_i - u_i = \frac{dT_0'}{dz_i^0}.$$

Поскольку T_0' содержит только переменные u_i, мы видим из этих уравнений, что u_i — постоянные. Перейдем ко второму уравнению (11bis). Поскольку ϖ_1 — произвольная постоянная, приравняем ее $\alpha_1/\sqrt{\mu}$, где α_1 — некоторая заданная отличная от нуля постоянная. Второе уравнение в результате запишется в виде

$$\alpha_1 = \frac{dT_0'}{d\gamma} \quad \text{или} \quad \frac{dT_0'}{d\gamma} = \text{const},$$

и, поскольку T_0' зависит лишь от u_i, которые постоянны, оно удовлетворяется автоматически.

Посмотрим теперь, как изменилось первое уравнение. Положим

$$\varpi_k = \frac{\alpha_k}{\sqrt{\mu}} + \alpha_k',$$

где α_k и α_k' — постоянные, отличные от нуля. Вместо $w_1 - y_1$ возьмем значение этой разности, полученное из второго уравнения, и выпишем члены с $1/\sqrt{\mu}$ и члены, не зависящие от $\sqrt{\mu}$:

$$\frac{\alpha_k}{\sqrt{\mu}} + (\alpha_k' + n_k t - y_k) + \frac{dx_1^0}{dx_k^0}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{dT_0'}{d\gamma} + \frac{dS_1'}{d\gamma}\right) = \frac{dS_0'}{dx_k^0} = \frac{dT_0'}{dx_k^0},$$

откуда

$$\alpha_k + \frac{dx_1^0}{dx_k^0}\frac{dT_0'}{d\gamma} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{dT_0'}{d\gamma} = \text{const},$$

$$\alpha_k' + n_k t - y_k + \frac{dx_1^0}{dx_k^0}\frac{dS_1'}{d\gamma} = \frac{dT_0'}{dx_k^0}.$$

Первое уравнение удовлетворяется тождественно. Из второго находим y_k.

Второй метод

223. Вычисления можно проводить и в ином порядке и вместо того, чтобы использовать уравнение (5) п. **220**, рассматривать непосредственно уравнение (4bis), которое запишем здесь снова:

$$A\left(\frac{dS_1}{dy_1}\right)^2 = C_2 - [F_1]. \tag{4bis}$$

Мы будем пользоваться обозначениями п. **221** и в качестве переменных выберем величины

$$\Lambda_1, \quad \Lambda_1', \quad \rho_i,$$
$$\lambda_1, \quad \lambda_1', \quad \omega_i,$$

определенные там же. Посмотрим, какой вид примет тогда уравнение (4bis).

1. Обе части этого уравнения не зависят от λ_1 и λ_1' в отдельности, а зависят лишь от

$$m\lambda_1 + m'\lambda_1' = y_1,$$

где m и m' — целые числа, определенные в п. **221**. Действительно, при вычислении $[F_1]$ мы оставляли в F_1 члены, зависящие от $m\lambda_1 + m'\lambda_1'$, и вычеркивали члены, зависящие от λ_1 и λ_1' каким-либо иным способом.

2. Обе части этого уравнения зависят от Λ_1 и Λ_1', однако эти величины следует заменить постоянными Λ_1^0 и $\Lambda_1'^0$, аналогичными x_i^0. При этом коэффициент A становится постоянным.

3. Они периодичны по y_1 и ω_i.

4. Их можно разложить по целым степеням ε и дробным степеням ρ_i. Последнюю величину следует заменить производной $dT_0/d\omega_i$.

Таким образом, уравнение (4bis) можно записать в виде

$$H\left(\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dT_0}{d\omega_i}, y_1, \omega_i\right) = C_2. \tag{4a}$$

Рассмотрим разложение функции H по степеням ε. Член, не зависящий от ε, будет иметь вид

$$A\left(\frac{dS_1}{dy_1}\right)^2 + R_0.$$

Слагаемое R_0, определенное так же, как в п. 221, является постоянной, зависящей лишь от Λ_1^0 и $\Lambda_1'^0$.

Член с ε равен нулю (если только сумма $m + m'$ не равна ± 1, но этот случай мы не рассматриваем).

Член с ε^2 имеет вид

$$R_2 + 2A_1\rho_1 + 2A_2\rho_2 + 2A_3\rho_3 + 2A_4\rho_4.$$

Первый член, зависящий от y_1, есть член с

$$\varepsilon^{|m+m'|}.$$

Уравнение (4а) можно решить следующим образом. Разложим функцию S_1 в ряд по степеням ε:

$$S_1 = U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \ldots.$$

Точно таким же образом разложим C_2 и T_0:

$$C_2 = \gamma_0 + \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2\gamma_2 + \ldots, \qquad T_0 = V_0 + \varepsilon V_1 + \ldots.$$

Подставляя разложение T_0 в R и разлагая R, получим

$$R = R_0' + \varepsilon^2 R_2' + \varepsilon^3 R_3' + \ldots.$$

Прежде всего мы найдем, что

$$A\left(\frac{dU_0}{dy_1}\right)^2 + R_0' = \gamma_0,$$

откуда следует, что производная dU_0/dy_1 равна некоторой постоянной. Пусть

$$U_0 = \alpha y_1,$$

где α — некоторая постоянная, зависящая от постоянной интегрирования γ_0. Далее имеем

$$2\alpha A\frac{dU_1}{dy_1} = \gamma_1,$$

откуда следует, что производная dU_1/dy_1 также равна некоторой постоянной. Не ограничивая общности, можно предположить, что U_1 и γ_1 равны нулю. В результате получим

$$2\alpha A\frac{dU_2}{dy_1} + 2\sum A_i\frac{dV_0}{d\omega_i} = \gamma_2.$$

Из этого уравнения следует, что производная dU_2/dy_1 также равна некоторой постоянной, которую, не ограничивая общности, также можно считать равной нулю. Остается уравнение

$$2\sum A_i \frac{dV_0}{d\omega_i} = \gamma_2.$$

Из него следует, что производные $dV_0/d\omega_i$ представляют собой постоянные, которые можно выбирать произвольно, поскольку γ_2 произвольна.

Далее имеем

$$2\sum A_i \frac{dT_1}{d\omega_i} + 2\alpha A \frac{dU_3}{dy_1} = \gamma_3.$$

В этом случае мы, не ограничивая общности, можем предположить, что U_3 и γ_3 равны нулю. Затем получим уравнение

$$2\alpha A \frac{dU_4}{dy_1} + R_4' = \gamma_4.$$

И в этом случае предполагаем, что U_4 равно нулю и приходим к уравнению

$$R_4' = \gamma_4,$$

из которого без труда можно найти T_2, ибо y_1 в уравнение не входит.

Так продолжается до тех пор, пока не дойдем до члена с $\varepsilon^{|m+m'|}$. Пусть $|m + m'| = q$, тогда

$$2\alpha A \frac{dU_q}{dy_1} + R_q' + M_q \cos y_1 + N_q \sin y_1 = \gamma_q.$$

Коэффициенты M_q и N_q зависят от ω_i и $V_0, V_1, \ldots, V_{q-3}$. Их можно считать известными.

Что же касается члена R_q', то

$$R_q' = 2\sum A_i \frac{dV_{q-2}}{d\omega_i} + L_q,$$

где L_q — известная функция от ω_i.

Следовательно, мы можем разбить написанное выше уравнение на два и записать

$$2\alpha A \frac{dU_q}{dy_1} = -M_q \cos y_1 + N_q \sin y_1,$$

$$2\sum A_i \frac{dV_{q-2}}{d\omega_i} = \gamma_q - L_q.$$

Правые части этих уравнений известны, в результате чего без труда находим U_q и V_{q-2}. Очевидно, производные функции V_{q-2} будут периодиче-

скими по ω_i. Не ограничивая общности, можно подобрать γ_q так, чтобы среднее значение $\gamma_q - L_q$ было равно нулю, тогда и сама функция V_{q-2} будет периодической. Что же касается U_q, то ясно, что это периодическая по y_1 и ω_i функция.

Дальше продолжим следующим образом. Приравнивая коэффициенты при ε^p $(p > q)$, находим

$$2\alpha A \frac{dU_p}{dy_1} + 2\sum A_i \frac{dV_{p-2}}{d\omega_i} = \gamma_p + \Phi, \tag{13}$$

где Φ — известная функция, периодическая по y_1 и ω_1. Предположим, что функция Φ разложена в тригонометрический ряд, а γ_p выбрана так, что среднее значение правой части равно нулю.

Положим далее

$$\gamma_p + \Phi = \Phi' + \Phi'',$$

где Φ' означает совокупность членов, зависящих от y_1, а Φ' — совокупность членов, от y_1 не зависящих, так что

$$\Phi'' = [[\gamma_p + \Phi]].$$

Разобьем уравнение (13) на два:

$$2\alpha A \frac{dU_p}{dy_1} = \Phi',$$

$$2\sum A_i \frac{dV_{p-2}}{d\omega_i} = \Phi''.$$

Эти уравнения позволяют получить V_{p-2} и U_p. Обе найденные функции будут периодическими.

Проинтегрировав таким образом уравнение (4bis) из п. 220, мы найдем из уравнения (4) разность $S_2 - [S_2]$, после чего перейдем к уравнениям (6) и (7).

Уравнение (7) будем решать так же, как уравнение (4bis). Обе части уравнения (7) разложим по степеням ε. Кроме того, разложим $[S_2]$ и T_1:

$$[S_2] = U_0' + \varepsilon U_1' + \varepsilon^2 U_2' + \ldots,$$

$$T_1 = V_0' + \varepsilon V_1' + \varepsilon^2 V_2' + \ldots.$$

Затем в правой и левой части уравнения (7) приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε и получим цепочку уравнений, с помощью которых последовательно найдем U_i' и V_i'.

Приравнивая коэффициенты при ε^p, получаем уравнение, из которого находим U_p' и V_{p-2}'. Это уравнение имеет тот же вид, что и уравнение (13).

Единственное отличие состоит в том, что вместо U_p и V_{p-2} в него входят U_p' и V_{p-2}'. Поэтому его решают так же, как уравнение (13).

После того как уравнение (7) решено, мы продолжаем точно таким же образом.

Случай либрации

224. Каким образом возникает случай либрации? Рассмотрим уравнение п. 223 и предположим, что

$$a = U_0 = 0.$$

До тех пор, пока мы не дойдем до уравнения, получаемого приравниванием коэффициентов при ε^q, вычисления происходят так же, как раньше. Мы получаем

$$U_i = 0 \qquad \left(i = 1, 2, 3, \ldots, \frac{q}{2} - 1\right).$$

Если q четно, то уравнение, соответствующее ε^q, запишется в виде

$$A\left(\frac{dU_{q/2}}{dy_1}\right)^2 + 2\sum A_i \frac{dV_{q-2}}{d\omega_i} + L_q + M_q \cos y_1 + N_q \sin y_1 = \gamma_q. \qquad (14)$$

Если положить для краткости

$$2\sum A_i \frac{dV_{q-2}}{d\omega_i} = X$$

и временно отбросить индекс $q/2$ у функции U и индекс q у L, M, N и γ, то

$$\frac{dU}{dy_1} = \sqrt{\frac{\gamma - L - X - M\cos y_1 - M\sin y_1}{A}} = \sqrt{Z},$$

где через Z обозначено для краткости выражение, стоящее под знаком радикала.

Интеграл

$$\int \sqrt{Z}\, dy_1$$

эллиптический, второго рода. Один из его периодов равен

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{Z}\, dy_1.$$

Если γ и X выбраны так, что Z всегда положительно, то этот период всегда вещественен; мы хотим, чтобы он был постоянной, не зависящей от ω_i.

Приравняем этот период некоторой постоянной, обозначенной через h, и получим уравнение

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{Z}\, dy_1 = h. \tag{15}$$

Решая это уравнение относительно X, получим

$$X = \gamma + \psi(\omega_i),$$

где ψ — функция от ω_i, которую можно считать известной и которая периодична.

Отсюда получаем

$$2\sum A_i \frac{dV_{q-2}}{d\omega_i} = \gamma + \psi(\omega_i).$$

Из этого уравнения находим V_{q-2}, после чего из уравнения (14) без труда находим $U_{q/2}$.

Так мы приходим к обычному случаю.

Однако γ и X можно подобрать так, что Z может принимать и нулевые значения. В этом случае вещественным будет второй период нашего эллиптического интеграла. Приравняв этот период некоторой постоянной, обозначенной через h, получим уравнение (15bis), аналогичное уравнению (15). Если решить это уравнение относительно X, получим

$$X = \gamma + \psi'(\omega_i),$$

или

$$2\sum A_i \frac{dV_{q-2}}{d\omega_i} = \gamma + \psi'(\omega_i).$$

Отсюда находим V_{q-2}, поскольку ψ' — известная периодическая функция.

Так мы приходим к случаю либрации.

Предельный случай получим, если один из периодов соответствующего эллиптического интеграла первого рода обращается в бесконечность, в результате чего V_{q-2} находят из следующего уравнения:

$$2\sum A_i \frac{dV_{q-2}}{d\omega_i} = L\gamma_q - L_q + \sqrt{M_q^2 + N_q^2}.$$

Недостаток рассмотренного выше метода заключается в том, что выражение, получающееся в обычном случае, не является аналитическим продолжением выражения, получающегося в случае либрации, и наоборот.

Приравняем теперь коэффициенты при ε^{q+1}:

$$2A\frac{dU_{\frac{q}{2}}}{dy_1}\frac{dU_{\frac{q}{2}+1}}{dy_1}+2\sum A_i\frac{dV_{q-1}}{d\omega_i}=\gamma_{q+1}+\Phi, \tag{16}$$

где Φ — известная периодическая функция.

Если, например, рассматривается обычный случай, то интеграл

$$\int_0^{2\pi}\frac{dU_{\frac{q}{2}+1}}{dy_1}dy_1$$

можно приравнять некоторой не зависящей от ω_i постоянной h. Полагая для краткости $dU_{q/2}/dy_1 = W$, найдем

$$2\sum A_i\frac{dV_{q-1}}{d\omega_i}=\gamma+\frac{\int_0^{2\pi}\frac{\Phi\,dy_1}{2AW}-h}{\int_0^{2\pi}\frac{dy_1}{2AW}}. \tag{17}$$

Из этого уравнения находим V_{q-1}, а затем из уравнения (16) находим

$$U_{\frac{q}{2}+1}.$$

Уравнения, полученные приравниванием коэффициентов при других степенях ε, будут иметь тот же вид, что и уравнение (16). Тот же вид будут иметь и те уравнения, которые получатся, если приравнять коэффициенты при различных степенях ε в правой и левой частях уравнения (17).

Следовательно, все эти уравнения решаются таким же способом.

Если бы q было нечетно, то результаты остались без изменений. Несколько другим был бы лишь вид разложения функции S_1, а именно:

$$S_1=\varepsilon^{\frac{q}{2}}U_{\frac{q}{2}}+\varepsilon^{\frac{q}{2}+1}U_{\frac{q}{2}+1}+\varepsilon^{\frac{q}{2}+2}U_{\frac{q}{2}+2}+\ldots.$$

Таким образом, S_1 допускала бы разложение по нечетным степеням $\sqrt{\varepsilon}$.

Все результаты, полученные в этой главе, неполны и требуют дополнительных рассмотрений. Они носят лишь предварительный характер.

Расходимость рядов

225. В п. 212 мы видели, что ряды, к которым приводит метод Болина, вообще говоря, расходятся. Я пытался выяснить механизм этой расходимости. Сейчас я считаю необходимым вернуться к этому вопросу еще раз и рассмотреть несколько подробней простой пример, который позволит лучше понять этот механизм расходимости. Пусть

$$-F = p + q^2 - 2\mu \sin^2 \frac{y}{2} - \mu\varepsilon\varphi(y)\cos x,$$

где $(p, x; q, y)$ — две пары сопряженных переменных, $\varphi(y)$ — периодическая функция от y (период равен 2π), а ε и μ — две постоянные, относительно которых я предполагаю, что они очень малы.

Выпишем канонические уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dF}{dp} = 1; \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{dF}{dq} = 2q, \tag{1}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dF}{dx} = -\mu\varepsilon\varphi(y)\sin x; \quad \frac{dq}{dt} = \frac{dF}{dy} = \mu \sin y + \mu\varepsilon\varphi'(y)\cos x,$$

откуда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\mu \sin y + 2\mu\varepsilon\varphi'(y)\cos x.$$

Если $\varepsilon = 0$, то интегрирование этого уравнения проводится почти сразу же. Запишем уравнение с частными производными Якоби. Пусть

$$\frac{dS}{dx} + \left(\frac{dS}{dy}\right)^2 = 2\mu \sin^2 \frac{y}{2} + \mu\varepsilon\varphi(y)\cos x + C, \tag{2}$$

где C — некоторая постоянная. Разложим S и C по степеням ε:

$$S = S_0 + S_1\varepsilon + S_2\varepsilon^2 + \ldots,$$
$$C = C_0 + C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^2 + \ldots.$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (2) будет иметь вид

$$\frac{dS_0}{dx} + \left(\frac{dS_0}{dy}\right)^2 = 2\mu \sin^2 \frac{y}{2} + C_0. \tag{3}$$

Как я уже говорил выше, оно почти тотчас же интегрируется. В самом деле, чтобы найти полный интеграл уравнения (3), достаточно положить (A_0 — некоторая постоянная)

$$\frac{dS_0}{dx} = A_0; \quad C_0 = A_0 + 2h\mu; \quad \frac{dS_0}{dy} = \sqrt{2\mu}\sqrt{h + \sin^2\frac{y}{2}},$$

$$S_0 = A_0 x + \sqrt{2\mu}\int \sqrt{h + \sin^2\frac{y}{2}}\, dy.$$

В результате мы приходим (с точностью до обозначений) к примеру, рассмотренному в п. 199. Неравенство $h > 0$ отвечает обычному случаю, неравенство $h < 0$ — случаю либрации, равенство $h = 0$ — предельному случаю.

Выпишем в явном виде важные частные решения.

Прежде всего упомянем простое решение

$$x = t,\ p = 0,\ y = 0,\ q = 0;$$

это *периодическое решение*. Посмотрим, какой вид имеют соответствующие асимптотические решения.

Если в S_0 положить $A_0 = h = 0$, то получим

$$S_0 = \mp 2\sqrt{2\mu}\cos\frac{y}{2},$$

откуда

$$p = 0, \qquad q = \pm\sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2}; \qquad \operatorname{tg}\frac{y}{4} = Ce^{\pm t\sqrt{2\mu}},\ x = t.$$

Мы видим, что в этом случае характеристические показатели равны $\pm\sqrt{2\mu}$.

Вычислим теперь S_1, S_2,... .

Приравняв в уравнении (2) коэффициенты при ε, найдем

$$\frac{dS_1}{dx} + 2\frac{dS_0}{dy}\frac{dS_1}{dy} = \mu\varphi(y)\cos x + C_1,$$

где постоянную C_1, не ограничивая общности, можно считать равной нулю, так что

$$\frac{dS_1}{dx} + 2\sqrt{2\mu}\sqrt{h + \sin^2\frac{y}{2}}\,\frac{dS_1}{dy} = \mu\varphi(y)\cos x. \tag{4}$$

Таким образом, функция S_1 представляет собой вещественную часть функции Σ, определяемой уравнением

$$\frac{d\Sigma}{dx} + 2\sqrt{2\mu}\sqrt{h + \sin^2\frac{y}{2}}\,\frac{d\Sigma}{dy} = \mu\varphi(y)\,e^{ix}. \tag{4bis}$$

Полагая

$$\Sigma = \psi e^{ix},$$

получим

$$i\psi + 2\sqrt{2\mu}\sqrt{h + \sin^2\frac{y}{2}}\,\frac{d\psi}{dy} = \mu\varphi. \tag{4ter}$$

Чтобы проинтегрировать это линейное уравнение, проинтегрируем сначала уравнение без правой части

$$\alpha\psi + \sqrt{h + \sin^2\frac{y}{2}}\,\frac{d\psi}{dy} = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{i}{2\sqrt{2\mu}},$$

и получим

$$\psi = Ke^{-\alpha\int \frac{dy}{\sqrt{h+\sin^2\frac{y}{2}}}}$$

(K — некоторая постоянная.) Обозначим эллиптический интеграл через

$$\int \frac{dy}{\sqrt{h+\sin^2\frac{y}{2}}} = u,$$

тогда

$$\psi = Ke^{-\alpha u}.$$

Такой вид имеет общее решение однородного уравнения. Чтобы проинтегрировать уравнение с правой частью, я буду считать, что K — некоторая функция от y. Тогда

$$2\sqrt{2\mu}\frac{dK}{dy}e^{-\alpha u}\sqrt{h+\sin^2\frac{y}{2}} = \mu\varphi,$$

откуда

$$K = \sqrt{\frac{\mu}{8}}\int e^{\alpha u}\varphi\frac{dy}{\sqrt{h+\sin^2\frac{y}{2}}} = \sqrt{\frac{\mu}{8}}\int e^{\alpha u}\varphi\,du$$

и, наконец,

$$\psi = e^{-\alpha u}\sqrt{\frac{\mu}{8}}\int e^{\alpha u}\varphi\,du. \tag{5}$$

Если положить $\alpha = \beta i$ (β — вещественное число), то

$$S_1 = \sqrt{\frac{\mu}{8}}\left[\cos(\beta u - x)\int \varphi\cos\beta u\,du + \sin(\beta u - x)\int \varphi\sin\beta u\,du\right]. \tag{6}$$

Выражения (5) и (6) мы рассмотрим несколько подробней. Прежде всего покажем, как проводятся последовательные приближения.

Имеем

$$\frac{dS_2}{dx} + 2\sqrt{2\mu}\sqrt{h+\sin^2\frac{y}{2}}\,\frac{dS_2}{dy} = \Phi. \tag{7}$$

Здесь Φ — известная функция от x и y, периодическая по x. Следовательно, ее можно записать в виде

$$\Phi = \Sigma\varphi_n e^{nix},$$

где n — целое (положительное или отрицательное) число, φ_n — известная функция от y. Сумма в правой части содержит конечное число слагаемых. Следовательно, если положить

$$S_2 = \Sigma \psi_n e^{nix},$$

причем ψ_n будет зависеть только от y, то функция ψ_n должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$in\psi_n + 2\sqrt{2\mu}\sqrt{h + \sin^2\frac{y}{2}}\frac{d\psi_n}{dy} = \varphi_n.$$

Это уравнение имеет в точности тот же вид, что и уравнение (4ter), и решается таким же способом.

Этот метод был использован Гильденом, хотя и в довольно отличном по форме виде в его мемуаре, помещенном в т. IX журнала «Acta mathematica».

Рассмотрим теперь выражения (5) и (6).

Прежде всего остановимся на обычном случае, когда $h > 0$. Функция $\varphi(y)$, периодическая по y, будет периодической и по u, причем период (по u) равен вещественному периоду эллиптического интеграла u. Следовательно, можно записать

$$\varphi = \Sigma A_m e^{im\lambda u},$$

где λ — некоторая вещественная постоянная, зависящая от периода интеграла u, а m — целое число.

Отсюда следует, что

$$\psi = \sqrt{\frac{\mu}{8}} \sum A_m \frac{e^{im\lambda u}}{\alpha + im\lambda}$$

или

$$\psi = \sum \frac{\mu A_m}{i} \frac{e^{im\lambda u}}{1 + m\lambda\sqrt{8\mu}},$$

и, наконец, если ρ_m и ω_m означают соответственно модуль и аргумент коэффициента A_m, то

$$S_1 = \sum \mu\rho_m \frac{\sin(m\lambda u + x\omega_m)}{1 + m\lambda\sqrt{8\mu}}. \tag{8}$$

Очевидно, что каждое слагаемое функции S_1 разлагается по степеням $\sqrt{\mu}$. Разложение всей функции S_1 можно попытаться получить, объединяя те члены в разложениях слагаемых, в которые множитель $\sqrt{\mu}$ входит в одинаковой степени. При этом *формально* мы получаем разложение функции S_1 по степеням $\sqrt{\mu}$. Пусть

$$S_1 = \Sigma T_p \mu^{\frac{p}{2}}. \tag{9}$$

Имеем

$$T_{p+2} = (-\lambda\sqrt{8})^p \Sigma m^p \rho_m \sin(m\lambda u + x + \omega_m).$$

Этот результат можно было бы получить и с помощью метода Болина. Пользуясь этим методом, мы разложили бы S по степеням $\sqrt{\mu}$:

$$S = S_0' + S_1'\sqrt{\mu} + S_2'\mu + \ldots + S_p'\mu^{\frac{p}{2}} + \ldots .$$

Функции S_p' в свою очередь можно было бы разложить по возрастающим степеням ε, а коэффициент при ε был бы не чем иным, как T_p.

Ряды T_p были бы сходящимися. В самом деле, если, как я предполагаю, функция $\varphi(y)$ голоморфна при всех вещественных значениях y, то

$$\rho_m < kh_0^{|m|},$$

где k и h_0 — две положительные постоянные ($h_0 < 1$). Отсюда следует, что ряд

$$\Sigma m^p \rho_m$$

сходится абсолютно. Это тем более верно для ряда T_{p+2}.

С другой стороны, разложение (8) сходится, но разложение (9) может расходиться.

Чтобы уяснить себе это, достаточно рассмотреть весьма простой пример. Положим

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad u = 0, \quad \omega_m = 0, \quad \rho_m = A^{|m|}, \quad 0 < A < 1, \ \lambda = \frac{1}{\sqrt{8}},$$

тогда

$$T_{p+2} = \Sigma(-m)^p A^{|m|} \ (m \text{ изменяется от } -\infty \text{ до } +\infty).$$

Отсюда следует, что T_{p+2} равно нулю, если p нечетно, и равно

$$2\Sigma m^p A^m \qquad (m \text{ изменяется от } 1 \text{ до } +\infty)$$

в противном случае.

Очевидно, что

$$\Sigma m^p A^m > \Sigma m(m-1)\ldots(m-p+1)A^m = \frac{p!\,A^p}{(1-A)^{p+1}},$$

откуда, например, при $A = {}^1/_2$

$$T_{p+2} > 2(p!).$$

Таким образом, каждый второй член разложения (9) обращается в нуль, а оставшиеся члены превосходят соответствующие члены разложения

$$2\Sigma q!\ \mu^{q+1},$$

что и доказывает расходимость этого разложения.

Сказанное только что о разложении S_1 равным образом относится и к разложению S_2 и других аналогичных функций.

В случае $h < 0$, т. е. в случае либрации, почти все остается без изменений. Единственное отличие состоит в том, что вещественный период интеграла u теперь равен не

$$u_0 = \int_0^{2\pi} \frac{dy}{\sqrt{R}},$$

а

$$u_1 = \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{dy}{\sqrt{R}},$$

где $\sqrt{R}$ означает $\sqrt{h + \sin^2 \frac{y}{2}}$ и $\beta = 2\arcsin \sqrt{-h}$. Следовательно, величина λ в этом случае должна быть равна не $2\pi/u_0$, а $2\pi/u_1$.

226. Большой интерес представляет предельный случай, когда $h = 0$. В этом случае

$$u = \int \frac{dy}{\sin \frac{y}{2}} = 2 \ln \operatorname{tg} \frac{y}{4}.$$

Полагая

$$\operatorname{tg} \frac{y}{4} = t,$$

получим

$$du = \frac{2dt}{t}.$$

Например, пусть

$$\varphi(y) = \sin y.$$

Тогда

$$\varphi(y) = \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2},$$

откуда

$$\psi = t^{-2\alpha} \sqrt{\frac{\mu}{8}} \int \frac{4t^{2\alpha}(1-t^2)\,dt}{(1+t^2)^2}.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\int \frac{t^{2\alpha}(1-t^2)\,dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t^{2\alpha+1}}{1+t^2} - 2\alpha \int \frac{t^{2\alpha}\,dt}{1+t^2},$$

откуда

$$\psi = 4\sqrt{\frac{\mu}{8}} \frac{t}{1+t^2} - it^{-2\alpha} \int \frac{t^{2\alpha}\,dt}{1+t^2}. \qquad (10)$$

Функцию ψ можно попытаться разложить, по крайней мере формально, по степеням $\sqrt{\mu}$. Однако для этого, может быть, лучше обратиться вновь к общему случаю.

Если y изменяется от 0 до 2π, то u изменяется от $-\infty$ до $+\infty$; $\varphi(y)$ зависит от u. Предположим, что эту зависимость можно представить в виде интеграла Фурье

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqu}\,\theta(q)\,dq.$$

Я утверждаю, что поскольку $\varphi(y)$ при всех вещественных значениях y аналитична и периодическая, то для этого достаточно, чтобы

$$\varphi(0) = 0.$$

Если эти условия соблюдены, то

$$\psi = \sqrt{\frac{\mu}{8}}\, e^{-\alpha u} \int du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+iq)u}\theta(q)\,dq.$$

На самом деле эта формула содержит одну произвольную, постоянную ибо пределы интегрирования по u неопределены. Этой постоянной я распоряжусь следующим образом.

Изменив порядок интегрирования и проинтегрировав сначала по u, получим

$$\psi = \sqrt{\frac{\mu}{8}}\, e^{-\alpha u} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{e^{(\alpha+iq)\,u}\theta(q)}{\alpha+iq} + \eta(q)\,\theta(q) \right] dq,$$

где $\eta(q)$ — произвольная функция от q, возникающая при интегрировании. Для начала в некоторых случаях мы будем считать эту функцию равной нулю. Тогда

$$\psi = \sqrt{\frac{\mu}{8}}\, e^{-\alpha u} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\alpha+iq)\,u}\theta(q)}{\alpha+iq}$$

или

$$\psi = \frac{\mu}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iqu}\,\theta(q)\,dq}{1+q\sqrt{8\mu}}, \tag{11}$$

или же, если ρ и ω модуль и аргумент функции $\theta(q)$,

$$S_1 = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho\sin(qu+x+\omega)\,dq}{1+q\sqrt{8\mu}}, \tag{12}$$

где ρ и ω зависят от q.

Но для того чтобы выражение (11) имело смысл, необходимо, чтобы интеграл был конечен, а для этого подынтегральное выражение не должно обращаться в бесконечность при $q = -1/\sqrt{8\mu}$, т. е. должно выполняться условие $\theta(-1/\sqrt{8\mu}) = 0$.

Поскольку в общем случае это условие не выполняется, формулу (11) можно было бы заменить следующей (эта новая формула соответствует другому выбору произвольной функции $\eta(q)$):

$$\psi = \frac{\mu}{i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iqu} - e^{iqu_0+\alpha(u_0-u)}}{1+q\sqrt{8\mu}}\,\theta(q)\,dq \tag{11bis}$$

(u_0 — некоторая произвольная постоянная), откуда

$$S_1 = \mu\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho\,dq}{1+q\sqrt{8\mu}}\left[\sin(qu+x+\omega) - \sin(qu_0+x+\omega) + \frac{u_0-u}{\sqrt{8\mu}}\right]. \tag{12bis}$$

Можно рассуждать иначе. В общем случае $\theta(q)$ представляет собой функцию от q, которая голоморфна, если q вещественно или если мнимая часть q не очень велика. Пусть, например,

$$\varphi = \sin y = \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

В соответствии с формулой Фурье

$$\theta(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi}{2\pi}\,e^{-iuq}\,du.$$

Подставляя сюда вместо φ и u их выражения через t, получим

$$2\pi\theta(q) = \int_{0}^{+\infty} \frac{4t^{-2iq}(1-t^2)\,dt}{(1+t^2)^2}.$$

Преобразовав этот интеграл так же, как формулу (10), найдем

$$2\pi\theta(q) = 8qi\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{-2iq}\,dt}{1+t^2} = \frac{8qi\pi}{e^{\frac{q\pi}{2}} + e^{-\frac{q\pi}{2}}},$$

откуда, наконец, получим

$$\theta(q) = \frac{4qi}{e^{\frac{q\pi}{2}} + e^{-\frac{q\pi}{2}}}.$$

Ясно, что функция $\theta(q)$ будет по-прежнему голоморфной, если q не будет равно $\sqrt{-1}$, умноженному на нечетное целое число.

Из сказанного следует, что формула

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqu}\,\theta(q)\,dq$$

останется верной, если интеграл брать не вдоль вещественной оси, а вдоль некоторой кривой C, целиком расположенной над этой осью, лишь бы расстояние между кривой и осью было достаточно мало, чтобы область, заключенная между вещественной осью и кривой C, не содержала ни одной особой точки функции $\theta(q)$.

Формулы (11) и (12) также будут верными, если фигурирующие в них интегралы брать вдоль указанной кривой C, *причем существование этих интегралов не связано с какими-либо ограничениями на* $\theta(q)$, ибо, какой бы она ни была, величина, стоящая под знаком интеграла, не будет обращаться в бесконечность вдоль пути интегрирования.

Одно важное свойство функции ψ, определенной соотношением (11), видно непосредственно. Под знаком интеграла стоит экспонента e^{iqu}. Поскольку мнимая часть q положительна, если интеграл u веществен, положителен и значение его достаточно велико, модуль этой экспоненты очень мал. Следовательно, при $u = +\infty$, т. е. при $y = 2\pi$, функции ψ и S_1 обращаются в нуль. Путь интегрирования C можно изменить и вместо него брать другой путь C', расположенный под вещественной осью. Расстояние между C' и вещественной осью должно быть достаточно малым, чтобы заключенная между ними область не содержала особых точек функции θ.

Интегралы (11) и (12), взятые вдоль C', приведут к другим значениям ψ и S_1 по сравнению с интегралами, взятыми вдоль C. Эти интегралы я обозначу через ψ' и S_1', чтобы отличать их от предыдущих.

Поскольку мнимая часть q отрицательна, если интеграл u веществен, отрицателен и значение его достаточно велико, то модуль экспоненты e^{iqu} достаточно мал. Следовательно, при $u = -\infty$, т.е. при $y = 0$, функции ψ' и S_1' обращаются в нуль.

Можно задать вопрос: совпадают ли функции ψ и ψ'? Ясно, что в области, заключенной между двумя путями интегрирования C и C', величина, стоящая под знаком интеграла, обладает одной особой точкой, а именно:

$$q = -\frac{1}{\sqrt{8\mu}}.$$

Эта особая точка представляет собой полюс. Следовательно, разность между указанными двумя интегралами равна числу $2i\pi$, умноженному на вычет. Итак,

$$\psi' - \psi = \pi\sqrt{\frac{\mu}{2}}\,e^{-\frac{iu}{\sqrt{8\mu}}}\,\theta\left(-\frac{1}{\sqrt{8\mu}}\right).$$

Обозначив через ρ_0 и ω_0 модуль и аргумент числа $\theta\left(-1/\sqrt{8\mu}\right)$, получим

$$S_1' - S_1 = \pi \sqrt{\frac{\mu}{2}}\, \rho_0 \cos\left(x - \frac{u}{\sqrt{8\mu}} + \omega_0\right).$$

Ясно, что ψ' не совпадает с ψ, за исключением того случая, когда

$$\theta\left(-\frac{1}{\sqrt{8\mu}}\right) = \theta(i\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi}{2\pi} e^{\alpha u} du = 0.$$

Попытаемся теперь разложить ψ и ψ' по степеням $\sqrt{\mu}$. При этом получим следующий результат. Пусть

$$\psi = \sum \mu^{\frac{p}{2}} \psi_p, \qquad \psi' = \sum \mu^{\frac{p}{2}} \psi_p',$$

тогда

$$\psi_p \text{ и } \psi_p' = \int \frac{e^{iqu}}{i}\, \theta(q)\, (-q\sqrt{8})^{p-2}\, dq$$

(интеграл берется вдоль кривой C для ψ_p и вдоль C' для ψ_p').

На этот раз подынтегральное выражение не содержит особых точек в области, заключенной между C и C', из чего следует

$$\psi_p = \psi_p'.$$

Итак, несмотря на то, что функции ψ и ψ' не совпадают, их формальные разложения по степеням $\sqrt{\mu}$ оказываются тождественными. Отсюда следует, что эти разложения не сходятся.

Это доказывает, что если считать параметр μ бесконечно малой первого порядка, то разность $\psi - \psi'$ будет бесконечно малой бесконечного порядка такой, как, например, $e^{-1/\mu}$.

В самом деле, в частном случае $\varphi(y) = \sin y$ имеем

$$\theta\left(-\frac{1}{\sqrt{8\mu}}\right) = \frac{-i\sqrt{\frac{\mu}{2}}}{e^{\frac{\pi}{4\sqrt{2\mu}}} + e^{-\frac{\pi}{4\sqrt{2\mu}}}},$$

откуда следует, что разности $\psi - \psi'$ и $S_1 - S_1'$ являются величинами того же порядка, что и

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} e^{-\frac{\pi}{4\sqrt{2\mu}}}.$$

227. Ниже мы получим эти же результаты еще раз с помощью более простых средств. Пока же я хочу еще раз обратиться к ним, чтобы переход от обычного случая к предельному стал более понятным.

В самом деле, сравним формулы (8) и (12). Ряд в формуле (8) содержит величину $m\lambda$; поскольку m — целое число, величина $m\lambda$ может принимать лишь те значения, которые отстоят друг от друга на λ. Если h стремится к нулю, то период интеграла u обращается в бесконечность, и λ стремится к нулю. Значения $m\lambda$ отличаются между собой все меньше и меньше, и в пределе ряд переходит в интеграл (12).

Монотонно убывая, λ проходит через некоторые значения, при которых возникает одно обстоятельство, заслуживающее внимания.

Если число $-1/\lambda\sqrt{8\mu}$ становится целым, то в формуле (8) знаменатель

$$1 + m\lambda\sqrt{8\mu}$$

обращается в нуль, и формула теряет смысл, так как один из ее членов обращается в бесконечность. Нетрудно видеть, что в этом случае член, обращающийся в бесконечность, следует заменить выражением

$$\sqrt{\frac{\mu}{8}}\,A_m u e^{-\alpha u} = \sqrt{\frac{\mu}{8}}\,A_m u e^{im\lambda u}. \tag{13}$$

Действительно, имеем

$$\psi = \sqrt{\frac{\mu}{8}}\,e^{-\alpha u}\sum A_m \int e^{(im\lambda+\alpha)u}du.$$

Если выражение $im\lambda + \alpha$ не равно нулю, то интеграл в правой части равен

$$\frac{e^{(im\lambda+\alpha)u}}{im\lambda+\alpha}$$

плюс некоторая постоянная, которую можно считать равной нулю. Если же выражение $im\lambda + \alpha$ равно нулю, то интеграл равен u плюс некоторая постоянная, которую также можно считать равной нулю.

Таким образом, если в ψ вместо члена, обращающегося в бесконечность, подставить выражение (13), то функция ψ не будет обращаться в бесконечность, но перестанет быть периодичной по u.

228. Обратимся вновь к предельному случаю, когда $h = 0$, и предположим сначала, что

$$\varphi(y) = \sin y.$$

Формула (10) будет иметь вид

$$\psi = 4\sqrt{\frac{\mu}{8}}\,\frac{t}{1+t^2} - it^{-2\alpha}\int_0^t \frac{t^{2\alpha}dt}{1+t^2} + Ct^{-2\alpha},$$

где C — постоянная интегрирования. Первый член разлагается по возрастающим степеням t при условии, что t меньше 1. Второй член также разлагается по t, ибо

$$\frac{t^{2\alpha}}{1+t^2} = \sum t^{(2\alpha+2n)}(-1)^n.$$

Интегрируя, получим

$$\psi = \sqrt{2\mu}\sum t^{(2n+1)}(-1)^n - i\sum \frac{t^{2n+1}(-1)^n}{2\alpha+2n+1} + Ct^{-2\alpha}.$$

Нетрудно видеть, что при $t = 0$ функция $\psi - Ct^{-2\alpha}$ обращается в нуль. С другой стороны, поскольку вещественная часть α равна нулю, выражение $t^{-2\alpha}$ при $t = 0$ в нуль не обращается.

Итак, чтобы функция ψ обращалась в нуль при $t = 0$, т. е. при $u = -\infty$, необходимо и достаточно, чтобы постоянная C была равна нулю. Следовательно, функция, которую мы в п. 226 обозначали через ψ', равна

$$\psi' = \sqrt{2\mu}\frac{t}{1+t^2} - it^{-2\alpha}\int_0^t \frac{t^{2\alpha}dt}{1+t^2}.$$

Поэтому формулу (10) я могу записать в виде

$$\psi = \sqrt{2\mu}\frac{t}{1+t^2} + it^{-2\alpha}\int_t^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}dt}{1+t^2} + C't^{-2\alpha},$$

где C' — новая постоянная.

Если предположить, что t больше 1, и разложить ψ по убывающим степеням t, то

$$\psi = \sqrt{2\mu}\sum t^{-(2n+1)}(-1)^n + i\sum \frac{t^{-(2n+1)}(-1)^n}{2n+1-2\alpha} + C't^{-2\alpha}.$$

При $t = \infty$ первый и второй члены обращаются в нуль. Третий же член в нуль не обращается.

Итак, чтобы функция ψ обращалась в нуль при $t = \infty$, т. е. при $u = \infty$, необходимо и достаточно, чтобы постоянная C' была равна нулю. Следовательно, функция, которую в п. 226 мы обозначали через ψ_∞, равна

$$\psi = \sqrt{2\mu}\frac{t}{1+t^2} + it^{-2\alpha}\int_t^{\infty} \frac{t^{2\alpha}dt}{1+t^2}.$$

Поэтому ψ и ψ' будут совпадать, если

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}dt}{1+t^2} = 0,$$

что, как мы видели выше, не имеет места.

Рассмотрим более общий случай. Предположим, что функция $\varphi(y)$ обращается в нуль при $y = 0$. Тогда

$$\psi = t^{-2\alpha}\sqrt{\frac{\mu}{8}}\int \varphi t^{2\alpha-1}dt.$$

Функция φ обращается в нуль при $y = 0$, т. е. при $t = 0$, и при $y = 2\pi$, т. е. при $t = \infty$. Пусть сначала t мало. Разложим φ по степеням t:

$$\varphi = \sum A_n t^n,$$

откуда

$$\psi = \sqrt{\frac{\mu}{8}}\, t^{-2\alpha}\int_0^t \varphi t^{2\alpha-1}dt + Ct^{-2\alpha} = \sqrt{\frac{\mu}{8}}\sum A_n \frac{t^n}{2\alpha+n} + Ct^{-2\alpha},$$

где C — постоянная интегрирования. Чтобы это выражение при $t = 0$ обращалось в нуль, необходимо и достаточно, чтобы постоянная C была равна нулю. Итак, функция ψ' из п. **226** равна

$$\psi' = \sqrt{\frac{\mu}{8}}\, t^{-2\alpha}\int_0^t \varphi t^{2\alpha-1}dt = \sqrt{\frac{\mu}{8}}\sum A_n \frac{t^n}{2\alpha+n}. \tag{14}$$

Пусть теперь t велико. Разложим φ по убывающим степеням t:

$$\varphi = \sum B_n t^{-n},$$

тогда

$$\varphi = -\sqrt{\frac{\mu}{8}}\, t^{-2\alpha}\int_t^\infty \varphi t^{2\alpha-1}dt + C't^{-2\alpha} = \sqrt{\frac{\mu}{8}}\sum \frac{B_n t^{-n}}{2\alpha+n} + C't^{-2\alpha},$$

где C' — постоянная интегрирования. Это выражение обращается в нуль при $t = \infty$ в том и только том случае, если постоянная C' равна нулю. Следовательно, функция ψ из п. **226** равна

$$\psi = -\sqrt{\frac{\mu}{8}}\, t^{-2\alpha}\int_t^{+\infty} \varphi t^{2\alpha-1}dt = \sqrt{\frac{\mu}{8}}\sum \frac{B_n t^{-n}}{2\alpha-n}. \tag{15}$$

Чтобы ψ совпадала с ψ', необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^\infty \varphi t^{2\alpha-1}dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi e^{\alpha u}du = 0,$$

т. е.

$$\theta(i\alpha) = 0,$$

которое, вообще говоря, не выполняется.

Разложим теперь выражения (14) и (15) по степеням $\sqrt{\mu}$. Тогда

$$\psi' = \frac{\mu}{2i} \sum A_n \frac{t^n}{1 - in\sqrt{2\mu}},$$

откуда получаем формальное разложение

$$\psi' = \sum T'_p \mu^{\frac{p+2}{2}}, \qquad T'_p = \frac{1}{2i} \sum A_n t^n n^p (\sqrt{-2})^p. \tag{16}$$

Точно так же из формулы (15) получим

$$\psi = \frac{\mu}{2i} \sum B_n \frac{t^{-n}}{1 + in\sqrt{2\mu}},$$

откуда

$$\psi = \sum T_p \mu^{\frac{p+2}{2}}, \qquad T_p = \frac{1}{2i} \sum B_n t^n n^p (-\sqrt{-2})^p. \tag{16bis}$$

В этом виде разложений их тождественность не столь очевидна, как в том виде, который мы получили раньше.

229. Однако перейти от разложений одного вида к разложениям другого вида нетрудно. Действительно,

$$\theta(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi}{2\pi} e^{-iqu} du.$$

Я утверждаю, что функция $\theta(q)$ мероморфна по q. Ее особые точки являются полюсами, расположенными в точках комплексной плоскости $^1/_2 ik$, где k — целое (положительное или отрицательное) число. Действительно, запишем

$$2\pi\theta(q) = \int_0^{\infty} \varphi e^{-iqu} du + \int_{-\infty}^{0} \varphi e^{-iqu} du.$$

Если мнимая часть q положительна, то второй интеграл является голоморфной функцией относительно q, не обладающей никакими особыми точками, ибо при $u = -\infty$ функции φ и e^{-iqu} обращаются в нуль. В случае первого интеграла дело может обстоять иначе.

Если же мнимая часть q отрицательна, то первый интеграл будет голоморфной функцией от q, а второй интеграл может и не быть ей.

Итак, рассмотрим особые точки, которые могут быть у второго интеграла, если мнимая часть q отрицательна. Предположим, что эта мнимая часть больше $-n/2$. Выпишем разложение

$$\varphi = \Sigma A_n t^n = \Sigma A_n e^{+\frac{nu}{2}}.$$

Его можно переписать в виде

$$\varphi = A_1 e^{+\frac{u}{2}} + A_2 e^{+u} + \ldots + A_n e^{\frac{nu}{2}} + R_n.$$

Если u стремится к $-\infty$, то произведение $R_n e^{-\frac{nu}{2}}$ будет стремиться к нулю. В этом случае второй интеграл можно записать в виде

$$I_1 + I_2 + \ldots + I_n + S_n,$$

где

$$I_k = A_k \int_{-\infty}^{0} e^{\left(\frac{k}{2} - iq\right)u} du, \qquad S_n = \int_{-\infty}^{0} R_n e^{-iqu} du.$$

Только при условии, что мнимая часть q меньше $-k/2$, интеграл I_k имеет смысл непосредственно, и лишь с помощью аналитического продолжения можно доопределить его, если указанное условие нарушается. Таким образом получаем, что

$$I_k = \frac{A_k}{k/2 - iq}.$$

Что же касается интеграла S_n, то эта функция не имеет особых точек, если мнимая часть q больше $-n/2$, ибо подынтегральное выражение при $u = \infty$ обращается в нуль.

Ясно, что второй интеграл является мероморфной функцией от q и имеет полюсы в

$$q = -i\frac{k}{2} \qquad (k \text{ — целое положительное число}).$$

Ее вычеты в этих точках равны iA_k.

Точно так же можно было бы усмотреть, что первый интеграл представляет собой мероморфную функцию от q с полюсами в

$$q = i\frac{k}{2} \qquad (k \text{ — целое положительное число})$$

и вычетами iB_k.

Следовательно, полюсами функции $\theta(q)$ служат точки

$$q = \pm i\frac{k}{2}$$

с вычетами, равными соответственно

$$\frac{B_k}{2\pi i},$$

если берется верхний знак и

$$-\frac{A_k}{2\pi i},$$

если берется нижний знак.

Вернемся к формуле (11). Будем предполагать, что интеграл берется вдоль кривой C.

Построим окружность K с центром в начале координат и радиусом $(2m + 1)/4$, где число m очень велико. Пусть K_1 — та часть этой окружности, которая расположена над кривой C, а C_1 — та часть кривой C, которая расположена внутри окружности K.

Две дуги C_1 и K_1 образуют замкнутый контур, и интеграл (11), взятый по этому контуру, будет равен $2i\pi$, умноженному на сумму вычетов, расположенных внутри контура, т. е. сумме m первых членов ряда (15).

Можно было бы доказать, что интеграл (11), взятый по K_1, стремится к нулю, если m стремится к бесконечности. Вычисления можно было бы провести без особого труда, но это излишне, ибо мы заранее знаем, что ряд (15) сходится.

Интеграл, взятый по C_1, стремится к ψ; следовательно, ψ равна сумме ряда (15).

Итак, мы вновь получаем как разложение (14), так и разложения (16) и (16bis).

Сказанного достаточно, чтобы понять, каким образом от разложения п. 226 можно перейти к разложениям п. 228.

230. Теперь можно попытаться установить связь между разложениями п. 228 и разложениями главы VII.

В п. 225 мы видели, что при $\varepsilon = 0$ уравнения допускают простое периодическое решение

$$x = t, \qquad p = y = q = 0$$

с характеристическими показателями $\pm\sqrt{2\mu}$, причем им соответствуют асимптотические решения

$$p = 0, \qquad q = \pm\sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2}, \qquad \operatorname{tg}\frac{y}{4} = Ce^{\pm t\sqrt{2\mu}}, \qquad x = t.$$

Третье из этих соотношений можно записать либо в виде

$$\operatorname{ctg}\frac{y}{4} = Ce^{t\sqrt{2\mu}},$$

либо в виде

$$\operatorname{tg}\frac{y}{4} = Ce^{t\sqrt{2\mu}}$$

в зависимости от того, берется нижний знак или верхний.

Поскольку характеристические показатели отличны от нуля, из принципов, изложенных в главах III и IV, следует, что при малых значениях ε периодическое решение все еще существует. Кроме того, $x = t$, в то время как p, y и q являются функциями от t и ε, допускающими разложение по возрастающим степеням ε, обращающимися в нуль при $\varepsilon = 0$ и периодическими с периодом 2π по t.

Те характеристические показатели, которые равны по абсолютной величине и имеют противоположные знаки (я буду обозначать их $\pm \beta$), также допускают разложение по возрастающим степеням ε (ср. главу IV). При $\varepsilon = 0$ характеристический показатель $\beta = \pm \sqrt{2\mu}$.

Аналогично при малых значениях ε существует два набора асимптотических решений, которые имеют следующий вид. Для первого набора

$$x = t, \qquad p = \eta_1, \qquad q = \eta_2, \qquad \operatorname{ctg} \frac{y}{4} = \eta_3, \tag{17}$$

где η_1, η_2 и η_3 — ряды, расположенные по степеням $Ce^{-\beta t}$, коэффициенты которых периодичны по t.

Для второго набора

$$x = t, \qquad p = \eta_1', \qquad q = \eta_2', \qquad \operatorname{tg} \frac{y}{4} = \eta_3', \tag{17bis}$$

где η_1', η_2' и η_3' — ряды, расположенные по степеням $Ce^{+\beta t}$, коэффициенты которых периодичны по t.

Если эти величины рассматривать теперь как функции от ε, то из п. 106 следует, что шесть функций η можно разлагать по возрастающим степеням ε.

Если же эти величины рассматривать как функции от μ, то из п. 104 следует, что каждый член разложений шести функций η будет иметь коэффициент вида

$$\frac{N}{\Pi},$$

где N — некоторый многочлен, разложенный по возрастающим степеням $\sqrt{\mu}$ и β, а Π — произведение сомножителей вида

$$m\sqrt{-1} + n\beta,$$

где m и n — целые (положительные или отрицательные) числа.

Отношение N/Π, как мы видели в п. 108, можно разложить по степеням $\sqrt{\mu}$, но такое разложение, вообще говоря, носит чисто формальный характер, ибо при $\mu = 0$ характеристические показатели обращаются в нуль.

Преобразуем выражения (17) и (17bis). Начнем с того, что всюду произведем замену t на x. Из соотношения

$$\operatorname{ctg} \frac{y}{4} = \eta_3$$

найдем C:

$$Ce^{\beta x} = \zeta.$$

Если заметить, что при $\varepsilon = 0$ функция η_3 будет равна $Ce^{\beta x}$, то функцию ζ можно разложить по степеням ε и $\operatorname{ctg} y/4$, причем коэффициенты разложения будут периодическими по x.

Подставим в η_1 и η_2 вместо $Ce^{\beta x}$ функцию ζ. Тогда η_1 и η_2 станут функциями от x и y и выражение

$$\eta_1 dx + \eta_2 dy$$

будет полным дифференциалом dS. Взяв интеграл от этого дифференциала, получим некоторую функцию S, обладающую следующими свойствами.

1. Ее производные периодичны по x.
2. Сама функция допускает разложение по степеням ε и $\operatorname{ctg} y/4$.
3. Каждый член разложения

$$\frac{dS}{dx} = \eta_1 \quad \text{или} \quad \frac{dS}{dy} = \eta_2$$

имеет вид косинуса или синуса от аргумента, кратного x, умноженного на некоторую степень $\operatorname{ctg} y/4$, некоторую степень ε и на коэффициент вида

$$\frac{N}{\Pi},$$

где N разлагается по степеням ε, $\sqrt{\mu}$ и β, а Π — произведение множителей вида

$$m\sqrt{-1} + n\beta.$$

4. Выражение N/Π разлагается по степеням ε и $\sqrt{\mu}$; следовательно, функция S также разлагается по степеням ε и $\sqrt{\mu}$, причем в то время как разложение S по степеням ε сходится, ее разложение по степеням $\sqrt{\mu}$ имеет смысл лишь с формальной точки зрения.

Аналогичным образом можно поступить и с выражением (17bis). При этом мы получим функцию S', вполне аналогичную S. Единственное отличие состоит в том, что вместо переменных ε и $\operatorname{ctg} y/4$, функция S' будет разлагаться по степеням ε и $\operatorname{tg} y/4$.

Я утверждаю, что функцию S можно разложить по степеням ε:

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \ldots .$$

Коэффициент S_1 представляет собой не что иное, как вещественную часть ψe^{ix}, где ψ имеет вид разложения по степеням $\operatorname{ctg} y/4$, т. е. по убывающим степеням переменной, которую в п. 228 я обозначил через t.

Это разложение и есть разложение (15).

Посмотрим, что произойдет, если выражение N/Π подвергнуть такому преобразованию.

Числитель N разлагается по степеням ε. С другой стороны, поскольку β разлагается по степеням ε, то

$$\frac{1}{m\sqrt{-1}+n\beta}$$

также будет разлагаться по степеням ε, причем первый член разложения будет равен

$$\frac{1}{m\sqrt{-1}+n\sqrt{2\mu}}.$$

Предположим, что в выражении N/Π первый член разложения N по степеням ε равен $(\varepsilon\mu/2)B_n$, а произведение Π сводится к единственному множителю

$$\sqrt{-1}-n\beta.$$

В этом случае первый член разложения N/Π равен

$$\frac{\varepsilon\mu}{2}\,\frac{B_n}{\sqrt{-1}-n\sqrt{2\mu}}=\varepsilon\sqrt{\frac{\mu}{8}}\,\frac{B_n}{2\alpha-n}.$$

Отсюда видно, что в разложении (15) имеется коэффициент

$$\frac{B_n}{2\alpha-n}.$$

Функция S' также разлагается по степеням ε:

$$S'=S_0'+S_1'\varepsilon+\ldots.$$

Здесь коэффициент S_1' равен вещественной части функции $\psi' e^{ix}$, где ψ' означает некоторое разложение по степеням t. Это разложение совпадает с разложением (14).

231. Функции S и S' имеют вид некоторых разложений. S разлагается по степеням $\operatorname{ctg} y/4$. Это разложение сходится лишь при условии, что y достаточно близко к 2π. S' разлагается по степеням $\operatorname{tg} y/4$. Это разложение сходится лишь при условии, если y достаточно мало. Однако с помощью аналитического продолжения функции S и S' можно определить при произвольных значениях y. Эти функции можно «продолжить» так, чтобы они обе были определены при значениях y, заключенных между y_0 и y_1 (величины y_0 и y_1 сами заключены между 0 и 2π).

Можно задать вопрос: совпадают ли функции S и S' в области совместного определения? Ответ должен быть отрицательным. Действительно, если бы выполнялось тождество

$$S=S',$$

то члены сходящихся разложений для S и S' по степеням ε должны были совпадать. В частности, должно было бы выполняться равенство

$$S_1 = S_1'$$

и, следовательно,

$$\psi = \psi'.$$

Но ранее мы видели, что $\psi \neq \psi'$.

Поэтому функция S не совпадает с S'. Отсюда можно вывести важное заключение. Мы знаем, что S и S' *формально* разлагаются по степеням $\sqrt{\mu}$:

$$\begin{aligned} S &= T_0 + T_1\sqrt{\mu} + T_2\mu + \ldots, \\ S' &= T_0' + T_1'\sqrt{\mu} + T_2'\mu + \ldots. \end{aligned} \tag{18}$$

Эти разложения можно получить либо с помощью методов пунктов **207—210**, либо если взять за исходные решения (17) и (17bis), разложить их по степеням $\sqrt{\mu}$ (ср. п. **108**) и преобразовать затем так же, как в п. **230**.

При y, мало отличающемся от 2π, функция T_i разлагается по степеням ε и $\operatorname{ctg} y/4$. При y, мало отличающемся от нуля, функция T_i' разлагается по степеням ε и $\operatorname{tg} y/4$. Это свойство характерно. В самом деле, функция S является единственной функцией, допускающей разложение по степеням ε и $\operatorname{ctg} y/4$ и удовлетворяющей уравнению (2). Точно так же функция S' является единственной функцией, допускающей разложение по степеням ε и $\operatorname{tg} y/4$ и удовлетворяющей уравнению (2).

С другой стороны, из пунктов **207—210** вытекает, что T_i можно представить в виде рядов, расположенных по синусам и косинусам аргументов, кратных $y/2$. Следовательно, эти функции разлагаются при y, мало отличающемся от 2π, по степеням ε и $\operatorname{ctg} y/4$, а при y, достаточно мало отличающемся от нуля, по степеням ε и $\operatorname{tg} y/4$.

Следовательно,

$$T_i = T_i'.$$

Поэтому если бы разложения (18) сходились, то выполнялось бы равенство

$$S = S'.$$

Итак, разложения (18) расходятся. Отсюда следует, что разложения п. **108**, *откуда они получаются, расходятся тем более* (ср. п. **109**, стр. 299, п. **212**, стр. 671).

232. Ранее я предполагал, что $\varphi(y)$ при $y = 0$ обращается в нуль. Это ограничение несущественно. Если бы $\varphi(0)$ было отлично от нуля и равнялось, например, A_0, то к разложениям (14) и (15) достаточно было бы добавить член

$$\sqrt{\frac{\mu}{\delta}}\,\frac{A_0}{2\alpha}$$

и ту же константу следовало бы прибавить к интегралам (11), определяющим ψ и ψ'.

Я достаточно подробно остановился на этом примере, который не только позволил мне доказать расходимость рядов пунктов 108 и 207, но и обладал некоторыми другими преимуществами.

Во-первых, с помощью этого примера мы смогли уяснить суть перехода от разложений, аналогичных разложениям п. 225, к разложениям, аналогичным разложениям п. 104, перехода, при котором используются ряды пунктов 226 и 228.

Во-вторых, особенности, на наличие которых я указывал выше, служат первым указанием на существование периодических решений второго рода и двоякоасимптотических, к которым я намереваюсь вернуться несколько позже.

КОММЕНТАРИИ

I

Почти весь материал первого тома «Methodes Nouvelles» стал классическим. Первая глава содержит сжатое изложение основных теорем аналитической динамики, сопровождаемое примерами приложений к выбору подходящих координат в различных небесно-механических задачах. Пуанкаре вводит и систематически использует канонические переменные действие — угол (переменные Делоне) сперва в ограниченной, а потом и в неограниченной задаче трех тел. Он вводит затем новые канонические переменные (переменные Пуанкаре), удобные для исследования орбит, близких к круговым.

Вторая глава содержит аналитический подготовительный материал для дальнейших исследований. Здесь подробно излагается метод мажорант Коши. Далее рассматривается теорема о неявной функции, алгеброидные особые точки, ряды Пюизе. Наконец, доказывается сохранение четности числа вещественных особых точек при деформации функции.

Третья глава посвящена периодическим решениям. Здесь исследуется поведение периодических решений при возмущениях (теория бифуркаций) и «метод Пуанкаре» нахождения периодических решений разложением в ряд по степеням малого параметра. Результаты применяются к задаче трех тел, для которой Пуанкаре нашел много интересных периодических решений. Далее Пуанкаре находит периодические решения общей канонической системы дифференциальных уравнений, близких к интегрируемым; идеи этого раздела послужили основой теорем Биркгофа о существовании бесконечного числа периодических решений в окрестности данного периодического решения.

Четвертая глава — характеристические показатели — состоит из двух частей. В первой излагается общая теория линейных уравнений с периодическими коэффициентами, с учетом наличия первых интегралов и интегральных инвариантов. Во второй части исследуются характеристические показатели периодических решений задачи трех тел и находятся их разложения в ряд по степеням малого параметра (вообще дробным).

Пятая глава посвящена доказательству неинтегрируемости задачи трех тел. Здесь доказывается несуществование аналитического (и аналитически зависящего от параметров) первого интеграла, независимого от классических и однозначного в переменных действие — угол. Сущность идеи Пуанкаре состоит в том, что сложное поведение решений возмущенной системы (в частности рождение многочисленных невырожденных периодических решений) несовместимо с интегрируемостью: существование каждого добавочного первого интеграла накладывает на поведение решений довольно

жесткие ограничения. Возможности, предоставляемые этой идеей, далеко не исчерпаны и сейчас.

В шестой главе изучаются аналитические свойства пертурбационной функции, т. е. энергии взаимодействия, и асимптотика ее коэффициентов Фурье высокого порядка. С математической точки зрения речь идет об исследовании особых точек интеграла от аналитической функции нескольких переменных, рассматриваемого как функция параметров («точек пинча»). Это исследование проводится затем подробно для специального случая пертурбационной функции задачи трех тел. Результат применяется к проверке невырожденности задачи трех тел, нужной для проведенного в предыдущей главе доказательства несуществования первых интегралов. Однако значение этих исследований Пуанкаре выходит далеко за рамки небесной механики, так как аналогичные задачи об асимптотиках и об интегралах, зависящих от параметра, встречаются в самых разных областях.

Седьмая глава — асимптотические решения — посвящена инвариантным многообразиям, связанным с периодическими решениями, устойчивым и неустойчивым «усам». Намеченная Пуанкаре теория была позже развита и обобщена многими авторами, в особенности Адамаром и Перроном. Глава заканчивается построением асимптотических разложений для инвариантных многообразий гамильтоновых систем, близких к интегрируемым.

1 (стр.14). Современное изложение гамильтоновой механики можно найти в кн.: R. A b r a h a m and J. M a r s d e n. Foundations of Mechanics. Benjamin, 1967.

2 (стр.16). Задача о притяжении двумя неподвижными центрами подробно разобрана в книге Шарлье «Небесная механика» (М., изд-во «Наука», 1966, гл. III). Неточности в качественном исследовании Шарлье позднее исправлялись в работах Талквиста (Acta Societatis Scientiarum Fennicae, 1927, 1, № 3, 5) и Бадаляна (Астр. ж., 1934, II, вып. 4; Comment. Phys.- Math. Soc. Scient. Fennicae, 1935, 8, № 2).

В последнее время вновь усилилось внимание к задаче двух неподвижных центров. Потенциал двух центров хорошо аппроксимирует потенциал слегка вытянутого эллипсоида. Если же поместить центры в мнимые точки, то получится хорошая аппроксимация потенциала сплюснутого эллипсоида. Поэтому решением задачи о двух неподвижных центрах можно воспользоваться в качестве некоторого приближения при исследовании движения спутников сжатых планет.

См. по этому поводу, например, статью Аксенова, Гребенникова и Демина. Астр. ж., 1963, 40, 2, а также: W. T. K y n e r. Qualitative Properties of Orbits about an oblate Planet.— Comment. on Pure and Applied Mathematics, 1964, XVIII, № 2, 227—236; C. C. C o u l e y. A disc mapping associated with satellite problems, ibid., 237—243.

3. (стр. 17). Рассматриваемый здесь предельный случай задачи трех тел называют теперь «ограниченной задачей трех тел». В случае, когда наклонение равно нулю, говорят о «плоской ограниченной задаче трех тел», а если еще эксцентриситет орбиты возмущающей массы равен нулю — о «плоской ограниченной круговой задаче трех тел».

Ограниченной задаче трех тел, после Пуанкаре, посвящены многочисленные исследования. Обзор современного состояния вопроса и список литературы можно найти в статьях М. Хенона (M. H e n o n. Exploration numérique du problème restreint.

I—IV.— Annales d'Astronomie, 1965, **28**, № 3 и 6; Bulletin Astronomique, ser. 3, 1966, I, fasc. 1, 2).

4 (стр. 24). Формулы (3) и следующие за ними не согласуются с уравнением Кеплера $n^2a^3 = M$. Должно быть

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \Theta, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \omega}\right)^2 + \frac{\Theta^2}{\sin^2 \omega} = G^2, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{G^2}{r^2} = \frac{2M}{r} + 2h,$$

$$L = \sqrt{Ma},\ G = \sqrt{Ma(1-e^2)},\ h = -\frac{M^2}{2L^2},\ n = \frac{M^2}{L^3}.$$

5 (стр. 29). Ссылка дана здесь на: F. T i s s e r a n d. Traité de Mécanique Céleste, t. I (Perturbations des planètes d'après la méthode de la variation des constantes arbitraires). Paris, 1889, ch. IV, p. 77; см. также: Г. Н. Д у б о ш и н. Небесная механика. М., 1968, стр. 736 и далее.

6 (стр. 33). Пуанкаре ссылается здесь на некоторые результаты, изложенные в т. I труда Тиссерана в гл. XVIII (Développement de la fonction perturbatrice dans le cas ou les excentricités et les inclinaisons mutuelles des orbites sont considérables), в частности на формулы (32), (38) и (39) этой главы.

7 (стр. 45). В старой русской литературе принят термин «частные интегралы». Современные термины — «инвариантное многообразие» или «инвариантный идеал».

8 (стр. 60). Пуанкаре ссылается здесь на свою работу: «Sur un moyen d'augmenter la convergence des séries trigonométriques» (Об одном способе ускорить сходимость тригонометрических рядов.)— Bulletin Astronomique, 1886, 3. Эта работа вошла в собрание сочинений Пуанкаре: H. P o i n c a r é. Oeuvres, t. 4[1].

9 (стр. 67). Диссертация Пуанкаре (Thèse inaugurale, т. е. вступительная — для получения права преподавания в высших учебных заведениях) опубликована под названием: «Sur les propriétés des fonctions définies par des équations aux différences partielles» (О свойствах функций, определяемых уравнениями в частных производных). Paris, 1879; перепечатана в «Oeuvres», t. 1, 1928.

10. (стр. 70). См.: А. П у а н к а р е. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.— Л., 1947, гл. XVIII (стр. 210 и далее).

11 (стр. 70). Об индексе Кронекера см. книгу, указанную в предыдущем прим., стр. 220.

12 (стр. 75). Понимаемое буквально, высказанное утверждение опровергается примером $F_0 = x_1 + \sqrt{2}x_2$, $F_1 = F_2 = \ldots = 0$.

Утверждение Пуанкаре, что в любой окрестности любой точки есть замкнутая траектория, естественно относить лишь к системам «общего положения». В такой форме оно правдоподобно, но до сих пор не доказано. Важные результаты в этом направлении недавно получил Пью (P u g h. The Hamiltonian closing lemma. Международный математический конгресс. Москва, 1966). Пью показал, что малым (с первыми производными) изменением гамильтонова векторного поля можно добиться того, чтобы проходящая через данную точку траектория стала замкнутой. Неизвестно, можно ли добиться этого более гладкой деформацией, тем более аналитической, как того требовал Пуанкаре.

[1] Дальше цитируется «Oeuvres» с указанием тома.

13 (стр. 76). Намеченная здесь теория бифуркации периодических решений послужила основой работы Пуанкаре о геодезических на выпуклых поверхностях (см. настоящее собрание сочинений, т. 2).

14 (стр. 87). G. W. H i l l. Researches in the Lunar Theory.— Amer. Journal of Mathematics, 1878, 1, p. 5—26, 129—147, 245—260; см. также: G. W. H i l l. The Collected Mathematical Works, v. I, 1905, p. 284—335.

15 (стр. 87). Здесь Пуанкаре ссылается на свою работу: «Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps» (О некоторых частных решениях задачи трех тел). Bull. Astr., 1884, 1. Она воспроизведена в «Oeuvres», t. 7. Paris, 1952.

16 (стр. 95). При перепечатке своего мемуара в «Collect. Math. Works» (см. прим [14]) Хилл дал следующую сноску: «The attribution of the maximum lunation to this moon is erroneus as was first pointed out to me by J. C. Adams and afterwards by M. Poincaré». (Ошибочно приписывать максимум лунации этой луне, как было мне указано сначала Дж. Адамсом, а затем г. Пуанкаре.) См. указ. выше соч., стр. 326.

17 (стр. 111). В этих словах Пуанкаре можно усмотреть зародыш того, что теперь называется «теорией Морса».

Речь идет по существу о числе критических точек гладкой функции на торе.

Аргументация Пуанкаре была, вероятно, следующей.

В мемуарах «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» (ОГИЗ, 1947, гл. XVIII) Пуанкаре фактически доказал, что для любой гладкой функции на многообразии число

$$\chi = M_0 - M_1 + M_2 \ldots,$$

где M_0 — число минимумов, M_1 — число седел с одним отрицательным квадратом, M_2 — с двумя, ... одно и то же и совпадает с «характеристикой Эйлера — Пуанкаре» этого многообразия, $\chi = b_0 - b_1 + \ldots$, где b_i — i-е число Бетти. В частности, эйлерова характеристика тора равна нулю, поэтому

$$M_0 - M_1 + M_2 = 0.$$

Но так как число минимумов M_0 и число максимумов M_2 не меньше 1, то M_1 не меньше 2. Отсюда Пуанкаре и приходит к выводу, что общее число критических точек функции на торе не меньше 4. Для трехмерного тора характеристика Эйлера — Пуанкаре равна 0, поэтому

$$M_0 - M_1 + M_2 - M_3 = 0.$$

Хотя M_0 и M_3 не меньше 1, Пуанкаре не смог извлечь отсюда информации о существовании других критических точек, чем и объясняется заключительная часть фразы на стр. 111.

В действительности критические точки, отличные от максимума и минимума, существуют у любой гладкой функции на многообразии, не гомеоморфном сфере (J. M i l n o r. Sommes de variétés différentiables et structures différentiables des sphères.— Bull. Soc. Math. de France, 1959, 87, 439—447).

Связь между числом критических точек функции на многообразии и топологией многообразия после Пуанкаре была детально исследована М. Морсом (см., например,

кн.: Дж. М и л н о р. Теория Морса. Изд-во «Мир», 1965, гл. I). Из неравенств Морса следует, что общее число критических точек не меньше суммы чисел Бетти

$$M_0 + M_1 + M_2 + \ldots \geqslant b_0 + b_1 + b_2 + \ldots .$$

Для n-мерного тора сумма чисел Бетти равна 2^n. Поэтому функция на двумерном торе имеет не менее четырех критических точек, на трехмерном —не менее восьми и т. д.

В соответствии с этим при возмущении заполненного периодическими траекториями трехмерного тора возникает по крайней мере четыре периодических решения, четырехмерного — восемь и т. д. (ср.: V. A r n o l d. C. R. Acad. Sci. Paris, 1965, 261, 3719—3722).

Заметим, что выше все время имелись в виду невырожденные критические точки, т. е. такие, в которых второй дифференциал функции невырожден; если же имеются и вырожденные критические точки, то их надо учитывать с кратностями.

Число *геометрически различных* критических точек на многообразии также можно оценить через топологические инварианты многообразия, такие, как категория Люстерника — Шнирельмана (см., например: Л ю с т е р н и к и Ш н и р е л ь м а н, Топологические методы в вариационных задачах. Изд-во МГУ, 1930).

Категория двумерного тора равна 3, n-мерного — $n + 1$. Отсюда следует, что функция на двумерном торе имеет по меньшей мере три геометрически различные критические точки, на n-мерном — по меньшей мере $n + 1$.

Эти оценки достигаются — существуют функции, имеющие ровно $n + 1$ критическую точку.

В соответствии со сказанным при возмущении заполненного периодическими траекториями n-мерного тора возникает не менее n *геометрически различных* периодических решений.

18 (стр. 139). Имеется в виду знаменитый мемуар Пуанкаре, получивший премию: H. P o i n c a r e. Sur le Problème des Trois Corps et les Equations de la Dynamique (О проблеме трех тел и об уравнениях динамики.— Acta mathematica, t. 13, 1889); также в собрании сочинений Пуанкаре: H. P o i n c a r é. Oeuvres, t. 7. «Новые методы небесной механики» в значительной своей части представляют собой либо дальнейшее развитие, либо новую редакцию методов и результатов, изложенных в этом мемуаре. Интересны письма Пуанкаре по поводу этого мемуара, адресованные известному шведскому математику, редактору «Acta mathematica», Г. Миттаг-Леффлеру. Они опубликованы в «Acta mathematica», 1921, t. 38, 161—173. Частично мемуар Пуанкаре включен в том 2 настоящего издания.

19 (стр. 146). Это работа: «On the Part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon». Cambridge, Mass., John Wilson and Son, 1877, p. 28, перепечатанная и в «Acta mathematica», 1886, VIII, 1—36 и в «Collected Math. Works of G.W. Hill», v. I, Washington, 1905, стр. 243—270.

20 (стр. 204) См. прим. [18].

21 (стр. 205). Несуществование однозначного аналитического интеграла в задаче трех тел до сих пор не доказано с полной строгостью. Пуанкаре фактически рассматривает лишь интегралы, аналитические не только относительно переменных Делоне, но также и относительно параметра μ или $\sqrt{\mu}$. Первое аккуратное доказательство неинтегрируемости гамильтоновой системы достаточно общего вида принадлежит К. Л. Зи-

телю (русск. перев.: Математика, 5, вып. 2, 1961, 129—155); см. также работу: Ю. Мозер. On the integrability of area preserving Cremona mapping near an elliptic fixed point.— Buletin de la Sociedad Matematica Mexicana, 1961 и цитированную в ней литературу.

Интересно отметить, что *неаналитические* интегралы в рассматриваемых задачах возможны; их существование в задачах с двумя степенями свободы вытекает из одной теоремы А. Н. Колмогорова (см.: А. Н. Колмогоров. Докл. АН СССР, 1954, 48, № 4, 527—530; В. И. Арнольд, УМН, 1963, 18, № 5 и 6). Напротив, в случае, когда число степеней свободы более двух, для системы общего вида, вероятнее всего, невозможен даже и непрерывный интеграл (см.: В. И. Арнольд. Докл. АН СССР, 1964, **156**, № 1, 9—12).

22 (стр. 220). Напомним, что речь идет об *аналитических* интегралах. Непрерывный интеграл в рассматриваемой системе с двумя степенями свободы существует, если отношение масс больших тел достаточно мало (см. прим. [21]).

23 (стр. 220). См. прим. [18].

24 (стр. 223). Работу С. В. Ковалевской в русском переводе см.: С. В. Ковалевская. Научные работы. М, Изд-во АН СССР, 1948.

25 (стр. 234). Развитый в этой главе метод и аналогичные методы в теории распространения электромагнитных волн (Ватсон, Зоммерфельд, Фок) нашли в последнее время новые применения при исследовании асимптотических свойств квантово-механической амплитуды рассеяния (Редже и др.; см. сборник переводов «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях». ИЛ, 1963).

26 (стр. 277). Должно быть

$$\theta_{0,0} = \sqrt{2}\, t_0^{ad-bc-1} z_0^{-\frac{d}{c}} \left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

27 (стр. 278). Отношение средних движений Юпитера и Паллады равно 7/18, а не 8/17. Вероятно, должно быть

$$a = 2,\ b = 2,\ c = -1,\ d = 1,\ n = 8,$$

откуда

$$m_1 = 18,\ m_2 = -7.$$

28 (стр. 299). См. прим. [18].

29 (стр. 326). Пуанкаре ссылается на свой мемуар «Sur les intégrales irregulières des equations linéaires» (Об иррегулярных интегралах линейных уравнений).— Acta Mathematica, t. VIII, 1886; также в «Oeuvres», t. 1.

Считаю своим долгом поблагодарить Г. А. Мермана, М. С. Петровскую, М. С. Волкова, Л. Ю. Шпус, Г. А. Краснинского, А. А. Бряндинскую и И. В. Иословича, указавших многочисленные опечатки в I томе французского оригинала.

В. И. Арнольд

II

За последние годы издан и переиздан целый ряд монографий и учебников по различным разделам небесной механики. Не претендуя на полноту, укажем лишь на некоторые из них, в которых можно найти сведения о круге вопросов, затрагиваемых во втором томе сочинения А. Пуанкаре.

А. Пуанкаре. Лекции по небесной механике (1905—1909). М., изд-во «Наука», 1965.

К. Шарлье. Небесная механика (1927). М., изд-во «Наука», 1966.

А. Уинтнер. Аналитические основы небесной механики. М., изд-во «Наука», 1967 (в англ. оригинале книга издана в 1941 г.).

К. Л. Зигель. Лекции по небесной механике (1956). М., ИЛ, 1959.

Д. Брауэр и Дж. Клеменс. Методы небесной механики. М., изд-во «Мир», 1964.

Г. А. Чеботарев. Аналитические и численные методы небесной механики. М.— Л., изд-во «Наука», 1965.

В последних двух монографиях приведены обширные исторические и литературные ссылки по практическим методам расчета планетных движений, применяемых в небесной механике.

Наконец, нельзя не упомянуть о давно ставшей библиографической редкостью книге: Дж. (Г.) Д. Биркгоф. Динамические системы (1927). М.— Л., ГИТТЛ, 1941, послужившей отправной точкой для многих упоминаемых в наших комментариях исследований.

Во втором томе «Новых методов небесной механики» А. Пуанкаре излагает методы, позволяющие представить решение задач небесной механики в виде бесконечных тригонометрических рядов.

Сама идея разложения в бесконечный ряд была к тому времени далеко не новой, ею широко пользовались еще Ньютон и Эйлер, решая дифференциальные уравнения с помощью рядов Тейлора. Очевидно, однако, что ряды по степеням времени бесполезны для практических нужд астрономов. В самом деле, движения планет носят периодический характер, а предсказывать их нужно на протяжении многих периодов (например, на протяжении десятков лет — оборотов Земли вокруг Солнца). Для этой цели мало пригодна аппроксимация функции отрезком ее ряда Тейлора. Чтобы иметь возможность вычислить два верных знака синуса из разложения

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 100$ (немногим больше 15 периодов), не пользуясь при этом периодичностью, понадобится по самой грубой оценке не менее сотни членов.

Поэтому усилия многих поколений ученых были направлены на отыскание методов, с помощью которых можно было бы получить последовательно сколь угодно точные приближения к решению в виде суммы периодических функций. Эти методы получили название *теории возмущений*. В основе их лежит идея вариации произвольных постоянных, восходящая к Эйлеру и подробно развитая Лагранжем.

Теория возмущений планетных орбит позволила астрономам не только предсказывать с большой точностью движение известных планет солнечной системы. Ее подлинным торжеством явилось открытие Нептуна, который был вычислен Адамсом Леверрье по возмущениям в движении Урана, которые нельзя было объяснить влиянием других планет.

Параллельно с решением прикладных задач — вычислением эфемерид — математики и астрономы всегда старались получить ответ и на вопросы теоретического ха-

рактера. В первую очередь здесь следует назвать вопрос об устойчивости солнечной системы. В 1773—1784 гг. Лагранж и Лаплас показали, что большие полуоси планетных орбит, равно как и эксцентриситеты и наклонения, испытывают лишь периодические изменения, если пренебречь возмущениями второго порядка, т. е. порядка квадрата отношения масс планет к массе Солнца (даже для самой большой планеты, Юпитера, это отношение имеет порядок $^1/_{1000}$). Таким образом, размеры солнечной системы должны оставаться ограниченными вечно. Движения, траектории которых остаются в конечной области фазового пространства, получили впоследствии название *устойчивых по Лагранжу*.

В 1809 г. Пуассон продолжил эти исследования и показал, что и во втором приближении большие полуоси не содержат вековых членов (вида Ct^m), но включают смешанные члены ($At \cdot \cos(nt + \omega)$). Ясно, что решение, содержащее смешанный член, не будет устойчивым по Лагранжу, так как амплитуда такого члена неограниченно возрастает. Все же и здесь имеет место устойчивость в некотором ослабленном смысле, так как решение возвращается к своему начальному значению бесконечно много раз. Такое явление было названо Пуанкаре устойчивостью по Пуассону и в третьем томе данного сочинения продемонстрировано его значение для задач динамики.

Наконец, в 1878 г. Аретю показал, что в третьем приближении теории возмущений изменение больших полуосей должно содержать вековой член. Подробные вычисления третьего приближения провел недавно Ж. Мефруа, который и нашел явный вид этого векового члена (J. M e f f r o y. Contribution à l'étude de la stabilité du système solaire.— Bull. Astr., 1955, 19, № 1—3, p. 1—104, 105—195, 197—224).

Появление вековых и смешанных членов не всегда вызвано существом дела. Иногда причина коренится в неудачном выборе метода. В самом деле, в разложении по степеням ε

$$\sin(n + \varepsilon)t = \sin nt + \varepsilon t \cdot \cos nt + \ldots$$

смешанный член $\varepsilon t \cdot \cos nt$ возник из-за того, что мы пытаемся колебание с частотой $n' = n + \varepsilon$ разложить по колебаниям с частотой n. Достаточно изменить частоту и трудность мгновенно исчезает.

Идея вариации частот и легла в основу методов, появившихся во второй половине XIX в. на смену классическим методам теории возмущений Лагранжа и Лапласа и связанных с именами Ганзена, Делоне, Линдштедта, Гильдена, Ньюкома, Болина и др. Эти методы дали возможность избежать появления вековых и смешанных членов и представить тем самым решение в чисто тригонометрическом виде. Именно это обстоятельство особенно подчеркивает Пуанкаре, включая их в число «новых методов» в противовес «старой» теории возмущений.

Другая трудность теории возмущений связана с появлением в ее разложениях так называемых малых делителей или малых знаменателей. Дело в том, что в каждом приближении нам приходится интегрировать тригонометрические ряды, в которых аргументы под знаками синуса или косинуса имеют вид $(n_1 m_1 + \ldots + n_k m_k)\, t + \gamma$. При интегрировании члена такого ряда в знаменателе появляется сумма $n_1 m_1 + \ldots + n_k m_k$. Если частоты n_i почти соизмеримы, то некоторые из этих сумм оказываются малыми, а соответствующие члены большими. Со времен Лапласа известно «большое неравенство» в планетных движениях, связанное с тем, что отношение частот обраще-

ния Сатурна и Юпитера $n_1 : n_2 \approx 2 : 5$ (соответственно малы знаменатели, кратные $5n_1 - 2n_2$).

Открытие пояса астероидов и построение теории их движения особенно подняло интерес к проблеме малых делителей, так как, с одной стороны, среди астероидов встречаются такие, частоты обращения которых «остро соизмеримы» с частотой обращения Юпитера (Юпитер — троянцы, 1 : 1; Юпитер — Гекуба, 1 : 2; Юпитер — Гильда, 2 : 3 и т. п.), а с другой — в распределении частот обращения всей массы астероидов обнаружились «люки»: частот, остро соизмеримых с частотой обращения Юпитера, много меньше, чем остальных. Явление «люков» было одним из первых указаний, что проблема малых делителей лежит в существе дела, а не является трудностью, порожденной неудачным методом.

Излагая новые методы теории возмущений, А. Пуанкаре отнюдь не стремился следовать изложению их авторов. Обобщив эти методы на широкий класс задач динамики, он показал прежде всего возможность провести их во всех приближениях. Затем он выяснил сферу применимости новых методов и проследил их взаимосвязи. На протяжении многих страниц он возвращается к одной и той же задаче, показывая предмет то с одной, то с другой стороны, стараясь не пропустить ни одного интересного явления.

Анализируя полученные разложения, Пуанкаре приходит к выводу о расходимости рядов теории возмущений «с точки зрения геометра», хотя первые их члены вполне удовлетворительны «с точки зрения астрономов». Попутно вводится понятие, известное теперь под названием «асимптотических рядов в смысле Пуанкаре».

Под влиянием этого открытия энтузиазм (особенно среди математиков) по отношению ко всей теории возмущений в целом в значительной степени ослаб. Оживился интерес к поискам решений в виде степенных рядов, и, наконец, в 1912 г. Зундман доказал, что решения задачи трех тел небесной механики (за исключением решений, заполняющих в фазовом пространстве многообразие меньшего числа измерений) представляются на всей временно́й оси в виде аналитических функций вспомогательного переменного. К сожалению, теорема Зундмана бесполезна с точки зрения практических вычислений ввиду крайне медленной сходимости рядов. В 1931 г. французский астроном Д. Белорицкий показал, что нужно взять $10^{8000000}$ членов в рядах Зундмана, чтобы добиться точности, необходимой для астрономов. Поэтому астрономы продолжали пользоваться для своих расчетов теорией возмущений, первые члены которой позволяют вполне удовлетворительно описать движение небесных тел.

С появлением быстродействующих электронных вычислительных машин классические аналитические методы небесной механики получили серьезного конкурента. Еще в 1950 г. в США было проведено численное интегрирование системы дифференциальных уравнений 30-го порядка, описывающей движение Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона вокруг Солнца на протяжении с 1650 по 2060 г. н. э. Вычисления велись с 14 знаками и их результаты показали прекрасное согласие с наблюдениями. Особенно велико преимущество электронных машин при расчете траекторий искусственных небесных тел, где обстановка меняется очень быстро и нет времени для построения аналитической теории. С этой же точки зрения по-новому ставится вопрос и об использовании степенных рядов, так как эти ряды и ряды полиномов, дающие сходимость на всей временно́й оси, оказываются здесь полезными.

Однако теория возмущений еще не сказала своего последнего слова. Прогнозирование движения искусственных спутников Земли (а теперь и спутников Луны) на промежутках времени порядка нескольких тысяч оборотов и качественный анализ эволюции их орбит поставили новые задачи, для решения которых успешно используются асимптотические методы, начало которым положил Пуанкаре. С другой стороны, чрезвычайно заманчивой представляется идея синтеза численных и аналитических методов. Построение аналитической теории движения планет связано со столь большим количеством выкладок, что выполнить их вручную — практически задача нереальная. Так как отдельные операции при этом более или менее стандартны (разложение в ряд, перемножение рядов, подстановка ряда в ряд и т. п.), то для их проведения можно использовать вычислительные машины. Эта идея уже реализована в ряде работ (В. А. Брумберг. Обобщенная планетная теория.— Труды ИТА АН СССР; D. Barton. Lunar disturbing function.— Astron. J., 1966, 71, № 6, 438—442).

Наконец, для качественного анализа систем небесной механики численный эксперимент является прекрасным союзником теории. Достаточно вспомнить о проблеме захвата в задаче трех тел. После работ Ж. Шази долгое время эта проблема считалась решенной в отрицательном смысле, пока эксперимент — численный эксперимент — вновь не поставил ее на повестку дня. Пример захвата, построенный численным интегрированием О. Ю. Шмидтом и Г. Ф. Хильми, вызвал к жизни теоретические работы Г. А. Мермана, К. А. Ситникова, В. М. Алексеева и др.

В настоящее время после работ А. Н. Колмогорова, В. И. Арнольда и Ю. Мозера (см. прим. [44]) на очередь встал вопрос об описании строения всего многообразия решений в системах небесной механики и эволюции этих систем. Ответ на этот вопрос вряд ли можно получить, не изучив предварительно его в рамках теории возмущений и не проанализировав большое количество численных экспериментов.

Можно надеяться, что издание перевода труда А. Пуанкаре будет в значительной мере этому содействовать.

30 (стр. 333). Введенное А. Пуанкаре понятие асимптотически сходящегося ряда и развитое им исчисление таких рядов, основы которого излагаются в настоящем разделе, выросло в современной математике в большую область асимптотического анализа. См., например: Н. де Брейн. Асимптотические методы в анализе. М., ИЛ, 1961; Эрдеи. Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962 и др.

31 (стр. 345). Пуанкаре ссылается здесь на свои работы: «Sur une méthode de M. Lindstedt» (Об одном методе г. Линдштедта). — Bull. Astr., 1886, III, février; «Sur les séries de M. Lindstedt» (О работах г. Линдштедта).— CR, CVIII, 1889; см.: «Oeuvres», t. 8.

32 (стр. 346). Уравнения, которые рассматривал Линдштедт и которые анализирует далее Пуанкаре, составляют основу современной теории колебаний. Потребности радиотехники и других практических областей стимулировали развитие асимптотических методов, правда в отличие от задач небесной механики главным образом в неконсервативном случае. Интересно проследить аналогию между классическими методами небесной механики и методами теории нелинейных колебаний. Метод усреднения, приписываемый Ван-дер-Полю, задолго до Ван-дер-Поля применялся Лагранжем и Гауссом при изучении вековых возмущений планетных орбит. Методы Крылова — Боголюбова, с помощью которых решения представляются в виде асимптотического

ряда, представляют обобщение методов Линдштедта и т. д. Следует заметить, что в неконсервативных системах детально исследован лишь случай одночастотных колебаний, что совершенно нехарактерно для задач небесной механики. По этому поводу см.: Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958; В. М. Волосов. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.— УМН, 1962, 17, вып. 6(108); М. Крускал. Адиабатические инварианты. М., ИЛ, 1962.

33 (стр. 349). Это рассуждение не совсем точно. В самом деле, построение функций S_p методом, изложенным выше, возможно лишь при отсутствии соизмеримости между частотами $n_i^0 = -\partial F_0/\partial x_i^0$. Так как x_i^0, для которых частоты соизмеримы, расположены всюду плотно, то использование производных $\partial S_p/\partial x_i^0$ в замене переменных (7) некорректно. Эту трудность можно обойти следующим образом.

Пусть x_i^* фиксированы так, что соответствующие частоты $n_i^* = n_i(x_i^*)$ несоизмеримы. Положим $x_i = x_i^* + \xi_i$ и вместо (4) рассмотрим уравнение

$$F\left(x_1^* + \frac{\partial S^*}{\partial y_1}, \ldots, x_n^* + \frac{\partial S^*}{\partial y_n}; \quad y_1, \ldots, y_n\right) = C^*. \tag{4*}$$

Функции S^* и C^* будем искать в виде

$$\begin{aligned} S^* &= \xi^0 y_1 + \ldots + \xi_n^0 y_n + \mu S_1^{**} + \sum_{p=2}^{\infty} S_p^*, \\ C^* &= F_0(x_i^*) + \sum_{p=1}^{\infty} C_p^*, \end{aligned} \tag{3*}$$

где S_1^{**} периодична по y_i, а S_p^*, C_p^* — формы p-й степени относительно μ, ξ_i^0 с периодическими по y_i коэффициентами. Для их определения получаем уравнения

$$\begin{aligned} n_1^* \frac{\partial S_1^{**}}{\partial y_1} + \ldots + n_n^* \frac{\partial S_1^{**}}{\partial y_n} &= F_1(x_j^*, y_j) - C_1^*, \\ n_1^* \frac{\partial S_p^*}{\partial y_1} + \ldots + n_n^* \frac{\partial S_p^*}{\partial y_n} &= \Phi_p^* - C_p^*, \end{aligned} \tag{6*}$$

которые решаются так же, как и уравнения (6). Делители $m_1 n_1^* + \ldots + m_n n_n^*$, появляющиеся в коэффициентах рядов Фурье, по предположению отличны от нуля. Таким образом, члены рядов (3*) определены корректно (при надлежащем выборе n_i^* ряды Фурье сходятся, см. гл. XIII), но сами ряды носят по-прежнему формальный характер.

Так как формальные ряды можно дифференцировать по ξ_i^0, то замена переменных

$$\xi_i = \frac{\partial S^*}{\partial y_i}, \qquad W_i^* = \frac{\partial S^*}{\partial \xi_i^0} \tag{8*}$$

с точки зрения формального анализа имеет смысл и дает нам ряды

$$x_i = x_i^* + \xi_i^0 + \sum_{p=1}^{\infty} x_i^{*(p)}(\xi_j^0, W_j^*, \mu),$$
$$y_i = W_i^* + \sum_{p=1}^{\infty} y_i^{*(p)}(\xi_j^0, W_j^*, \mu), \qquad (2^*)$$

где $x_i^{*(p)}$, $y_i^{*(p)}$ — формы p-й степени относительно μ, $\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_1^{(0)}$ с периодическими относительно μ коэффициентами. Ряды (2*) определяют решение системы уравнений (1), но это решение носит формальный характер не только в смысле главы VIII, т. е. по отношению к малому параметру μ, но и по отношению к ξ_i^0.

34 (стр. 361). Имеется в виду: при любых правых частях. С другой стороны, вывод Пуанкаре о разрешимости этой системы основан на замечании, сделанном в п. 126, и не требует проверки алгебраических условий совместности. Подобная проверка была бы довольно громоздкой, что и составляет трудность в непосредственном доказательстве применимости метода Линдштедта, о которой говорил выше Пуанкаре.

35 (стр. 366). Напомним, что согласно формулам п. 8 G и θ — четные функции эксцентриситетов и наклонений.

36 (стр. 371). Можно показать, что в пространственной задаче трех тел постоянная A_4 тождественно равна нулю, что обусловлено наличием интеграла площадей. Таким образом, все построения п. 132 (как и все построения последующих глав, опирающиеся на методы этого пункта) можно применять только для плоской задачи.

37 (стр. 382). Здесь и далее следует иметь в виду, что функция F разлагается по степеням $\sqrt{\rho_i}$. Поэтому в уравнение Гамильтона — Якоби войдут не только целые степени производных $\partial F/\partial\omega_i$, но и полуцелые (хотя, как это несколько раз подчеркивает Пуанкаре, младшие члены относительно этих производных линейны). То же самое имеет место для разложений по степеням Ω и V. Это обстоятельство делает излагаемый метод непригодным при малых ρ, т. е. при малых эксцентриситетах. Разбор этого случая Пуанкаре приводит в главе XII.

Указанная трудность не возникает, если для решения исходной системы п. 131 воспользоваться методом Дж. Биркгофа («Динамические системы»). Этот метод сводится к построению формальной канонической замены, приводящей функцию Гамильтона R к виду $R\ (\xi^2 + (\xi')^2, \ldots, q^2 + (q')^2)$. Система с такой функцией Гамильтона легко интегрируется.

38 (стр. 411). Метод, предложенный Пуанкаре в главе XII, не переносится непосредственно на задачу n тел ($n > 3$). Между тем преодолеваемую им трудность можно обойти в задачах весьма общего типа следующим приемом.

Пусть $L = (L_1, \ldots, L_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ — канонические переменные и функция Гамильтона имеет вид

$$F = F_0(L) + \mu f(L, \xi, \eta) + \mu F_1(L, \xi, \eta, \varphi),$$
$$f = \sum_{k=1}^{m} f_k^{(2)}(L)(\xi_k^2 + \eta_k^2) + f^{(3)}(L, \xi, \eta),$$

где F_1 — 2π-периодична по φ с нулевым средним. Именно к такому виду может быть приведена, например, плоская задача n тел.

Совершим каноническую замену

$$(L, \xi, \eta, \varphi) \to (L', \xi', \eta', \varphi')$$

по формулам

$$L = L' + \mu \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \qquad \varphi' = \varphi + \mu \frac{\partial S}{\partial L},$$

$$\xi = \xi' + \mu \frac{\partial S}{\partial \eta}, \qquad \eta' = \eta + \frac{\partial S}{\partial \xi},$$

где S удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} n_i \frac{\partial S}{\partial \varphi_i} + F_1(L, \xi, \eta, \varphi) = 0,$$

$$n_i = -\frac{\partial F_0}{\partial L_i}.$$

Как нетрудно заметить, в новых переменных функция Гамильтона принимает вид

$$F(L, \xi, \eta, \varphi) = F'(L', \xi', \eta', \varphi') = F_0'(L') + \mu f'(L', \xi', \eta') + \mu^2 F_1'(L', \xi', \eta', \varphi').$$

Здесь f' содержит, вообще говоря, члены первой степени относительно ξ', η'. Аналогично за l шагов мы придем к функции Гамильтона, в которой член, зависящий от $\varphi^{(l)}$, имеет порядок μ^{l+1}. Пренебрегая членами этого порядка, получаем «осредненную» систему, которая отличается от системы п. **131** лишь наличием членов первой степени относительно $\xi^{(l)}$, $\eta^{(l)}$. Эти члены легко устраняются линейной относительно $\xi^{(l)}$, $\eta^{(l)}$ заменой переменных. После этого осредненную систему можно решать методом Биркгофа. Модифицируя, как и в [33], метод последовательных приближений, можно избежать и здесь появления всюду разрывных функций.

39 (стр. 413). Тут ссылка на работу: «Sur la convergence des séries trigonométriques» (О сходимости тригонометрических рядов).— Bull. Astr., 1884, I, juillet; см. также «Oeuvres», t. 4.

40 (стр. 413). Ряды с малыми знаменателями типа рядов (3), которые рассматривает Пуанкаре, возникают во многих задачах математики. В качестве примера назовем задачу о приведении к нормальной форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки. Трудности, связанные здесь с наличием малых знаменателей, преодолел впервые К. Л. Зигель в 1952 г. (О нормальной форме аналитических дифференциальных уравнений в окрестности положений равновесия. — «Математика», 1962, 5, № 2). Другой пример доставляет изучение поведения решений дифференциальных уравнений на торе (А. Н. Колмогоров. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе.— Докл. АН СССР, 1953, 93, № 5; В. И. Арнольд. Об отображениях окружности на себя.— Изв. АН СССР, матем., 1961, 25, № 1; см. также доклад А. Н. Колмогорова на Математическом конгрессе в Амстердаме).

Общим во всех этих исследованиях является применение арифметических соображений. Грубо говоря, основная масса иррациональных чисел плохо приближается рациональными и потому малые знаменатели «не слишком малы». С другой стороны, иррациональные числа, ненормально хорошо приближающиеся рациональными, позволяют построить примеры расходящихся рядов типа (3) даже при аналитических возмущениях.

41 (стр. 419). См. п. 74 и далее первого тома «Новых методов».

42 (стр. 419). Если бы ряды Линдштедта (2) или (7) сходились равномерно для x_i^0, изменяющихся в некотором интервале, то формулы (7) определяли бы расслоение фазового пространства на n-мерные торы, а равенства $w_i = n_i t + \mathfrak{d}_i$ — равномерное вращение угловых координат на этих торах. При независимых частотах n_i соответствующее движение было бы условно периодическим. Именно так и обстоит дело при $\mu = 0$. «Резонансные торы», на которых $\Sigma m_i n_i = 0$ для некоторых целых m_i, распадаются при этом на торы меньшего числа измерений. Оказывается, что при $\mu \neq 0$ резонансные торы перестают существовать, причем бо́льшая часть составляющих их торов меньшего числа измерений разрушается полностью и лишь конечное число таких торов продолжает существовать и в возмущенной системе, являясь инвариантным многообразием размерности $< n$, которое может быть как устойчивым, так и неустойчивым. В случае двух степеней свободы эти многообразия суть периодические решения. Г. А. Мерман (Г. А. Мерман. Почти периодические решения и расходимость рядов Линдштедта в ограниченной плоской круговой задаче трех тел.— Труды Ин-та теоретической астрономии, 1961, вып. 8) провел соответствующие рассуждения для случая рядов Линдштедта в ограниченной задаче трех тел.

Доказательство существования «зон неустойчивости» и анализ их структуры в общем случае рассматривается в статьях Ю. Мозера (J. Moser. On theory of quasi-periodic motion. SIAM Review, 1966; Ю. Мозер. О разложении условно периодических движений в сходящиеся степенные ряды (1967).— УМН, 1969, 24, № 2 (146), 165—211) и независимо В. К. Мельниковым (О некоторых случаях сохранения условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— Докл. АН СССР, 1965, 165, № 6, 1245—1248; Об одном семействе условно периодических решений системы Гамильтона. — Там же, 181, № 3, 546—549). В одной модельной задаче В. И. Арнольд (О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы.— Докл. АН СССР, 1964, 156, № 1, 9—12) показал, что при числе степеней свободы > 2 зоны неустойчивости не только существуют, но вдоль них траектории могут уйти сколь угодно далеко.

43 (стр. 419). В этом месте рассуждения Пуанкаре содержат пробел, на который обратил внимание Г. А. Мерман (цит. выше соч.). Пусть $\omega(\mu) = n_1/n_2$ и $\omega(0)$ иррационально. Согласно рассуждению Пуанкаре мы должны взять достаточно малое μ_0, так чтобы $\omega(\mu_0) = p/q$ было рациональным. Функция $\omega(\mu)$ аналитична и, не ограничивая общности, можно считать, что $\omega'(0) \neq 0$. Но тогда

$$|\mu_0| \geqslant G\,|\omega(\mu_0) - \omega(0)| = C\left|\frac{p}{q} - \omega(0)\right| \geqslant \frac{\alpha}{q^2}$$

для почти всех иррациональных $\omega(0)$. В то же время период T дважды бесконечного семейства периодических решений, полученного из рядов Линдштедта, будет равен

$2\pi q$. Таким образом, для применимости результатов п. 42 мы должны знать, что решение

$$x_i(t; x_i^0, \omega_i, \mu), \qquad y_i(t; x_i^0, \omega_i, \mu)$$

разлагается в ряд по степеням μ, причем для t, изменяющихся на интервале длины порядка q, радиус сходимости этих рядов должен быть не меньше $1/q^2$. Для оценки радиуса сходимости в распоряжении Пуанкаре имеется только мажорантная оценка $\mu_0 \sim e^{-LT} = e^{-2L\pi q}$, что заведомо недостаточно.

44 (стр. 421). Таким образом, доказательство расходимости рядов Линдштедта при фиксированных x_i^0 у Пуанкаре фактически отсутствует. При желании восполнить этот пробел следует иметь в виду два существенно различных случая. При анализе рядов Линдштедта Пуанкаре особое внимание уделяет возможности произвольного выбора коэффициентов разложения частот $n_i(\mu)$ по степеням μ (начиная со второго члена). Если ряды Линдштедта сходятся и для простоты предположено, что число степеней свободы равно 2, то отношение частот $\alpha = n_1(\mu)/n_2(\mu)$ является аналитической функцией μ, вообще говоря, непостоянной.

Таким образом, мы получаем следующую картину. Двумерный тор с циклическими координатами w_1, w_2 с помощью уравнений (7) вкладывается в фазовое пространство и является там двумерным инвариантным многообразием. Основная система дифференциальных уравнений индуцирует на нашем торе систему, аналитически зависящую от параметра μ. Соответствующее число вращения α (равное отношению частот) также является аналитической функцией μ. Такая ситуация является весьма исключительной, так как из работы В. И. Арнольда, цитированной выше, следует, что зависимость от коэффициентов, вообще говоря, аналитической не является. Поэтому и в этом случае ряды Линдштедта, по-видимому, не сходятся.

Существенно отличным является случай постоянных частот, и значительный прогресс в рассматриваемых проблемах был достигнут в работах А. Н. Колмогорова, В. И. Арнольда и Ю. Мозера. Чтобы понять существо применяемых ими методов, вернемся к началу п. 148 и зададим вопрос: существуют ли функции вида (7), не обязательно аналитические по μ и определяющие решение уравнений Гамильтона после подстановки $w_i = n_i t + \omega_i$, если не при всех, то по крайней мере при достаточно большом наборе x_i^0?

Для решения поставленной задачи А. Н. Колмогоров предложил использовать метод типа метода Ньютона (касательных). При этом мы отказываемся от использования разложений по степеням μ, характерных для метода малого параметра, и строим функции (7) с помощью метода последовательных приближений. Заметим, что подобная же идея отличает метод Ньюкома от метода Линдштедта (ср. стр. 361 настоящего издания). Однако сходимость разложений, как говорит Пуанкаре, «с точки зрения геометра» Ньюкома интересовала мало, а сам Пуанкаре расценил метод Ньюкома как эквивалент методу Линдштедта, в расходимости рядов которого он был уверен.

Пусть функция Гамильтона имеет вид

$$F = F_0(x_i) + F_1(x_i, y_i),$$

где возмущение F_1 имеет порядок μ, и пусть частоты $n_i^0 = \dfrac{\partial F_0}{\partial x_i}(x_i^0)$ несоизмеримы

в достаточно сильном смысле. Более точно, пусть при всех целых m_i, не равных нулю одновременно, выполняется неравенство

$$|m_1 n_1^0 + \ldots + m_n n_n^0| \geqslant \frac{K}{(|m_1| + \ldots + |m_n|)^{n+1}}.$$

Полезно заметить, что точки $(n_1^0, \ldots, n_n^0)$ в n-мерном пространстве, для которых подобное неравенство имеет место хотя бы при одном K, образуют множество, дополнение к которому имеет меру нуль в смысле Лебега.

Надлежащим каноническим преобразованием, определенным в окрестности n-мерного тора $x_i = x_i^0$, функция Гамильтона преобразуется к виду

$$F = F_0'(x_i) + F_1'(x_i, y_i),$$

в котором возмущение F_1' имеет уже порядок μ^2. После n шагов это возмущение будет иметь порядок μ^{2^n}. Возникающая «сверхсходимость», характерная для методов последовательных приближений ньютоновского типа, позволяет преодолеть влияние малых делителей, возникающих на каждом шагу при выборе нужного канонического преобразования.

Применяя этот метод, А. Н. Колмогоров доказал (А. Н. Колмогоров. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— Докл. АН СССР, 1954, 98, № 4; В. И. Арнольд. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— УМН, 1963, 18, вып. 5), что при отсутствии собственного вырождения (т. е. если гессиан функции Гамильтона отличен от нуля) ответ на сформулированный выше вопрос положителен. Функции вида (7) при фиксированных x_i^0 и μ определяют в фазовом пространстве инвариантный тор, если только частоты «сильно несоизмеримы», и движение на этом инвариантном торе является условно периодическим.

Инвариантные торы не заполняют всего фазового пространства, но мера дополнительного к ним множества стремится к нулю вместе с μ. Это дополнительное множество заполнено остатками разрушившихся «резонансных торов», на которых при $\mu = 0$ частоты удовлетворяли соотношению вида $\Sigma n_i^0 m_i = 0$.

Процедура метода последовательных приближений ньютоновского типа не связана с зависимостью функции Гамильтона от малого параметра μ. Если же F зависит от μ аналитически, то эта зависимость сохраняется и при предельном переходе. Поэтому функции вида (7), с помощью которых определяются инвариантные торы с условно периодическим движением, также должны зависеть от μ аналитически. Это означает, что при надлежащем выборе x_i^0, при котором частоты «сильно несоизмеримы», т. е. удовлетворяют написанному выше неравенству, ряды Линдштедта должны сходиться, если мы выбираем коэффициенты в разложениях $n_i(\mu)$ равными нулю, начиная со второго. В задаче об отображении окружности сходимость рядов, аналогичных рядам Линдштедта, была доказана В. И. Арнольдом (цит. выше соч., Изв. АН СССР, 1961). Позднее Ю. Мозер доказал то же самое и для самих рядов Линдштедта (цит. соч., перевод в УМН, 1969). Эти результаты получены сравнением рядов теории возмущений

с тем, что дает метод Ньютона. Прямое доказательство сходимости рядов Линдштедта, основанное на оценке коэффициентов, пока не найдено.

В применениях теоремы Колмогорова существенно различаются случаи, когда число степеней свободы равно двум или больше двух. В первом случае изоэнергетическое многообразие имеет размерность три и двумерные инвариантные торы его разделяют. Поэтому траектория, начинающаяся в «щели» между двумя инвариантными торами, остается вечно в ограниченной области фазового пространства, т. е. соответствующее движение будет устойчивым по Лагранжу. Для периодических решений, принадлежащих к устойчивому (эллиптическому в смысле Биркгофа) типу, те же рассуждения позволяют установить устойчивость в смысле Ляпунова. См., например: А. М. Л е о н т о в и ч. Об устойчивости лагранжевых периодических решений ограниченной задачи трех тел.— Докл. АН СССР, 1962, 143, № 3.

Подобные рассуждения отказываются служить, если число степеней свободы больше двух, так как в этом случае n-мерные торы не разделяют $(2n-1)$-мерного изоэнергетического многообразия. Зоны неустойчивости, возникающие в местах, где частоты $n_i = \partial F_0/\partial x_i$ связаны линейными соотношениями с целыми коэффициентами, сообщаются друг с другом, и появляется возможность уйти по ним сколь угодно далеко. Это было показано В. И. Арнольдом в одном модельном примере (см. прим. [42]) и механизм, примененный им для доказательства, носит общий характер. Вероятно, наличие условно периодических движений на инвариантных торах дополняется неустойчивыми движениями в щелях между ними. Не исключена возможность, например, существования траекторий, всюду плотных в некоторой области фазового пространства, и т. п.

Теорема Колмогорова отказывалась служить в применении ко многим задачам небесной механики. Дело в том, что обычно при $\mu = 0$ здесь имеет место вырождение: функция Гамильтона $F_0(x_i)$ зависит лишь от части переменных x_i и потому между частотами всегда имеется резонансное соотношение. Подобная трудность встречается и при построении рядов Линдштедта (см. п. 134), и Пуанкаре преодолевает ее, добавляя к F_0 результат усреднения F_1 по «быстрым» переменным.

Аналогичным приемом воспользовался и В. И. Арнольд. В своей работе «Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике» (УМН, 1963, 18, вып. 6) он доказал, что результаты, аналогичные теореме Колмогорова, можно получить и при наличии вырождения. В частности, В. И. Арнольд доказал, что для задач трех тел и многих тел мера множества начальных условий, порождающих условно периодические движения, положительна. Этот результат, хотя и не означает устойчивости солнечной системы (из сказанного выше следует, что в смысле Ляпунова такой устойчивости, по-видимому, и не может быть), но делает ее «достаточно вероятной».

Как А. Н. Колмогоров, так и В. И. Арнольд имели дело с аналитическими гамильтоновыми системами. В цикле работ Ю. Мозер (Новый метод построения решений нелинейных дифференциальных уравнений (1961). — «Математика», 1962, 6, вып. 4, 3—10; О кривых, инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь.— Там же, 1962, 6, вып. 5; 51—67; Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения.— УМН, 1966, 23, № 4 (142); 179—238) показал, что аналогичных результатов можно добиться и для достаточно гладких систем и возмущений.

Многочисленные применения методов Колмогорова — Арнольда — Мозера можно

найти в уже упоминавшихся работах, а также в докладе В. И. Арнольда (в сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел». М., Изд-во АН СССР, 1963).

Упомянем еще о некоторых результатах, относящихся к исследованию окрестности положения равновесия. К. Л. Зигель доказал (О существовании нормальной формы аналитических дифференциальных уравнений Гамильтона в окрестности положения равновесия (1954).— «Математика», 1962, 5, вып. 2), что для сходимости рядов Биркгофа, родственных рядам Линдштедта, необходимо, чтобы функция Гамильтона удовлетворяла счетному числу условий на ее коэффициенты. См. также: S. M i y a h a r a. On the existence of the normal form in the neighbourhood of an equilibrium point of analytical Hamiltonian differential equations.— Publ. Astr. Soc. Japan, 1960, **14**, № 3; H. R ü s s m a n n. Über die Normalform analytischer Hamiltonscher Differential-Gleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung.— Math. Ann., 1967, **169**, 55—72.

Вопрос о сходимости и расходимости формальных рядов, приводящих аналитическую систему дифференциальных уравнений к (не обязательно гамильтоновой) нормальной форме, рассмотрел А. Д. Брюно (Нормальная форма дифференциальных уравнений.— Докл. АН СССР, 1964, **157**, № 6; О сходимости преобразований дифференциальных уравнений к нормальной форме.— Докл. АН СССР, 1965, **165**, № 5; О расходимости преобразований дифференциальных уравнений к нормальной форме.— Докл. АН СССР, 1967, **174**, № 5; О формальной устойчивости систем Гамильтона.— Матем. заметки, 1967, **1**, № 3).

Дж. Литлвуд рассмотрел асимптотические ряды, с помощью которых представляется решение задачи трех тел в окрестности лагранжева равностороннего треугольника, и получил для их N-го члена оценку порядка $N^2 \log^{3/2}(N+1)^N \varepsilon^N$ при N порядка $1/\sqrt{\varepsilon}\,|\ln|\varepsilon||^{3/4}$. Это позволило ему заключить, что, возмущая начальные условия на величину порядка ε, мы получим возмущения решений, имеющие порядок ε на интервале времени порядка $e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|\ln\varepsilon|^{3/4}}$.

Для рассматриваемой задачи число степеней свободы равно двум и подобный результат на бесконечном интервале можно получить из топологических соображений. Однако метод Литлвуда, по-видимому, применим и в высших размерностях, что может оказаться полезным.

45 (стр. 426). Неясно, что имеет в виду Пуанкаре, говоря о бесконечно большом числе аргументов. В написанном выше разложении для μt все аргументы будут кратны одному, тогда как в рядах Линдштедта аргументы являются целочисленными комбинациями по крайней мере n основных.

46 (стр. 442). Обратим внимание на то, что в этих формулах по сравнению с формулами в пунктах **131** и **137** синус и косинус поменялись местами.

47 (стр. 530). Это уравнение в настоящее время обычно называется уравнением Матье. Его решения хорошо изучены (см., например: М. Д. О. С т р е т т. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике, 1935). Неустойчивость решений дифференциальных уравнений, вызванная периодическим изменением их параметров, носит название «параметрического резонанса». См. цитируемую выше монографию Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского, а также: Дж. С т о к е р. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М., ИЛ, 1953. Глубокое исследование явлений параметрического резонанса провел М. Г. Крейн (Основные положения теории

λ-зон неустойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Сборник памяти А. А. Андронова. М., 1955, 113—498).

48 (стр. 531). Пуанкаре ссылается на работу: «Sur les groupes des équations linéaires» (О группах линейных уравнений). Она перепечатана в «Oeuvres», t. 2.

49 (стр. 540). В самом деле, воспользовавшись периодичностью ψ и $\bar{\psi}_1$, получаем

$$\psi_1(t) \equiv \frac{1}{2\pi}[F(t+2\pi) - F(t)]$$

и

$$\psi_1(t) \equiv \frac{1}{2\pi}[F(t) - F(t-2\pi)].$$

Коэффициенты уравнения (1) периодичны, поэтому вместе с $F(t)$ решением будет и $F(t+2\pi)$, а следовательно, и $\psi_1(t)$. Заменив во втором тождестве t на $-t$ и воспользовавшись четностью F, находим, что ψ_1 нечетна.

50 (стр. 558). Речь идет о работе: «Sur les déterminants d'ordre infini» (Об определителях бесконечного порядка).— Bull. Soc. Math. France, 1886, XIV, 77—90; см. также: «Oeuvres», t. 5.

51 (стр. 561). G. W. Hill. On the part of the motion of the lunar perigel which is function of the mean motions of the sun and moon.— Acta Math., 1886, t. 8.

52 (стр. 568). Пуанкаре ссылается здесь на работу: «Sur les fonctions entières» (О целых функциях).— Bull. Soc. Math. France, 1883, XI, p. 136—144; см. также: «Oeuvres», t. 4.

53 (стр. 569). Пуанкаре дает здесь, видимо, неточную ссылку, так как он имеет в виду работу Адамара «Sur les fonctions entières de la forme $e^{\varphi(z)}$» (О целых функциях вида $e^{\varphi(z)}$), напечатанную в CR, 1892, CXIV, p. 1053. Там доказана теорема: чтобы целая функция была рода нуль, коэффициенты c_n ее тейлорова разложения должны удовлетворять условию

$$|c_n| < k\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^{-\mu},$$

где k — постоянная, $\mu > 1$.

54 (стр. 604). Методы Делоне, Болина и являющиеся их обобщением методы Цейпеля (H. V. Zeipel. Recherches sur le mouvement des petites planètes, I—Arkiv mat. astr., och fysik. Stockholm, 1916, **11**, № 1) получили значительное развитие после Пуанкаре в связи с исследованием движения астероидов с острыми соизмеримостями. Обзор задач небесной механики, в которых применяются различные варианты этих методов, см.: Ferraz Mello Sylvio. Sur la méthode de von Zeipel.— Mem. Soc. astr. ital., 1966, **37**, № 2.

55 (стр. 656). Изучение систем дифференциальных уравнений в окрестности инвариантного многообразия более сложной природы, чем стационарная точка или периодическое решение, только начинается. Отметим здесь работы: Э. Г. Белага. О приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности условно периодического движения.— Докл. АН СССР, 1962, 143, № 2; Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Метод интегральных многообразий в нелиней-

ной механике.— Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Киев. Изд-во АН УССР, 1963; Ю. М о з е р (соч., цит. на стр. 763); А. М. С а м о й л е н к о. О приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности гладкого тороидального многообразия.— Изв. АН СССР, серия матем., 1966, 30, 1047—1072. О приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности гладкого интегрального многообразия.— Укр. матем. журн., 1966, 18, № 6, 41—65.

Считаю своим долгом выразить признательность В. И. Арнольду, В. А. Брумбергу, Г. А. Красинскому, Г. А. Мерману, М. С. Петровской и переводчику тома 2 «Новых методов» Ю. А. Данилову, указавшим многочисленные опечатки во французском оригинале.

Г. А. Красинскому я обязан также принадлежащими ему примечаниями [33], [36], [37], [38].

В. М. Алексеев

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции 5

НОВЫЕ МЕТОДЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

I

Введение 9

Глава I. **Общие положения и метод Якоби** 13
Общие положения 13
Примеры канонических уравнений 14
Первая теорема Якоби 18
Вторая теорема Якоби; замена переменных 19
Замечательные замены переменных 20
Кеплеровское движение 23
Частный случай задачи трех тел 25
Использование кеплеровских переменных 28
Общий случай задачи трех тел 29
Основная задача динамики 34
Приведение канонических уравнений 35
Приведение задачи трех тел 38
Вид возмущающей функции 41
Инвариантные соотношения 44

Глава II. **Интегрирование с помощью рядов** 47
Определения и леммы 47
Теорема Коши 50
Обобщение теоремы Коши 55
Приложения к задаче трех тел 58
Использование тригонометрических рядов 60
Неявные функции 64
Алгебраические особые точки 65
Исключение 67
Теорема о максимумах 69
Новые определения 71

Глава III. **Периодические решения** 73
Случай, когда время не входит явно в уравнения 81
Приложение к задаче трех тел 86

Решения первого сорта 88
Исследования Хилла по теории Луны 93
Приложение к основной задаче динамики 98
Случай, когда гессиан равен нулю 104
Прямое вычисление рядов 107
Прямое доказательство сходимости 114
Изучение важного исключительного случая 118
Решения второго сорта 124
Решения третьего сорта 128
Приложения периодических решений 135
Спутники Юпитера 137
Периодические решения вблизи положения равновесия 138
Луны без квадратуры 141

Глава IV. **Характеристические показатели** 143
Уравнения в вариациях 143
Приложение к теории Луны 145
Уравнения в вариациях в динамике 146
Применение теории линейных подстановок 152
Определение характеристических показателей 155
Уравнение, определяющее характеристические показатели . . . 157
Случай, когда время не входит явно 158
Новая формулировка теоремы пунктов 37 и 38 159
Случай, когда уравнения допускают однозначные интегралы . . 162
Случай уравнений динамики 170
Замена переменных 175
Разложение показателей. Вычисление первых членов 177
Приложение к задаче трех тел 191
Полное вычисление характеристических показателей 192
Вырождающиеся решения 201

Глава V. **Несуществование однозначных интегралов** 205
Случай, когда B обращается в нуль 211
Случай, когда гессиан равен нулю 215
Приложение к задаче трех тел 219
Задачи динамики, в которых существует однозначный интеграл 222
Интегралы, не голоморфные относительно μ 227
Исследование выражений (14) п. 84 228

Глава VI. **Приближенное разложение возмущающей функции** 234
Формулировка задачи 234
Отступление об одном свойстве возмущающей функции 236
Основы метода Дарбу 241
Обобщение на случай нескольких переменных 243
Отыскание особых точек 247
Исследование 254
Исследование в общем случае 263
Применение метода Дарбу 269

Применение к астрономии 278
Применение к доказательству несуществования однозначных интегралов 278
Глава VII. **Асимптотические решения** 286
Сходимость рядов 289
Асимптотические решения уравнений динамики 293
Разложение решений в ряд по степеням $\sqrt{\mu}$ 294
Расходимость рядов п. 108 299
Новое доказательство предложения п. 108 301
Преобразования уравнений 309
Приведение к каноническому виду 314
Вид функций V_i 316
Фундаментальная лемма 318
Аналогия между рядами п. 108 и рядами Стирлинга 322

НОВЫЕ МЕТОДЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

II

Предисловие 329
Употребляемые обозначения 331
Глава VIII. **Исчисление асимптотических рядов** 332
Различный смысл слова сходимость 332
Ряды, аналогичные рядам Стирлинга 333
Исчисление асимптотических рядов 335
Глава IX. **Методы Ньюкома и Линдштедта** 344
Исторический очерк 344
Изложение метода 346
Различные виды рядов 351
Прямое вычисление рядов 355
Сравнение с методом Ньюкома 361
Глава X. **Применение рассмотренных методов к исследованию вековых возмущений** 364
Постановка задачи 364
Новая замена переменных 366
Применение метода главы IX 370
Глава XI. **Применение к задаче трех тел** 372
Трудность задачи 372
Обобщение метода главы IX на некоторые особые случаи 373
Применение к задаче трех тел 380
Замена переменных 381
Случай плоских орбит 382
Исследование одного частного интеграла 388
Вид разложений 390
Общий случай задачи трех тел 392

Глава XII. **Применение к исследованию орбит с малыми эксцентриситетами** 395
Трудность задачи 395
Устранение трудности 402

Глава XIII. **Расходимость рядов Линдштедта** 412
Исследование рядов (3) 413
Исследование рядов (2) 417
Сравнение со старыми методами 421

Глава XIV. **Прямое вычисление рядов** 427
Применение к задаче трех тел 440
Различные свойства 450
Замечательные частные случаи 462
Выводы 467

Глава XV. **Другие методы прямых вычислений** 468
Задача из п. **125** 468
Другой пример 471
Задача п. **134** 479
Задача трех тел 486

Глава XVI. **Методы Гильдена** 509
Сведéние рассматриваемых уравнений к уравнениям второго порядка 517
Промежуточная орбита 526
Абсолютная орбита 527

Глава XVII. **Случай линейных уравнений** 530
Исследование уравнения Гильдена 530
Метод Якоби 547
Метод Гильдена 550
Метод Брунса 552
Метод Линдштедта 554
Метод Хилла 558
Применение теоремы Адамара 563
Различные замечания 571
Обобщение предыдущих результатов 572

Глава XVIII. **Случай нелинейных уравнений** 576
Уравнения с правой частью 576
Уравнение эвекции 579
Уравнение вариации 594
Выводы 599
Обобщение периодических решений 600

Глава XIX. **Методы Болина** 604
Метод Делоне 604
Метод Болина 628
Случай либрации 636
Предельный случай 648
Связь с рядами п. **125** 663
Расходимость рядов 667

Глава XX. **Ряды Болина** 673
Случай либрации 677
Предельный случай 682
Сравнение с рядами п. 127 693
Глава XXI. **Обобщение метода Болина** 701
Обобщение задачи п. 134 701
Обобщение на случай задачи трех тел 709
Исследование рядов 712
Второй метод 716
Случай либрации 720
Расходимость рядов 723
Комментарии 745

Анри Пуанкаре
Избранные труды, том I

Утверждено к печати
Редакционной коллегией серии «Классики науки»

Редактор *В. А. Никифоровский*
Художественный редактор *Н. Н. Власик*
Технический редактор *П. С. Кашина*

Сдано в набор 16/III 1971 г.
Подписано к печати 2/IX 1971 г.
Формат 70×90¹/₁₆. Бумага № 1.
Усл. печ. л. 56,59. Уч.-изд. л. 40,1
Тираж 11 500 экз. Тип. зак. 1934.
Цена 3 р. 22 к.

Издательство «Наука»
Москва К-62, Подсосенский пер., д. 21
2-я типография издательства «Наука»
Москва Г-99, Шубинский пер., д. 10